# אלגברה ליניארית ב

# תוכן העניינים

1. מרחבים וקטורים ..... 1
2. ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון ..... 29
3. העתקות ליניאריות ..... 54
4. מטריצות והעתקות לינאריות ..... 64
5. מרחבי מכפלה פנימית ..... 76
6. קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט ..... 88

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 1 - מרחבים וקטורים

### תוכן העניינים


1. מרחבים ותת-מרחבים ..... 1
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית ..... 5
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה ..... 9
4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים ..... 13
5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס ..... 18
6. תרגילי תיאוריה מתקדמים ..... 20

# מרחבים ותת-מרחבים

**סימון**

$R^n$ - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-$n$ מעל השדה $R$.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה $R$.

## שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $R^3$:

**1)** $W=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0\}$

**2)** $W=\{(a,b,c)\mid a=c\}$

**3)** $W=\{(a,b,c)\mid a=3b\}$

**4)** $W=\{(a,b,c)\mid a<b<c\}$

**5)** $W=\{(a,b,c)\mid a=c^2\}$

**6)** $W=\{(a,b,c)\mid c-b=b-a\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה חשבונית.

**7)** $W=\{(a,b,c)\mid b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה הנדסית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-15** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $M_n[R]$:

**8)** $W$ מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A \mid A=A^T\}$.

**9)** $W$ מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה $B$.
כלומר, $W=\{A \mid AB=BA\}$.

**10)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A \mid |A|=0\}$.

**11)** $W$ מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A \mid A^2=A\}$.

**12)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

**13)** $W$ מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה $B$ הוא אפס.
כלומר, $W=\{A \mid AB=0\}$.

**14)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

**15)** $W$ מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

**16)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

**17)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

**18)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה $\geq 4$.
כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\leq 4\}$.

**19)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של $x$.

**20)** $W$ מורכב מכל הפולינומים ממעלה $n$, כאשר $4\leq n\leq 7$.

**21)** $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $F[R]$:

**22)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

**23)** $W$ מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

**24)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

**25)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

**26)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

**27)** $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

**28)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**29)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**30)** $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

**31)** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של $C^3$:
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

**32)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של $R^5$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**33)** יהי $V$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה $F$.

א. מצאו תנאי על $k$, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של $V$.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- $V$, שפורשים את $W$.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | כן | 2) | כן | 3) | כן | 4) | לא | 5) | לא |
| 6) | כן | 7) | לא | 8) | כן | 9) | כן | 10) | לא |
| 11) | לא | 12) | כן | 13) | כן | 14) | כן | 15) | כן |
| 16) | כן | 17) | לא | 18) | כן | 19) | כן | 20) | לא |
| 21) | לא | 22) | כן | 23) | כן | 24) | כן | 25) | כן |
| 26) | כן | 27) | לא | 28) | כן | 29) | לא | 30) | כן |

**31)** א. כן ב. לא

**32)** א. $u=(1,0,0,0,0)$

ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$

ג. לא.

**33)** א. $k=0$

ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

## שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

**1)** א. האם $u_1$ הוא צירוף לינארי של $u_4$?

ב. האם $u_1$ שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

**2)** א. האם $u_3$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_3$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**3)** א. האם $u_4$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_4$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**4)** נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**5)** נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$ ו- $u_3$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**7)** הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו- $u_4$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**8)** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.

ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה $A$ שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

**9)** נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום $p_2$ שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

**10)** עבור איזה ערכים של $a,b,c$, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

**11)** $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

**12)** $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

**13)** $\{u+v,v+w,w\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- $C^3$ :

**14)** מעל $\mathbb{C}$.

**15)** מעל $\mathbb{R}$.

**16)** נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה $Q$.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- $R$, כשהוא מרחב וקטורי מעל $Q$.

**17)** תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

**18)** להלן 3 תת-קבוצות של $R^4$ :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3$, $u_1 = 2u_3 + u_2$.

**3)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1$, $u_1 = 4u_4 - u_2$.

**4)** א+ב+ג. $k = -4$

**5)** $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

**6)** $v = 2u_1 + u_2 + u_3$ , אינסוף.

**7)** $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$ , אינסוף.

**8)** א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $D = 0.25A + 0.25B,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad B = A - 2C,\quad A = B + 2C$

**9)** א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2,\ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ p_2 = p_1 - 2p_3,\ p_1 = p_2 + 2p_3$

**10)** לכל ערך של $a, b, c$.

**11)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**12)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**13)** בלתי תלויים ליניארית.

**14)** תלויים.

**15)** בלתי תלויים ליניארית.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** א. כן. ב. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

## שאלות

**1)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$R^3$:

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

**2)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

**3)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

**4)** נתונה קבוצת וקטורים ב-$R^3$: $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם $T$ בסיס ל-$R^3$?

ב. מצאו קבוצה $T'$, שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה לינארית ב-$T$.

ג. השלימו את $T'$ לבסיס של $R^3$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית**

**5)** להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- $W$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- $U$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- $V$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- $W$, $U$ ו- $V$.

**6)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**7)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**8)** נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**9)** נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**10)** נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**11)** נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

**12)** להלן שני תתי מרחבים של המרחב $R^4$ :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.

**13)** להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$ :

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**14)** להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$ :

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

**15)**
$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

**16)**
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. $W$ - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

$U$ - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

$V$ - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ p_2(x)=-1+x^2,\ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

## שאלות

**1)** להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases}x+y-z+2w=0\\3x-y+7z+4w=0\\-5x+3y-15z-6w=0\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x-y+z+w=0\\x+2z-w=0\\x+y+3z-3w=0\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x-y+z+w=0\\2x-2y+2z+2w=0\end{cases}$$

נסמן ב- $V, U, W$ את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$, $W$ ו- $V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

**2)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $R^4$:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.
ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

**3)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3,3-x+7x^2+4x^3,-5+3x-15x^2-6x^3\}$$
$$V=sp\{1-x+x^2+x^3,1+2x^2-x^3,1+x+3x^2-3x^3,5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

**4)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3,1+2x+x^2+2x^3,-1+2x+3x^2+2x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R]\,|\,p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\left\{1+x, x+x^2, 1+x^3\right\}$$
$$V = \left\{p(x) \in P_3[R] \middle| p'(0) = 0\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

**6)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in R\right\}$$
$$W = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$ ול- $W$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

**7)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \left\{A \in V \mid A = -A^T\right\}\ ,\ W = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$ ול- $W$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

**8)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$$U = \left\{A \in V \mid A = A^T\right\}\ ,\ W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

**9)** יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים מממד 2 של $R^3$.
הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים שונים של $V$ ממימד 9.
א. הוכיחו כי $U+W=V$.
ב. חשבו $\dim(U\cap W)$.

