אלגברה ליניארית א

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 1
2. מטריצות 14
3. דטרמיננטות 42
4. מרחבים וקטורים 61
5. שדות 89
6. שדה השאריות מודולו p 96
7. מרחבי מכפלה פנימית 100
8. קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט 112

אלגברה ליניארית א

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 1
2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר) 6
3. שימושים של מערכת משוואות לינאריות 9
4. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות 11

פתרון מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16) $\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$

17) $\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$

18) $\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$

19) $\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$

20) $\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$

21) $\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$

22) $\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$

23) $\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$

24) $\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$

25) $\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$

26) $\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$

27) $\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}9&2&6&8\\3&5&-1&0\\4&2&8&2\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}0&0&-4&4\\0&5&-4&2\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

6) א. $R_1\to 2R_1+R_2$ ב. $R_2\to R_2-4R_1$ ג. $R_2\to 2R_2+4R_1$

7) $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) ו-
$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

14)
$$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

15)
$$\begin{pmatrix}1&1+i\\1+i&2i\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1+i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

F=ℝ F=ℂ

16) $(x,y)=(1,2)$

17) $(x,y)=(5-2t,t)$

18) ϕ

19) ϕ

20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ

24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

15) נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע m שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

2) 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

3) 1. $k\neq -1, k\neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

4) 1. $k\neq 1, k\neq -0.4$ 2. $k=1, k=-0.4$

5) 1. $k\neq \pm 1, k\neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

6) 1. $k\neq -1, k\neq -3, k\neq 2$ 3. $k=-1, k=-3, k=2$

7) 1. $k=-1$ 2. $k\neq \pm 1$ 3. $k=1$

8) 2. $k=3$ 3. $k\neq 3$

9) 1. $k\neq 1$ 2. $k=1$

10) 1. $a\neq 2$ 2. $a=2,\ b\neq -3$ 3. $a=2, b=-3$

11) 2. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$. 3. $a=-6,\ b=2.5$

12) 2. $a=2,\ b\neq 2$ 3. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

13) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1, k\neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

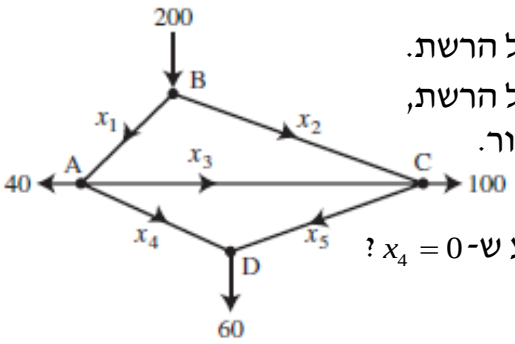
15) א. $m\neq 0,-2,3$ ב. $m=-2,3$ ג. $m=0$ ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



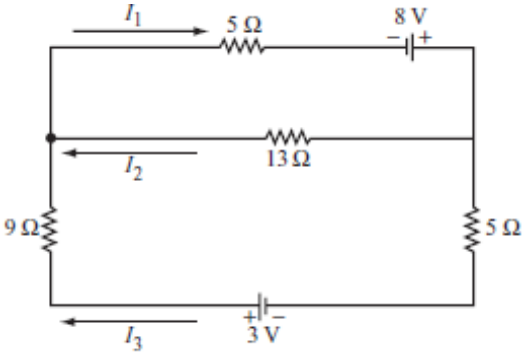
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

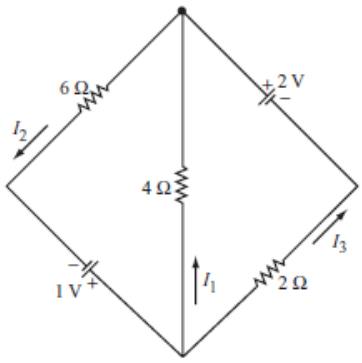
ג. מהו הערך המינימלי של x_1, אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות **2-3** מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$. ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317}$, $I_2=\frac{97}{317}$, $I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22}$, $I_2=\frac{7}{22}$, $I_3=\frac{6}{11}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

1) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

3) נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

6) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-A' את הצורה המדורגת של A.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את A.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.

ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.

ז. הטענה לא נכונה.

5) א. $m\neq 0,-2,3$. הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.

ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,

אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.

ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

6)
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות 14
2. המטריצה ההופכית 19
3. מטריצה אלמנטרית 26
4. פירוק LU 28
5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית 29
6. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות 36
7. דרגה של מטריצה 37
8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית 41

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6},\ B_{4\times6},\ C_{6\times2},\ D_{4\times2},\ E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 1-2^n & 1\end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 2×4 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 2×6 ח. לא ט. 4×6 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$
ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix}a&-\dfrac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב.
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$$

18)
$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1&1\\5&-7&k^2+3\\3&-1&k+3\end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&1&1&1&k\\1&1&1&k&1\\1&1&k&1&1\\1&k&1&1&1\\k&1&1&1&1\end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X:

12) א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

15) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&9\end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I-A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה AB לא הפיכה.

ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.

ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

26) נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים a,b,c,d כך ש-M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א. $\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$

ב. $\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$

ג. $\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$

28) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו- $A-I$ הפיכות.

29) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $B^2A=-2B^3$ (1) וגם $B^3+AB^2=3I$ (2).

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B.

30) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n=0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו- $I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B, מסדר n.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.

ב. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.

ג. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.

ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1, k \neq -2$ **11)** $k = 1, k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^TC(B^{-1})^T BC^T$ **15)** $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ **17)** $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $A^{-1} = -\frac{1}{48}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ- A^2.

ב. BA מ- A^2.

ג. B^2 מ- BA.

ד. B^2 מ- AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A?

פתרו בשתי דרכים:
דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.
דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$

2) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$

$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$

3) שאלת הוכחה.

4) -3

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה עיי"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א.
$$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

בשאלות **2-6** נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות:

2) $A\underline{x}=\underline{b}$ **3)** $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ **4)** $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$ **6)** $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

8) פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.
הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m.

13) נתונה מטריצה ריבועית A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכיחו ש-A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k.
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת k.

15) מטריצה A מקיימת $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.

ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ v=(y_1,y_2,1,2),\ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:

א. $x=au+bv+cw$

ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$

ג. $x=au+bv+w$

ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$

ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

18) נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם u וגם λu $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.

ב. אם u ו- v וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.

ג. אם הווקטורים $(1,2,...,n),\ (n,...,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,...,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

20) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^TA=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

23) תהא $A\in M_{4\times 4}\left(R\right)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&3\\2&4&1&3&6\\-3&-6&3&-8&-8\end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C\neq D$ ו- $AC=AD=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$

ב. $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$

2)
$$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) שאלת הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5,k=9$

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-t,-2s,s,-t,-t,t)$

ג. $D=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\0&0\\-2&2\\2&-2\end{pmatrix}(t=s=1)$ $C=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\\1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}(t=s=0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A+A^T$ סימטרית.
3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. A^2-B^2 סימטרית.
3. A^2+B סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$.
הוכיחו:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4=B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמתו את המשפט $rank\left(A\right)=rank\left(A^T\right)$,

על המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

2) אמתו את המשפט $rank\left(AB\right)\le\min\left\{rank(A),rank(B)\right\}$,

עבור $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.

חשבו את $rank\left(A\right)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:

א. $rank\left(A\right)=n-1\Rightarrow rank\left(A^2\right)=n-1$

ב. $rank\left(A\right)=n-1\Leftarrow rank\left(A^2\right)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $rank\left(A\right)=rank\left(AB\right)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$.

ג. אם $rank\left(A\right)>rank\left(B\right)$, אז $rank\left(AB\right)>rank\left(B\right)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $rank(B)$, $rank(A)$.

ב. חשבו את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n.

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k.

9) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$, $A_{3\times5}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

10) תהי A מטריצה מסדר $m\times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n\times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB=I_m$ אז $rank(A)=rank(B)=m$.

ב. אם $BA=I_n$ אז $rank(A)=rank(B)=n$.

ג. אם $AB=I_m$ וגם $BA=I_n$ אז בהכרח $m=n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T=I_m$ וגם $A^TA=I_n$.

11) בשדה $\mathbf{F}$ נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1,b_2,...,b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M=\left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, כאשר $m_{ij}=a_ib_j$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) תהי $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=b_i^2-b_j^2$,
כאשר $b_1,b_2,...,b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n\ge 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n\ge 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A,B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m\times n$, כך שלכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{x}\neq\underline{0}$,
מתקיים $A\underline{x}\neq B\underline{x}$.
מה הדרגה של המטריצה $A-B$?

14) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x}=\underline{0}$, הוא פתרון של המערכת
$A\underline{x}=\underline{0}$.
הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A.

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB)=\rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB)<\rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי $P(A)\subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2)<\rho(A)$.
הוכיחו שקיים $v\in\mathbb{R}^n$, כך ש- $Av\neq 0$ וגם $A^2v=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4,k=10$ אז $rank(A)=3$.
אם $k\neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.

4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.

5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.

6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) 1

12) שאלת הוכחה.

13) n

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

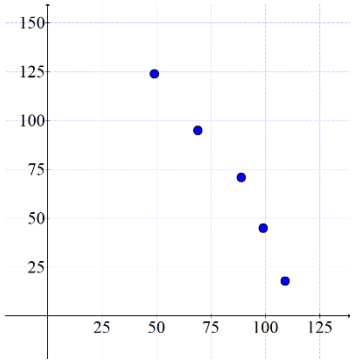
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price\,(x)$	$Demand\ /\ sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18

א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.

ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.

ג. מה משמעות השיפוע של הישר?

ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.

ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.

ד. 14.41

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג 42
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n 47
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות 52
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 54
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה 55
6. שימושי הדטרמיננטה 60

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשבו: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו-B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-k $(1 \le k \le n)$.
תהי C מטריצה הזהה למטריצות A ו-B אך נבדלת מהן בשורה ה-k, שם היא שווה לסכום השורה ה-k של A והשורה ה-k של B.
הוכיחו כי $|C| = |B| + |A|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1

2) א. -1 ב. -3 ג. -14

3) א. 24 ב. 234 ג. -300

4) 9

5) 6

6) א. 0 ב. 0 ג. 3

7) א. 24 ב. 44 ג. 104

8) 120

9) 114

10) 6

11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il

12) פתרונות באתר.

13) -8

14) 16

15) 9

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) $(k-1)^4(k+4)$

19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,...,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

הפיכה?

2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ-n?

3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n\geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

8) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

9) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n\geq 3$:

$$\left(a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j \\ 1 & 2\leq i\leq n,\ j=1 \\ 1 & 2\leq j\leq n,\ i=1 \\ x & else\end{cases}\right).\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j\end{cases}$.

חשבו את $D_n=|A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

13) נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה B.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

14) חשבו את $D_n=\begin{vmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

15) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}2 & & 1\\ & \iddots & \\ n & & 2\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}i & i+j=n+1\\ 2 & else\end{cases}$.

16) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}a & & b\\ & \iddots & \\ b & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}b & i+j=n+1\\ a & else\end{cases}$.

17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. A הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13)
$$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\end{cases}$$

15)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n \text{ odd}\end{cases}$$

16)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ odd}\end{cases}$$

17)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n \text{ even}\end{cases}$$

18)
$$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ even}\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ odd}\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

2) א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|B|, |A|$.

6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18,\ |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1}:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9 & 26 & -1 & 14 & 10\\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0\\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0\\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$.

5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל-± 1, כאשר כל איברי A ו-A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,
אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכיחו ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון כי A,B הפיכות ו-C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.

ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.

ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.

ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times 3}$, $A_{3\times 5}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $|AB| = |BA|$

ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:

א. $4^3 |A|^3$

ב. $4^3 |B|^3$

ג. $4|B|^3$

ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $|A| = 4$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A) = 0$

ד. $|A| = 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:

א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש-$\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases}i & i=j\\ 1 & i\neq j\end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,
אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשבו $|\det(A)|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $\left|Adj(A)\right|=|A|^{n-1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) ד

13) שאלת הוכחה.

14) ד

15) ד

16) שאלת הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א. 13. א. 1. 14 א. 2. ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים 61
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית 65
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה 69
4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים 73
5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס 78
6. תרגילי תיאוריה מתקדמים 80

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו-c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו-c מהווים סדרה הנדסית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-15** בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A \mid A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A \mid AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A \mid |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A \mid A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A \mid AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4.
כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3:
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	2)	כן	3)	כן	4)	לא	5)	לא
6)	כן	7)	לא	8)	כן	9)	כן	10)	לא
11)	לא	12)	כן	13)	כן	14)	כן	15)	כן
16)	כן	17)	לא	18)	כן	19)	כן	20)	לא
21)	לא	22)	כן	23)	כן	24)	כן	25)	כן
26)	כן	27)	לא	28)	כן	29)	לא	30)	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$

ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$

ג. לא.

33) א. $k=0$

ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4?

ב. האם u_1 שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. האם u_3 שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. האם u_4 שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.

ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3,\ u_1 = 2u_3 + u_2$.

3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1,\ u_1 = 4u_4 - u_2$.

4) א+ב+ג. $k = -4$

5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.

7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.

8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $D = 0.25A + 0.25B,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad B = A - 2C,\quad A = B + 2C$

9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2,\ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ p_2 = p_1 - 2p_3,\ p_1 = p_2 + 2p_3$

10) לכל ערך של a, b, c.

11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

13) בלתי תלויים ליניארית.

14) תלויים.

15) בלתי תלויים ליניארית.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א. כן. ב. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ \ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ \ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב-R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל-R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב-T.

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4:

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank):

15)
$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

16)
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ p_2(x)=-1+x^2,\ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

שאלות

1) להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- U, W ו- V.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) להלן שני תת-מרחבים של המרחב R^4:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3,\ 3-x+7x^2+4x^3,\ -5+3x-15x^2-6x^3\}$$
$$V=sp\{1-x+x^2+x^3,\ 1+2x^2-x^3,\ 1+x+3x^2-3x^3,\ 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3,\ 1+2x+x^2+2x^3,\ -1+2x+3x^2+2x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R]\mid p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\{1+x, x+x^2, 1+x^3\}$$
$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

6) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$
$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = -A^T\} \ , \ W = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

8) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\} \ , \ W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U.
ב. מצאו בסיס וממד ל- W.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים מממד 2 של R^3.
הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכיחו כי $U+W=V$.
ב. חשבו $\dim(U\cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim W=5,\ \dim U=4\ (U\not\subseteq W)$.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכיחו כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכיחו כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכיחו כי $U\oplus W\neq V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, $\dim W=2$

$B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, $\dim U=2$

$B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, $\dim V=3$

ב. $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ $\dim(U+V)=3$

ג. $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, $\dim(U\cap V)=2$

2) א. $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\-3x-y+2t=0\end{cases}$, $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$, $\dim U=2$

ב. $-8x-y+5z+2t=0$, $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$, $\dim V=3$

ג. $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$, $\dim(U+V)=4$

ד. $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$, $\dim(U\cap V)=1$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $U+V=sp\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\}$, $\dim(U+V)=4$

ב. $B_{U\cap V}=\{5+x+5x^2+8x^3\}$, $\dim(U\cap V)=1$

4) א. $B_{U+V}=\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\}$, $\dim(U+V)=3$

ב. $B_{U\cap V}=\{-1+x^2\}$, $\dim(U\cap V)=1$

5) $B_{U\cap V}=\{-1+x^2,1+x^3\}$, $\dim(U\cap V)=2$

6) א. $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U)=2$

$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(W)=3$

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U+W)=4$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=1$

ד. ראו בסרטון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim W=2$ $\quad B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim U=1$,

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\quad \dim(U+W)=3$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=0$

ד. לא. $\quad$ ה. לא.