**11)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים שונים של $V$ ממימד 7.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

**12)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים של $V$, כך ש- $\dim W=5,\ \dim U=4$ $(U\not\subseteq W)$.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

**13)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

**14)** יהיו $U$ ו- $W$ תת-מרחבים של $R^3$, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכיחו כי $U\oplus W=R^3$.

**15)** יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי $U$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי $W$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכיחו כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי $U$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי $W$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכיחו כי $U\oplus W\neq V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $\dim W=2$ , $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$

$\dim U=2$ , $B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

$\dim V=3$ , $B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$

ב. $\dim(U+V)=3$ $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$

ג. $\dim(U\cap V)=2$ , $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

**2)** א. $\dim U=2$ , $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$ , $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\-3x-y+2t=0\end{cases}$

ב. $\dim V=3$ , $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$ , $-8x-y+5z+2t=0$

ג. $\dim(U+V)=4$ , $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$

ד. $\dim(U\cap V)=1$ , $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$ ה. כן. ו. לא.

**3)** א. $\dim(U+V)=4$ , $U+V=sp\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$ , $B_{U\cap V}=\{5+x+5x^2+8x^3\}$

**4)** א. $\dim(U+V)=3$ , $B_{U+V}=\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$ , $B_{U\cap V}=\{-1+x^2\}$

**5)** $\dim(U\cap V)=2$ , $B_{U\cap V}=\{-1+x^2,1+x^3\}$

**6)** א. $\dim(U)=2$ , $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$

$\dim(W)=3$ , $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W)=4$ , $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\dim(U\cap W)=1$ , $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$

ד. ראו בסרטון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim W=2$ $\quad B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim U=1$,

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\quad \dim(U+W)=3$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U\cap W)=0$

ד. לא. $\quad$ ה. לא.

**8)** א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U\cap W)=3$

ה. לא.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** א. שאלת הוכחה. $\quad$ ב. 8

**11)** $\dim(U+W)=8,9\ or\ 10$ , $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$

**12)** $\dim(U\cap W)=2,3 or 4$ , $\dim(U+W)=6\ or\ 7$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

**1)** נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ , $B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_2$ לבסיס $B_1$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$

2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$

3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

**2)** נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}$ , $B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$.

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**3)** נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$ :

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $E$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B$ לבסיס $E$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

**4)** יהי $V$ מרחב וקטורי ויהי $B$ בסיס של $V$.
הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
**אם ורק אם** וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס $B$, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת"ל.
הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

## תשובות סופיות

**1)** א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

**2)** א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

**3)** א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. $(x,y,z,t)$ ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

**4)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה מתקדמים

## שאלות הוכחה

**1)** יהי $V$ מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

**2)** יהיו $u,v,w$ וקטורים, כך ש-$\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו-$u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש-$w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף $z$, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

**3)** יהי $U$ מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\ldots,u_n\}\subseteq U$ ויהי $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכיחו כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u)$.

**4)** יהי $V$ מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\ldots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\notin sp(A)$.

**5)** יהי $V$ מרחב $n$ מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $k\geq n$
ב. $A$ פורשת את $V$.
ג. $A$ בהכרח תלויה ליניארית.

**6)** יהי $V$ מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא ת"ל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.

נסמן: $T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $spS \subseteq spT$

ב. אם $S$ בלתי תלויה לינארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.

ג. $\dim(spT) \leq 2$

ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

**8)** יהי $V$ מרחב ותהיינה $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$, $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ קבוצות וקטורים ב-$V$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$

ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $A,B$ שתיהן בת"ל.

ג. אם $\dim V=m+k$ וגם $A,B$ שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.

ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

**9)** יהי $V$ מרחב ויהיו $U,W \subseteq V$ תמר"ים.

תהיינה $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\} \subseteq U$, שתי קבוצות בת"ל.

הוכיחו כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

**10)** יהי $V$ מרחב ויהיו $U,W$ תמר"ים שלו.

הוכיחו כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות אמריקאיות

**11)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של $A^2$ מוכל במרחב השורות של $A$.
ב. אם $AB$ משולשית עליונה, אז בהכרח $A$ משולשית עליונה או $B$ משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

**12)** נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

**13)** תהי $A$ קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. $A$ תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,
תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$.
אז מטריצה $P$ המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**15)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהיינה $A,B$ קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ-$V$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה לינארית,
אז בהכרח $A$ תלויה לינארית או $B$ תלויה לינארית.

ג. אם $A,B$ בלתי תלויות לינארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**16)** אם $W$ תת מרחב של מרחב וקטורי $V$, אז:

א. כל בסיס של $V$ מכיל בסיס כלשהו של $W$, וכל בסיס של $W$ מוכל בבסיס כלשהו של $V$.

ב. כל בסיס של $V$ מכיל בסיס כלשהו של $W$, אבל לא כל בסיס של $W$ מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של $V$.

ג. לא כל בסיס של $V$ מכיל בהכרח בסיס כלשהו של $W$, אבל כל בסיס של $W$ מוכל בבסיס כלשהו של $V$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** יהיו $U,W$ שני תתי-מרחבים של מרחב $V$,
כך ש-$\dim V = n,\ \dim U = \dim W = n-1$.
אז:

א. $n-2 \le \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \ne W$, ייתכן ש-$U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש-$V = U + sp\{v\}$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + sp\{v\} = V$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

**18)** נניח כי $v_1, v_2, v_3, v_4$ הם וקטורים במרחב ליניארי $V$.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\}$ והווקטורים $v_1, v_2, v_3, v_4$ שונים זה מזה,
אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו-$v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם $v_1, v_2$ בת"ל וגם $v_3, v_4$ בת"ל, וכן $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\} = \{\underline{0}\}$,
אז $v_1, v_2, v_3, v_4$ הם בת"ל.

**19)** אם $V,W$ תת מרחבים של מרחב וקטורי $U$, ומתקיים:
$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$,
אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

**20)** $V,W$ תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של $W$ ו-$\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של $V$, אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** אם $A$ מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של $A^t$ שווה למרחב השורות של $A$.

ב. מרחב השורות של $A^t$ שונה ממרחב השורות של $A$.

ג. ממד מרחב השורות של $A^t$ שווה לממד מרחב השורות של $A$.

ד. ממד מרחב השורות של $A^t$ שונה מממד מרחב השורות של $A$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**22)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של $AB$ מוכל במרחב השורות של $A$.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם $AB$ משולשית עליונה, אז בהכרח $A$ משולשית עליונה או $B$ משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**23)** תהי $A$ קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש-$\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. $A$ בלתי תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**24)** יהי $a$ מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\}, W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי $a$.

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי $a$.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**25)** נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2&5&5\\-1&-1&0\\2&4&3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\2&4&6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ rank(R)=2$

ב. $rank(R^3T^5)=1$

ג. מרחב השורות של $R^3T^5$ שווה למרחב השורות של $T^5$.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**26)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- $V$ $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $A$ בלתי תלויה לינארית, אז $A$ פורשת את $V$.

ב. אם $A$ קבוצה פורשת ל- $V$, אז $A$ בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם $A$ פורשת את $V$, אך $A$ תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם $A$ בלתי תלויה לינארית, אך $A$ אינה פורשת את $V$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**27)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהיינה $A,B$ קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- $V$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A,B$ תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם $A,B$ בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**28)** וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$, ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**29)** תהי $A$ מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות $A$ בת"ל, אזי עמודות $A$ בת"ל.

ב. אם שורות $A$ בת"ל ועמודות $A$ בת"ל, אזי בהכרח $A$ מטריצה ריבועית.

ג. אם שורות $A$ בת"ל ועמודות $A$ בת"ל, אזי בהכרח $A$ מטריצה הפיכה.

ד. אם שורות $A$ בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**30)** נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \middle| a+b+c=d\right\}$$

$$W=sp\left\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד עבור $U$, $W$, $U\cap W$.

ב. עבור תת מרחבים $K,L$ של מרחב וקטורי $V$, הגדירו את $K+L$.

**31)** $A$ מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ ללא פתרון.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ עם יותר מפתרון אחד.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**32)** נתונות מטריצות ממשיות $A$ מסדר $2\times4$ ו-$B$ מסדר $4\times4$, כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$.

הוכיחו כי $AB\neq0$.

**33)** $A$ מטריצה $3\times3$, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq0$, אז הדרגה של $A$ יכולה להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**34)** תהיינה $A$ מטריצה מסדר $3\times5$ ו-$B$ מטריצה $5\times3$ אז:

א. $AB$ הפיכה אם ורק אם $BA$ הפיכה.

ב. $AB$ בהכרח לא הפיכה.

ג. $BA$ בהכרח הפיכה.

ד. אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B)\leq5$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** אם $A$ מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד, אז בהכרח:

א. $A$ הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A^t$ פתרון יחיד.

ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד.

ד. מרחב העמודות של $A$ שונה ממרחב הפתרונות של $A$.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **11)** | א | **12)** | ב | **13)** | א | **14)** | ד |
| **15)** | א+ד | **16)** | ג | **17)** | א+ג | **18)** | הוכחה. |
| **19)** | ג+ד | **20)** | ב | **21)** | ב+ג | **22)** | ד |
| **23)** | ה | **24)** | ב+ד | **25)** | ב+ג | **26)** | א+ב |
| **27)** | א | **28)** | ג | **29)** | ג | | |

**30)**

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\quad \dim W=3,\quad \dim(U\cap W)=2$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **31)** | ד | **32)** | הוכחה. | **33)** | ב | | |
| **34)** | ד | **35)** | ד | | | | |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 2 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

### תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב ..... 29
2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה ..... 33
3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים ..... 45
4. דמיון מטריצות ..... 49

# לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

## שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה $P$, כך ש-$P^{-1}AP=D$, באשר $D$ מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו $A^{2009}$.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את $A^{-1}$ בעזרת $A$ ו-$I$ בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

**1)** $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ **2)** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

**3)** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ **4)** $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.

במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.

כלומר, מצאו מטריצה הפיכה $P$, כך ש-$P^{-1}AP=D$, כאשר $D$ מטריצה אלכסונית.

פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

**5)** $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ **6)** $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

**7)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

**8)** $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

**9)** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

**10)** $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

**11)** $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

**12)** תהי $A$ מטריצה ממשית ריבועית מסדר $3\times3$.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה $A$.

**13)** קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר $3\times3$,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

**2)** א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

**3)** א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

**5)** אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

**6)** ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

**7)** ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

**8)** $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

**9)** $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

**10)** $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

**11)** $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$$

**12)** $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

**13)** אין כזו מטריצה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** נתונה מטריצה ריבועית $A$.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה $A$, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם $A$ הפיכה ו-$\lambda$ ע"ע של $A$, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של $A^{-1}$.

ג. ל-$A$ ול-$A^T$ יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-$A$ ול-$A^T$ יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של $A$ הוא $\lambda$, אז $\lambda$ הוא ע"ע של $A$.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם $\lambda$ הוא ע"ע של $A$, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם $\lambda$ הוא ע"ע של $A$, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

**2)** פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה $A$ יש וקטור עצמי $v$ השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכיחו ש-$v$ וקטור עצמי גם של המטריצה $B$ וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש-$v$ וקטור עצמי של מטריצה $A$ השייך לערך עצמי $\lambda$.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכיחו ש-$v$ ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

**3)** פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית $A$ מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-
$p(x)=x^2-\text{tr}(A)x+|A|$.

2. נתון כי $\text{tr}(A)=4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית $A$ מסדר $n$.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של $A$.
הוכיחו כי $a_{n-1}=-\text{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונה מטריצה $A$ מסדר $n$.
הוכיחו:

א. $\lambda$ ע"ע של $A \Leftrightarrow rank(A-\lambda I)<n$.

ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע $\lambda$ שווה ל-$n-rank(A-\lambda I)$.

ג. אם $rank(A)=k<n$ אז 0 ע"ע של המטריצה $A$ מריבוי גיאומטרי $n-k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

**5)** נתונה מטריצה ריבועית $B$ מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכיחו:

א. 0 ע"ע של המטריצה $B$.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה $B$ לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה $B$ ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל-$tr(B)$.

**6)** נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda=k\neq 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-$A$.

**7)** תהיינה $A$ ו-$B$ מטריצות מסדר $n$ המקיימות $AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$ ו-$v$ וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכיחו כי $v$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $B$.

**8)** תהי $A$ מטריצה מסדר 3 המקיימת $0<rank(A-10I)<rank(A-4I)<3$.

א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה $A$.

ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבעו האם $A$ ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-$A$.

ד. קבעו האם $A$ הפיכה?

ה. הוכיחו כי $(A-10I)^2(A-4I)=0$. האם ייתכן ש-$A=4I$ או $A=10I$?

**9)** תהי $A$ מטריצה מסדר $5\times 5$, כך ש-$\det A=12$ וגם $\rho(I+A)=\rho(2I-A)=3$.
הוכיחו ש-$A$ לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

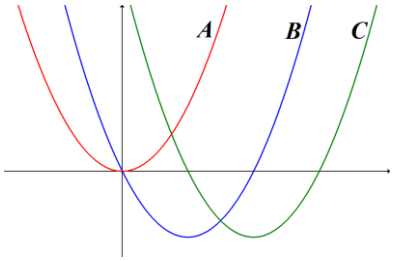

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה $A^TA$ (הניחו $n>1$).

**11)** תהי $A$ מטריצה מסדר $3\times3$, כך ש- $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I+A)<\rho(4I-A)$.
הוכיחו ש- $A$ לכסינה.

**12)** תהי $A$ מטריצה מסדר $3\times3$ המקיימת $\rho(2I-A)>\rho(5I+A)$.
ידוע גם ש- $span\{(3,1,-1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=2\underline{x}$.
הוכיחו ש- $A$ לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- $A$.