8) א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=3$

ה. לא.

9) שאלת הוכחה.

10) א. שאלת הוכחה. $\quad$ ב. 8

11) $\dim(U+W)=8,\ 9\ or\ 10$, $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$

12) $\dim(U\cap W)=2,3 or 4$, $\dim(U+W)=6\ or\ 7$

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$, $B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$

2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$

3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}$, $B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$.

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת"ל.
הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

1) יהי V מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

2) יהיו u,v,w וקטורים, כך ש-$\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו-$u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש-$w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

3) יהי U מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\ldots,u_n\}\subseteq U$ ויהי $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכיחו כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u)$.

4) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\ldots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\notin sp(A)$.

5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $k\geq n$
ב. A פורשת את V.
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.

6) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא ת"ל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.

נסמן: $T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $spS \subseteq spT$

ב. אם S בלתי תלויה לינארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.

ג. $\dim(spT) \leq 2$

ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

8) יהי V מרחב ותהיינה $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$, $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ קבוצות וקטורים ב-V.

הוכיחו או הפריכו:

א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$

ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז A,B שתיהן בת"ל.

ג. אם $\dim V=m+k$ וגם A,B שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.

ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

9) יהי V מרחב ויהיו $U,W \subseteq V$ תמר"ים.

תהיינה $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\} \subseteq U$, שתי קבוצות בת"ל.

הוכיחו כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

10) יהי V מרחב ויהיו U,W תמר"ים שלו.

הוכיחו כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות אמריקאיות

11) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

12) נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,
תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$.
אז מטריצה P המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ-V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה לינארית,
אז בהכרח A תלויה לינארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות לינארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W, אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מרחב V,
כך ש-$\dim V = n,\ \dim U = \dim W = n-1$.
אז:

א. $n-2 \le \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \ne W$, ייתכן ש-$U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש-$V = U + sp\{v\}$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + sp\{v\} = V$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

18) נניח כי v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\}$ והווקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 שונים זה מזה,
אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו-$v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם v_1, v_2 בת"ל וגם v_3, v_4 בת"ל, וכן $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\} = \{\underline{0}\}$,
אז v_1, v_2, v_3, v_4 הם בת"ל.

19) אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U, ומתקיים:
$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$,
אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

20) V,W תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של W ו-$\{v_1, v_2, v_3\}$
בסיס של V, אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) אם A מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A.

ב. מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A.

ג. ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A.

ד. ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש-$\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש-A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A בלתי תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

24) יהי a מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\}, W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a.

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי a.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2&5&5\\-1&-1&0\\2&4&3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\2&4&6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ rank(R)=2$

ב. $rank(R^3T^5)=1$

ג. מרחב השורות של R^3T^5 שווה למרחב השורות של T^5.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V.

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V, אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם A,B תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$, ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.

ב. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.

ג. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.

ד. אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \middle| a+b+c=d\right\}$$

$$W=sp\left\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד עבור U, W, $U\cap W$.

ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

31) A מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ ללא פתרון.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ עם יותר מפתרון אחד.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

32) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו-B מסדר 4×4, כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$.

הוכיחו כי $AB\neq0$.

33) A מטריצה 3×3, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

34) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו-B מטריצה 5×3 אז:

א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.

ב. AB בהכרח לא הפיכה.

ג. BA בהכרח הפיכה.

ד. אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B)\leq5$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

35) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח:

א. A הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.

ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A.