**13)** באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות $A$, $B$ ו- $C$ מסדר 2.
ידוע שהמטריצה $A$ ניתנת ללכסון.
מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות $B$ ו- $C$ ניתנות ללכסון.




**14)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

**15)** יהיו $A,B\in M_2[\mathbb{R}]$.
ידוע כי $A=AB-BA$.
הוכיחו כי $A^2=0$.

**16)** תהי $A$ מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $tr(A)\neq-1$.

א. הוכיחו כי $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{1+tr(A)}A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** נתונה מטריצה ריבועית $A$ מסדר $n$.
ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

ב. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

הערה:
הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

**18)** נתונה מטריצה ממשית $A$ מסדר 2.

א. אם $tr(A)=3,\ tr(A^2)=5$. מצאו את $|A|$.

ב. אם וקטורי העמודה של $A$ מקבילים ואם $tr(A)=5$ מצאו את $tr(A^2)$.

ג. אם $|A|=5$ ואם ל-$A$ ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

**19)** תהי $A$ מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A|=1$.

א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של $A$ מצאו את כל הע"ע של $A$.

ב. ידוע כי $A^{100}=aA^2+bA+cI$.
מצאו את $a,b,c$.

**20)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה $A$ הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

**21)** תהי $A$ מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t)=(t-2)^2(t+1)^2(t-5)^8(t+3)^7$.

א. מה הדרגה של $A$?

ב. ידוע שקיימת מטריצה $P$ הפיכה כך ש-$AP=PD$, כאשר $D$ אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A-5I$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**22)** תהי $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את הע"ע של $A$ על ידי $\alpha$ ו- $\beta$.
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha=\beta$, והוכיחו ש- $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

**23)** תהי $A$ מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה $p(t)=t^4+2it^3+3t^2$.

הוכיחו שהמטריצה $A^2-3A+I$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

**24)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $A$ מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t)=t^3-2t+5$.
הוכיחו שלכל $b\in R^3$ יש למערכת $A\mathbf{x}=b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $tr(A)$.

ב. תהי $A$ מטריצה ממשית, כאשר $A\neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t)=(t-1)^3$.
הוכיחו ש- $A$ הפיכה, וחשבו את $\mathrm{tr}(A-2I)$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו ש- $\lambda$ ע"ע של $A$ אם ורק אם $A-\lambda I$ לא הפיכה.

ב. תהי $A$ מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n\geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C=A^2+A-2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D=A^2-2I$ הפיכה.

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.

ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.

ד. הוכיחו שאם $A$ מטריצה נילפוטנטית מסדר $n$ אז $A^n=0$.

ה. תהי $A$ מטריצה נילפוטנטית מסדר $n$, ותהי $B=A-I$.
מצאו את $|B|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים.
בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

**28)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.
חשבו את $|A|$.

**29)** נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים.
א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

**30)** נתונות שתי מטריצות ריבועיות, $A$ ו-$B$, מסדר $n$. הוכיחו או הפריכו:
א. ל-$AB$ ו-$BA$ אותם ערכים עצמיים.
ב. נניח ש-$v$ וקטור עצמי, שונה מאפס, של $A$ ו-$B$,
אז $v$ גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

**31)** תהי $A$ מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר $k$, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה $A$, מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

**32)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $3\times 3$. ידוע כי $v_1,v_2$ הם ו"ע של $A$, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי $v_3$ הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים $v_1,v_2$ בת"ל, אז $A^{2018}=I$.
ב. $A$ ניתנת ללכסון.
ג. $v_3$ הוא צרוף לינארי של הווקטורים $v_1,v_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**33)** הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה $A$ אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

**34)** נתונות שתי מטריצות מסדר $n$: מטריצה $B$ הניתנת ללכסון ומטריצה $Q$ הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

**35)** נסמן ב- $W$ את קבוצת כל המטריצות מסדר $n$, שעבורן $v$ הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי $W$ תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר $n$.

ב. עבור $n=2$, $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, מצאו בסיס ל- $W$.

**36)** תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר $a$ קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של $A$.

ב. עבור איזה ערך של $a$, הזוג $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $A$?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של $A$.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u,Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

**37)** מטריצה ריבועית $A$ תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי $A$ מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של $A$ הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של $A$.

ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של $A$ מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכיחו כי $A$ ניתנת ללכסון.

ה. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**38)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של $R^5$, כך ש-$\dim W_\alpha\geq 1$.

ב. אם $u_1,u_2$ ו"ע של $A$, אז גם הווקטור $u_1+u_2$ ו"ע של $A$.

ג. אם המטריצה $B$ שקולת שורות למטריצה $A$, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם $A$ לכסינה מעל $R$, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של $A$ שונים זה מזה, אז המטריצה $A$ לכסינה מעל $R$.

**39)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. $A$ לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי $v$ של $A$, כך ש-$A^2v=2v$.

**40)** תהי $A$ מטריצה ריבועית ויהי $n$ מספר טבעי.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v$ וקטור עצמי של $A$, אז $v$ וקטור עצמי גם של $A^n$.

ב. אם $v$ וקטור עצמי של $A^n$, אז $v$ וקטור עצמי גם של $A$.

ג. אם $A$ לכסינה, אז $A^n$ לכסינה.

ד. אם $A^n$ לכסינה, אז $A$ לכסינה.

**41)** נתונה מטריצה $A$, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכיחו כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

**42)** הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

**43)** נתונה מטריצה סימטרית ממשית $A$.
הוכיחו שווקטורים עצמיים של $A$ המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**44)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $n$.
נתון: (1) $A$ ניתנת ללכסון. (2) קיים $k$ טבעי כך ש- $A^k = I$.
צריך להוכיח: $A^2 = I$.

**45)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $A$ מטריצה מסדר $n\times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1.
הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ- 0.
ב. תהי $A$ מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר $n$.
הוכיחו ש- 0 ע"ע של $A$, ושהוא הע"ע היחיד שלה.

**46)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$.
א. הוכיחו ש-$A$ לכסינה.
ב. האם המטריצה $B=4A^{111}-10A+20I$ הפיכה?

**47)** תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2+I=0$.
הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':
א. $A$ הפיכה.
ב. $A$ לא ניתנת ללכסון.
ג. $A$ לא סימטרית.
ד. $n$ זוגי.
ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה $A$ מרוכבת?

**48)** תהי $A$ מטריצה מסדר $n$ ויהי $c$ קבוע.
ידוע ש- $\lambda$ ע"ע של המטריצה $A$ עם וקטור עצמי $v$.
א. הוכיחו כי $\lambda+c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A+cI$ עם וקטור עצמי $v$.
ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda$ של המטריצה $A$ שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda+c$ של המטריצה $A+cI$.
ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda$ של המטריצה $A$ שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda+c$ של המטריצה $A+cI$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**49)** נתונה מטריצה $A$ על ידי $a_{ij}=\begin{cases}b & i=j\\ a & i\neq j\end{cases}$ כאשר $1\le i,j\le n$.
חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה $A$.
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

**50)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $n$.
הוכיחו:
א. אם $n$ אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.
ב. אם $\lambda$ ע"ע של $A$ אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של $A$.

**51)** תהי $A$ מטריצה מסדר $n$.
הוכיחו:
א. אם $A$ ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או 1-אז $A^2=I$.
ב. אם כל הערכים העצמיים של $A$ ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I-A|>0$.

**52)** תהי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של $A$ הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה $bi$ כאשר $b$ ממשי.

**53)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
ב. הוכיחו שהמטריצה $A$ נורמלית.
ג. הוכיחו שהדרגה של $A$ היא זוגית.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

**54)** סדרה $(a_n)$ מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=1$ $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור $a_n$ (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

**55)** סדרה $(a_n)$ מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=2,\ a_2=4$ $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור $a_n$ (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** א. הערך העצמי הוא 260.

**3)** א.2. $|A|=4$

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** $D=diag(0,0,k)$

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** א. $p(\lambda)=(\lambda-10)^2(\lambda-4)$

ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.

ג. $D=diag(10,10,4)$ ד. כן. ה. לא.

**9)** $\text{diag}(-1,-1,2,2,3)$

**10)** 0 ו- $tr(A)$.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** $diag(2,-5,-5),\ diag(-5,2,-5),\ diag(-5,-5,2)$

**13)** $rank(A)=0,\ rank(B)=1,\ rank(C)=2$

**14)** $0,1,-1$

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** א. $|A|=2$ ב. $tr(A^2)=25$ ג. $tr(A)=6$

**19)** א. $1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ב. $a=0,\ b=1,\ c=0$

**20)** א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$

**21)** א. 19 ב. 11

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** $\text{diag}(1,1,-3i,-8+9i)$

**24)** א. $|A|=-5$ ו- $tr(A)=0$ ב. $\text{tr}(A-2I)=-3$

**25)** שאלת הוכחה.

**26)** ה. $|B|=(-1)^n$

**27)** $|A|=-384$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** $m_M(x)=(x-2)^2(x-7)$

**29)** א. $p_M(x)=(x-5)^2(x-6)(x-7)$

**30)** שאלת הוכחה.

**31)** ב. $4+k$

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

**36)** א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

**37)** ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$

**38)** שאלת הוכחה.

**39)** שאלת הוכחה.

**40)** שאלת הוכחה.

**41)** שאלת הוכחה.

**42)** שאלת הוכחה.

**43)** שאלת הוכחה.

**44)** שאלת הוכחה.

**45)** שאלת הוכחה.

**46)** שאלת הוכחה.

**47)** שאלת הוכחה.

**48)** שאלת הוכחה.

**49)** $|A|=(b-a)^{n-1}\left[a(n-1)+b\right]$

**50)** שאלת הוכחה.

**51)** שאלת הוכחה.

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** $a_n=2^{n+1}-3^n$

**55)** $a_n=\frac{1}{3}\left(3+(-1)^n+2^{n+1}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת הלכסינות של מטריצה

## שאלות

**1)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&0&k\end{pmatrix}$, כאשר $k$ קבוע ממשי.

א. לאיזה ערכים של $k$ המטריצה לכסינה?

ב. במקרים בהם $A$ לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-$A$.

**2)** נתון $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$, כאשר $k$ קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של $k$ (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

**3)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי $a$, כך ש-$A$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. במקרה בו $A$ לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

**4)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, כאשר $m\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של $m$, המטריצה $A$ לכסינה?
כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

**5)** נתון $A=\begin{pmatrix}k-2&2k&k+1\\k-1&-1&2\\-k&0&-6\end{pmatrix}$, כאשר $k$ קבוע ממשי חיובי.

א. לאיזה ערך של הפרמטר $k$ המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה $A$?
עבור ערך ה-$k$ שמצאת בסעיף א:

ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.

ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי $a$ ו- $b$ עבורם הערכים העצמיים של $A$ יהיו 1 ו-1- **בלבד**.

ב. עבור ערכי $a$ ו- $b$ שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

**7)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל הערכים של $a$, עבורם $A$ לכסינה.

ב. במקרים בהם $A$ לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית $D$ הדומה ל-$A$.

**8)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. עבור כל ערך של $a$, מצאו את הערכים העצמיים של $A$.

ב. עבור אילו ערכי $a$, המטריצה $A$ לכסינה?

בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-$A$.

**9)** נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$,

כאשר $a,b,c$ מספרים ממשיים המקיימים $a-b+c=-1$.

א. הוכיחו כי $-1$ הוא ערך עצמי של $A$ ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

ב. נתון כי $a=b>1$.

הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a<0$.

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

**10)** מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים $a,b$, כך שהמטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ לכסינה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי $a,b$ $A$ לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש-$A$ לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש-$A$ דומה לה.

**12)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & a & 0 & b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

מצאו את כל הערכים של $a$ ו-$b$, כך ש-$A$ לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

**13)** נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & a\\ 3 & -5 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, כאשר $a$ פרמטר ממשי.

ידוע ש-$\lambda=-2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של $a$?

ב. האם המטריצה לכסינה?

**14)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\\ a & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

האם קיימים ערכי $a$, כך ש-$A$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של $a$, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-$A$.

**15)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -a & 2a\\ a & -a & a\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את כל ערכי $a$ עבורם $A$ לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $k \neq 4$ ב. $D = diag(4,k,k)$

**2)** המטריצה $A$ לא ניתנת ללכסון לכל ערך של $k$.

**3)** א. $A$ לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = diag\left(1,-a^2,a^2\right)$

**4)** $A$ לכסינה לכל $m$ ודומה למשל ל- $D = diag(m-1,m-1,m+2)$

**5)** א. $k = 3$ ב. ר"א = 1. ר"ג = 1. ג. $D = diag(2,-3,-5)$

**6)** א. $a = 3,\ b = -4$ או $a = 1,\ b = 0$ ב. המטריצה לא לכסינה.

**7)** א. $A$ לכסינה עבור כל $a$. ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(a,1,2)$.

**8)** א. אם $a \neq 0,2,-1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2, 2a, a+2$.

אם $a = 0$, הע"ע הם 0 ו- 2.

אם $a = -1$, הע"ע הם 1 ו- $-2$.

אם $a = 2$, יש ע"ע אחד והוא 4.

ב. $A$ לכסינה אם ורק אם $a \neq 2,-1$.

במקרה זה היא דומה למטריצה $D = diag\left(a^2,2a,a+2\right)$.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** אם $a = b = 0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b = 0$, אז $A$ לכסינה.

**11)** א+ב. $A$ לכסינה בשלושה מקרים:

כאשר $a \neq 0,1$ ואז דומה ל- $D = diag(1,0,a)$

או כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ ואז דומה ל- $D = diag(0,0,1)$

או כאשר $a = 1$ וגם $b = -\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = diag(0,1,1)$

**12)** $A$ לכסינה אם ורק אם:

1. $b \neq 2,3$ ואז $D = diag(3,2,2,b)$.