תשובות סופיות

11)	א	**12)**	ב	**13)**	א	**14)**	ד
15)	א+ד	**16)**	ג	**17)**	א+ג	**18)**	הוכחה.
19)	ג+ד	**20)**	ב	**21)**	ב+ג	**22)**	ד
23)	ה	**24)**	ב+ד	**25)**	ב+ג	**26)**	א+ב
27)	א	**28)**	ג	**29)**	ג		

30)

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\quad \dim W=3,\quad \dim(U\cap W)=2$$

31)	ד	**32)**	הוכחה.	**33)**	ב		
34)	ד	**35)**	ד				

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 5 - שדות

תוכן העניינים

1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות 89
2. שדות 93

חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x\forall y:(x+y)^2>0$

ב. $\forall x\exists y:(x+y)^2>0$

ג. $\forall x\forall y\exists z:xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0,\forall y>0\ ,\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n\exists k,n^3-n=6k$ (k ו-n טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר n^3-n מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A=\{x\mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x\oplus y=x+y+4$
$x\otimes y=2xy$

ב. $x\oplus y=x+y$
$x\otimes y=2xy$

ג. $x\oplus y=y$
$x\otimes y=y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) נתונה הקבוצה $C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ ,\ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכיחו שהקבוצה C, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.
באיזה שדה מפורסם מדובר?

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.

ב. הוכיחו כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכיחו כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

6) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

7) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $ab=cb \Rightarrow a=c$, לכל a,b,c, בשדה $(b\neq 0)$.

8) הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה $0\neq a,b,c$,
קיים בשדה איבר יחיד x, כך ש- $ax+b=c$.

9) נתון F שדה, ויהיו $x,y\in F$, כך ש- $xy\neq 0,1$.
הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x-xyx)^{-1}=x^{-1}+(y^{-1}-x)^{-1}$,
וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על R^2.

א.
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$$

ב.
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$$

האם $\left(R^2,+,\cdot\right)$ שדה?

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A=\{f:R\to R \mid \forall x,\ f(x)\neq 0\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
האם הקבוצה A, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B=\{f:R\to R\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.
האם הקבוצה B, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) יהי F שדה בעל מספר **סופי** של איברים.
הראו שלכל איבר $a\neq 0$ ב- F, קיים k טבעי, כך ש- $a^k=1_F$.

13) נתון השדה Z_7.
א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.
ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.
ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

14) נתונה הקבוצה $Z_p=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},...,\overline{p-1}\}$, p מספר ראשוני.
כאשר $\bar{a}=\{x\in Z\mid a\equiv x(\text{mod } p)\}$ ו- $a\equiv b(\text{mod } p)\Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$.
לכל $\bar{a},\bar{b}$ בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:
$$\bar{a}\oplus\bar{b}=\overline{a+b},\ \ \bar{a}\otimes\bar{b}=\overline{a\cdot b}$$
הוכיחו ש- $(Z_p,\oplus,\otimes)$ מהווה שדה.
בקיצור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו p, כאשר p ראשוני, מהווה שדה.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
12) שאלת הוכחה.
13) א. שאלת הוכחה.
ב. האיבר הנגדי לאיבר $\bar{3}$ הוא $\bar{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{2}$.
ג. האיבר ההופכי לאיבר $\bar{4}$ הוא $\bar{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{3}$.
14) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 6 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

1. שדה השאריות מודולו p 96

שדות – שדה השאריות מודולו p

1) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=-1\end{cases}$.

א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.

ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.

ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.

ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases}3x+y+4z=3\\4x+3y+3z=4\\2x+4z=0\end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

3) פתרו את המערכת $\begin{cases}3x+y+4z=3\\4x+3y+3z=4\\2x+4z=0\end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

4) פתרו את המערכת $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+4x_2+4x_3=2\\3x_1+x_3=0\end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

5) פתרו את המערכת $\begin{cases}x+4y+2z+4t=1\\x+2y-z=0\\y+z+t=1\\x+3y-z-2t=0\end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

6) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases}x+ky+z=1\\x+y+kz=1\\kx+y+z=1\end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

חשבו את A^{-1}.

9) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_3$.

חשבו את A^{-1}.

10) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -7 & k^2+3\\ 3 & -1 & k+3\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, המטריצה הפיכה.

11) נתונה הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\{(k,1,1,1,1),(1,k,1,1,1),(1,1,k,1,1),(1,1,1,k,1),(1,1,1,1,k),\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

12) במרחב $(Z_5)^4$, מעל השדה Z_5, נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W:

$$U=\{(x,y,z,t)\,|\,3x+4y+z+t=0,\ 2x+y+2t=0\}$$

$$W=sp\{(2,3,0,4),\ (1,1,4,1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים $U\cap W$, $U+W$, U, W.

מה מספר האיברים בכל מרחב?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T:M_2\left[\mathbb{Z}_5\right]\to M_2\left[\mathbb{Z}_5\right]$,
המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\}\neq \mathrm{Ker}(T)\subset \mathrm{Im}(T)$
2. $\mathrm{Ker}(T)\neq \mathrm{Im}(T)$
3. $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2\left[\mathbb{Z}_5\right]\to P_3\left[\mathbb{Z}_5\right]$,
המוגדרת על ידי $T\left(p(x)\right)=\left(x+\overline{3}\right)p(x)+p\left(\overline{0}\right)\left(x^3+\overline{2}\right)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T,
מהבסיס $E_1=\left\{\overline{1},x,x^2\right\}$ לבסיס $E_2=\left\{\overline{1},x,x^2,x^3\right\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Im}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Ker}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Ker}(T)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(1,-1)$ ב. $(1,6)$ ג. $(2,1),\ (4,0),\ (0,2),\ (3,3)$ ד. $(1,2)$

2) $(0,3,0)$

3) $(1,2,1)$

4) $(0,3,0)$

5) $(1,-3,2,2)$

6) פתרון יחיד: $k=2$, $k=0$, 9 פתרונות: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7) פתרון יחיד: $k=4$, $k=2$, $k=0$, 5 פתרונות: $k=3$, אין פתרון: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות.

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

10) $k=4$, $k=2$, $k=0$

11) עבור $k=3$, $k=1$, הווקטורים תלויים ליניארית,
ועבור $k=6$, $k=5$, $k=4$, $k=2$, $k=0$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

12) $B_U=\{(4,0,2,1),\ (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_W=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_{U+W}=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2),\ (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.

$B_{U\cap W}=\{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.

13) ההעתקה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

14) א. $[T]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $\dim \operatorname{Im} T=2$, $B_{\operatorname{Im} T}=\{x+x^3,\ x^2+2x^3\}$; 25

ג. $\dim KerT=1$, $B_{KerT}=\{9-3x+x^2\}$, 5.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 7 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית 100
2. הנורמה והמרחק 102
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים 104
4. אורתוגונליות 107
5. משלים אורתוגונלי 110

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

2) $k>9$

3) $-1<k<1$

4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

7) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשבו:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$:

חשבו:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right|=\|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.
הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\ldots+u_nv_n\right|\le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $\left(u_1+\ldots+u_n\right)^n\le n\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1,2,2),\ v = (-2,1,2)$, ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3,4),\ v = (1,2)$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$, בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B \rangle = \operatorname{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61°$
12) $\theta=9.44°$
13) $\cos\theta=0.173°$
14) $\cos\theta=0.00036°$
15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,

מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ \ v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2\times 2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x} = 0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W = \left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית א

פרק 8 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל 112
2. ההיטל של וקטור 116
3. תהליך גרם-שמידט 119

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.

הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\ldots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב-$\mathbb{R}^3$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב-$P_3[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב-$P_2[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.

בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C\left([-\pi,\pi]\right)$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C\left([-\pi,\pi]\right)$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),\ldots,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\geq\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2 $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3 $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4 $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6 $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8 $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9 $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$

2) $B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$

3) $B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$

4) $B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©