או 2. $b = 2$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,2,2,2)$.

או 3. $b = 3$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,3,2,2)$.

**13)** א. $a = 3$ ב. כן.

**14)** מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a = 0$ ודומה ל- $D = diag(0,0,0,0)$.

מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל $a$ דומה ל- $D = diag(a,-a,ai,-ai)$.

**15)** א. $A$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a = 0$. ב. $A$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל $a$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# דמיון מטריצות

## שאלות

**1)** ידוע ש-$A$ ו-$B$ מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

ג. ל-$A$ ו-$B$ אותו פולינום אופייני.

**2)** הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי $A$ מטריצה ממשית מסדר $n$ וידוע כי $A$ דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי $A$ מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

**4)** נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.
האם קיימים קבועים ממשיים $a,b$, כך שהמטריצה $A$ דומה למטריצה $B$?

**5)** נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר $n$: $A,B,C$. הוכיחו כי:

א. $A$ דומה לעצמה.

ב. אם $A$ דומה ל-$B$, אז $B$ דומה ל-$A$.

ג. אם $A$ דומה ל-$B$ ו-$B$ דומה ל-$C$, אז $A$ דומה ל-$C$.

ד. אם $A$ דומה ל-$B$ ושתיהן הפיכות, אז $A^{-1}$ דומה ל-$B^{-1}$.

ה. אם $A$ דומה ל-$B$, אז $A^k$ דומה ל-$B^k$, לכל $k$ טבעי.

ו. אם $A$ דומה ל-$B$ ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם $A$ דומה ל-$B$, אז $A^T$ דומה ל-$B^T$.

ח. אם $A$ דומה ל-$B$, אז $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

ט. אם $A$ דומה ל-$B$, אז $\mathrm{Nullity}(A)=\mathrm{Nullity}(B)$.

**הערה** – $\mathrm{Nullity}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**7)** ידוע שלמטריצה ריבועית $A$ מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim \operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $\left|A^TA\right|$

ה. ע"ע עבור $A^TA$.

ו. ע"ע עבור $\left(4A^2+10A+I\right)^{-1}$.

**הערה** – $\dim \operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

**8)** הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. $A$ ו-$B$ שתי מטריצות הדומות למטריצה $C$.
הוכיחו כי $A$ דומה ל-$B$.

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

**10)** עבור אילו ערכים של $x$ המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\-1&x&2\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

**12)** נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי $A$ ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

$B$ דומה ל-$A$ אם ורק אם $B$ ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של $A$.

**13)** נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של $a$ ו-$b$ המטריצות $A$ ו-$B$ דומות?

**14)** נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה $P$ כך ש-$P^{-1}AP=B$.

**15)** נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&2&\dots&0&0\\0&0&\dots&n-1&0\\0&0&\dots&0&n\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}n&0&\dots&0&0\\0&n-1&\dots&0&0\\0&0&\dots&2&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה $P$, כך ש-$P^{-1}AP=B$.

**16)** תהיינה $A,B$ מטריצות ב-$M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=k$, כאשר $k$ מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של $A$ ו-$B$.

ב. הוכיחו ש-$A$ ו-$B$ דומות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** תהי $A$ מטריצה מסדר $3\times 3$ עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+4)^2$ , ונתון כי $\rho(4I+A)=1$ .

א. רשמו את הפולינום האופייני של $A^2$ .

ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4-10A+9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $\left(A^4-10A+9I\right)\underline{x}=\underline{0}$ .

**18)** נתון כי $A,B,C,D\in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש-$A$ דומה ל-$B$ ו-$C$ דומה ל-$D$ .
הוכיחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל-$B+D$ .

ב. $AC$ דומה ל-$BD$ .

**19)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

**20)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: אם $A$ דומה ל-$B$ אז $A-kI$ דומה ל- $B-kI$ .

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&0\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix}$$

**21)** נתון כי $A$ ו-$B$ מטריצות דומות.
הוכיחו של-$A$ ו-$B$ אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

**22)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $7\times 7$ , בעלת דרגה $4$ .
נתון שהפולינום $q(t)=t^4-7t^2+10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של $A$ .
מצאו את הפולינום האופייני של $A$ .

א. הוכיחו ש-$A$ לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $tr\left(A^2\right)$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**23)** נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n(R)$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז $A^2$ דומה ל- $B^2$.
ב. אם ל- $A$ ול- $B$ אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון $(\text{trace})$ אז הן בהכרח דומות.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** שאלת הוכחה.
**3)** שאלת הוכחה.
**4)** לא.
**5)** שאלת הוכחה.
**6)** שאלת הוכחה.
**7)** א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1,\frac{1}{15},\frac{1}{37}$
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** $x=0$
**11)** שאלת הוכחה.
**12)** שאלת הוכחה.
**13)** $b=-2$ ו- $a=0$
**14)** כן, עבור $a=\pm 2$
**15)** המטריצות דומות ו- $P$ מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.
**16)** א. $p_A(t)=p_B(t)=t^n-kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.
**17)** א. $p(x)=(x-1)(x-16)^2$. ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.
**18)** שאלת הוכחה.
**19)** שאלת הוכחה.
**20)** א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.
**21)** שאלת הוכחה.
**22)** א. $D=diag\left(0,0,0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ ב. $tr\left(A^2\right)=14$
**23)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 3 - העתקות ליניאריות

### תוכן העניינים


1. העתקות ליניאריות ..... 54
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות ..... 56
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם ..... 59
4. פעולות עם העתקות ליניאריות ..... 63

# העתקות ליניאריות

## שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

**1** $T(x,y)=(x+y,x-y)\ ;\quad T:R^2\to R^2$

**2** $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

**3** $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\ ;\quad T:R^3\to R^2$

**4** $T(x,y)=(xy,y,z)\ ;\quad T:R^2\to R^3$

**5** $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

**6** $\left(B\in M_n[R]\right)\quad T(A)=BA+AB\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**7** $T(A)=A+A^T\ ;\qquad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**8** $T(A)=|A|\cdot I\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**9** $T(A)=A\cdot A^T\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**10** $T(A)=A^{-1}\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**11** $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\ ;\quad T:P_3[R]\to P_2[R]$

**12** $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

**13** $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

**14** $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

**15** $\left(F=C,F=R\right)\quad T\left(z\right)=\bar{z}\ ;\quad T:C[F]\to C[F]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** עבור איזה ערך של הקבוע $m$ (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2\to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$ ?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

**18)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$ , $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

**19)** $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

**20)** $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4, T\left(4x+x^2\right)=x, T\left(1-x\right)=x^2+1$.

**21)** נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

**22)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1)** כן | **2)** כן | **3)** לא | **4)** לא | **5)** לא |
| **6)** כן | **7)** כן | **8)** לא | **9)** לא | **10)** לא |
| **11)** כן | **12)** כן | **13)** כן | **14)** לא | **15)** לא |
| **16)** כן | **17)** כן | **18)** כן | **19)** כן | **20)** כן |

**21)** שאלת הוכחה. **22)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

**1)** $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$ , $T:R^4\to R^3$

**2)** $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$ , $T:R^3\to R^4$

**3)** $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ , $T:R^4\to R^3$

**4)** $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$ , $T:M_2[R]\to M_2[R]$

**5)** $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$ , $T:P_2[R]\to P_2[R]$

**6)** $D\left(p(x)\right)=p'(x)$ , $D:P_3[R]\to P_3[R]$

**7)** מצאו העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

**8)** מצאו העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$.

**9)** הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של $V$ זוגי.

**10)** הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קיימת העתקה לינארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim\left(W\right)=4$ , $\dim\operatorname{Im}\left(T\right)=\dim\operatorname{Ker}\left(T\right)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של $V$?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}\left(T^2\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(T\right)$.

ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}\left(T\right)=\operatorname{Ker}\left(T^2\right)$ , $\operatorname{Im}\left(T\right)=\operatorname{Im}\left(T^2\right)$, מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}\left(T\right)\subseteq\operatorname{Ker}\left(T\right)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

**13)** מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$ ; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$ ; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}\left(T\right)=\left(\operatorname{Ker}\left(S\right)\right)^{\perp}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

**2)** גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

**3)** גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

**4)** גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

**5)** גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1 \quad , \quad p(x)=2x+5\}$, מימד: 2.

**6)** גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1, \quad p(x)=x, \quad p(x)=x^2\}$, מימד: 3.

**7)** $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

**8)** $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** לא.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

## שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא חח"ע,[1] האם היא על,
האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

**1)** $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

**2)** $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

**3)** $T:P_2[R]\to R^3$ , $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

**4)** $T:M_2[R]\to P_3[R]$ , $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

**5)** האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

**6)** נתונה העתקה לינארית $T:U\to V$.
הוכיחו:

א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז $T$ לא על.

ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז $T$ לא חח"ע.

ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז $T$ חח"ע $\Leftrightarrow$ $T$ על.

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה $T$ אינה על.

ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$ ; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של $V$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו $T$ חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

**9)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- $V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$, אז $T$ חח"ע.

**10)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז $T$ חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v$, אז למטריצה $A$ יש $n$ שורות ו- $m$ עמודות.

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם $T$ חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. $T$ היא איזומורפיזם.

ד. $T$ היא העתקת האפס.

**12)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה $A$, כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{Im}(T)\subseteq\text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

**14)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

**15)** נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של $T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

**2)** לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

**3)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

**4)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$$

**5)** לא.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** א. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,...,-1+x^n\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

**15)** א. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\right\},\ \operatorname{Im}(T)=M_n[R]$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פעולות עם העתקות לינאריות

## שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$ , $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

**1)** $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** $TS$ **5)** $ST$

**6)** $T^2$ **7)** $T^{-1}$ **8)** $T^{-2}$ **9)** $S^2$

## תשובות סופיות

**1)** לא ניתן להגדיר.

**2)** $4S=4(x-z,y)$

**3)** לא ניתן להגדיר.

**4)** לא ניתן להגדיר.

**5)** $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

**6)** $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

**7)** $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

**8)** $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

**9)** לא ניתן להגדיר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 4 - מטריצות והעתקות לינאריות

### תוכן העניינים

1. מטריצה שמייצגת העתקה ..... 64
2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס ..... 70
3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה ..... 73

# מטריצה שמייצגת העתקה

**הערה**:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס
ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

## שאלות

**1)** נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ , $B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_2$ לבסיס $B_1$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**2)** נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ , $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B_1$.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$

2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**3)** נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

**4)** יהיו $B_1$ ו- $B_2$ שני בסיסים של המרחב $R^3$, ויהי $T$ אופרטור לינארי על $R^3$.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.

חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$T:M_2[R]\to M_2[R] \quad , \quad T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A,$$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

**6)** מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R],\ D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**9)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\left\{1,1-x,x+x^2\right\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T\left(p(x)\right)$.
* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את $T^2\left(p(x)\right)$.

**10)** תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי $A$ מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T\left(v\right)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי $B$ בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$\operatorname{rank}\left(A\right)=n$.
הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**12)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**13)** נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$ ; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכיחו ש- $T$ העתקה נילפוטנטית.

**14)** יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית
$T:V\to V$ ; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונות שתי העתקות לינאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- $V$.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$ , $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכיחו כי: $\mathrm{Ker}(S)=\{0\}$, $\mathrm{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את $V$.

ד. קבעו האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את $V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. שאלת הוכחה.

**2)** א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד; הו"ע שלו: $(1,-1,1)$. ז. לא.

**3)** $T(x,y,z)=(x+y, y+z, z-x)$

**4)** $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

**5)** $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$

**6)** $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**7)** $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

**8)** $T:P_2[R]\to P_2[R]$ ; $T(p(x))=p(x+1)$

**9)** א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$ , $\mathrm{Im}(T)=sp\{1+x^2,x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

**12)** א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ , $\mathrm{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\mathrm{tr}(T)=15$ , $\det(T)=0$ , $\mathrm{rank}(T)=2$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\mathrm{Im}(T)}=\{1\}$, $\dim(\mathrm{Im}(T))=1$

$B_{\mathrm{Ker}(T)}=\{1,x^2\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(T))=2$

**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

## שאלות

**1)** מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $R^n$ :

א. $T:R^2\to R^3$ , $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4\to R^2$ , $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

**2)** נתונה העתקה לינארית $T:R^4\to R^2$ ; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של $R^4$ לבסיס הסטנדרטי של $R^2$ .

**3)** תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה $T$ מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של $R^3$ , לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של $R^2$ .
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$ .

**4)** עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר : $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$ , $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**5)** עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$ , $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$ .
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**6)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_2[R]$ .
המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T$ , מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$ , נתונה על ידי : $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

**9)** תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V)=n$,
ויהיו $B_1,B_2$ בסיסים סדורים של $V$. הוכיחו או הפריכו:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם $T$ העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם $T$ העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

**10)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשבו את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

**12)** חשבו את $ST$ ואת $TS$, עבור ההעתקות:

$$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$$
$$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $[T]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$

**2)** $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

**3)** $[T]=\begin{pmatrix}25&0&-6\\-20&0&5\end{pmatrix}$

**4)** $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

**5)** $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

**6)** $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

**7)** $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

**8)** $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** א. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

**11)** א. $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d&-a+b+c-d\\b-d&d\end{pmatrix}$

**12)** $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

## שאלות

**1)** נתונה העתקה לינארית, $T:M_2[R]\to M_2[R]$ ; $T(X)=PX$,
כאשר $P$ מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- $W$ את קבוצת כל המטריצות $P$, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את $W$.
ב. הוכיחו כי $W$ היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

**2)** נתונה העתקה לינארית, $T:M_{10}[R]\to M_{10}[R]$ ; $T(X)=PX$,
כאשר $P$ מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי $A$ היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

**3)** מצאו העתקה לינארית $T$, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**5)** נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x,y,z)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה העתקה לינארית:

$$T:M_2[R]\to M_2[R] \quad ; \quad T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

**7)** נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\big(p(x)\big)=p(x+1)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**8)** יהי $V$ מרחב וקטורי מממד $n$.
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכיחו ש-$T$ הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של $T$ שונים מאפס.

ב. הוכיחו כי אם $T$ הפיכה, אז ל-$T$ ול-$T^{-1}$ יש את אותם וקטורים עצמיים.
מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של $T$ ושל $T^{-1}$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\;\middle|\;\lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

**2)** $4^{10}=|P|$

**3)** $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R)\quad T(X)=4X$

**4)** א. $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$ , $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$ , $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$ , ניתנת ללכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$ , וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$ , לא.

**5)** $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ , $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$ , $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z,y,2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

**6)** א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ , $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ , $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ , $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

**7)** א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת ללכסון.

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 5 - מרחבי מכפלה פנימית

### תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ..... 76
2. הנורמה והמרחק ..... 78
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים ..... 80
4. אורתוגונליות ..... 83
5. משלים אורתוגונלי ..... 86

# מרחבי מכפלה פנימית

## שאלות

**1)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

**2)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

**3)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

**4)** לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

**5)** לכל שתי מטריצות $A,B$ ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

**6)** לכל שתי פונקציות $f$, $g$ ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה מכפלה פנימית על $R^3$ , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

## תשובות סופיות

**1)** ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

**2)** $k>9$

**3)** $-1<k<1$

**4)** עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

**5)** ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

**6)** ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

**7)** $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמה והמרחק

## שאלות

**1)** נתונים שלושה וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב-$\mathbb{R}^3$, חשבו:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

**2)** נתונות שלוש מטריצות ב-$M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב-$M_{2\times3}[R]$,

חשבו:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

**3)** נתונים שלושה פולינומים ב-$C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$,

חשבו:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי $V$ ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

## תשובות סופיות

1) א. 19 ב. $-5$ ג. $-3$ ד. $-8$
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. $-12$ ג. 173 ד. $-24$ ה. $-3168$
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. $-9.5833$ ג. $-0.5833$ ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

## שאלות

**1)** הוכיחו כי אם $u,v$ תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right|=\|u\|\cdot\|v\|$.

**2)** יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

**3)** יהיו $f,g$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- $R^n$.
הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\ldots+u_nv_n\right|\le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $\left(u_1+\ldots+u_n\right)^n\le n\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)$.

**5)** נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

**6)** הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

**7)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

**9)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

**11)** חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1,2,2),\ v = (-2,1,2)$, ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

**12)** חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3,4),\ v = (1,2)$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

**13)** מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית $\theta$ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$, בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

**14)** מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית $\theta$ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- $u$ ו- $v$ הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** שאלת הוכחה.
**3)** שאלת הוכחה.
**4)** שאלת הוכחה.
**5)** שאלת הוכחה.
**6)** שאלת הוכחה.
**7)** שאלת הוכחה.
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** שאלת הוכחה.
**11)** $\theta=63.61°$
**12)** $\theta=9.44°$
**13)** $\cos\theta=0.173°$
**14)** $\cos\theta=0.00036°$
**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורתוגונליות

## שאלות

**1)** הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

**2)** מצאו את ערכו של הקבוע $k$, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

**3)** מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

**4)** הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$
אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

**5)** במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:
$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$
הראו כי הפולינומים:
$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

**6)** נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצאו את הערך של הקבוע $k$, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

**7)** הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

**8)** הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

**10)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

**11)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם $\alpha$ היא הזווית בין $a$ ל- $b$, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

**12)** יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה $k$.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- $w_1$.
מהו המרחק של $v$ מ- $w_1$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** $k=2$

**3)** $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** $k=0.5$

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ \ v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**11)** $\frac{1}{\sqrt{50}}$

**12)** $\frac{5}{4}k$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משלים אורתוגונלי

## שאלות

**1)** יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

**2)** יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

**3)** יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

**4)** יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

**5)** יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2\times 2}[R]$.

**6)** מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

**7)** מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

**8)** נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x} = 0$.
יהי $U$ מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- $U$ בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה $A$.

**9)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נניח ש- $W$ הוא תת קבוצה של $V$.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

**11)** נניח ש- $W$ הוא תת קבוצה של $V$.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם $V$ מממד סופי).

**12)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

**13)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

## תשובות סופיות

**1)** $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

**2)** $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

**3)** $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

**4)** $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

**5)** $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

**6)** $$B_W = \left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

**7)** $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

**8)** הסבר בווידאו.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית ב

## פרק 6 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל ..... 88
2. ההיטל של וקטור ..... 92
3. תהליך גרם-שמידט ..... 95

# בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

## שאלות

**1)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה $S$ אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

**2)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי $S$.

**3)** נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס $S$.

**4)** נניח ש- $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- $V$.

הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\ldots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של $v$ ביחס ל- $u_i$, או הרכיב של $v$ ביחס ל- $u_i$.

**5)** נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

**6)** נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב-$\mathbb{R}^3$.

בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

**8)** נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב-$P_3[R]$.

בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

**9)** נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב-$P_2[R]$.

בדקו האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

**10)** נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.

בדקו: האם הקבוצה $S$ אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

**11)** נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $R^2$.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $R^3$.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- $D$ מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

**14)** במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

**15)** במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x,f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\0 & x=0\\1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

**2)** $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

**3)** $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

**6)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

**7)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

**8)** הקבוצה לא אורתוגונלית.

**9)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

**10)** הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** $2\geq\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# ההיטל של וקטור

## שאלות

**1)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

**2)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

**3)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

**4)** מצאו את מקדם פורייה $c$ ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

**5)** יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב $W$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את $v$ כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

**6)** יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב $W$.
בנוסף, כתבו את $v$ כסכום של וקטור מ- $W$ ווקטור מ- $W^{\perp}$.

**7)** יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של $V$.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על $W$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את $v$ כסכום של וקטור מ- $W$ ווקטור מ- $W^{\perp}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$ : $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על $W$.

**9)** נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$ :

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על $W$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

**2** $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

**3** $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

**4** $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

**5** $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

**6** $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

**7** $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

**8** $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

**9** $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תהליך גרם-שמידט

## שאלות

**1)** נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$.

**2)** נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$.

**3)** נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

**4)** נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

## תשובות סופיות

**1)** $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

**2)** $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

**3)** $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

**4)** $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©