אלגברה לינארית



תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 1
2. מטריצות 14
3. דטרמיננטות 42
4. מרחבים וקטורים 61
5. ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון 78

אלגברה לינארית

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 1
2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר) 6
3. שימושים של מערכת משוואות לינאריות 9
4. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות 11

פתרון מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16) $\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$

17) $\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$

18) $\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$

19) $\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$

20) $\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$

21) $\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$

22) $\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$

23) $\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$

24) $\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$

25) $\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$

26) $\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$

27) $\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}9&2&6&8\\3&5&-1&0\\4&2&8&2\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}0&0&-4&4\\0&5&-4&2\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

6) א. $R_1\to 2R_1+R_2$ ב. $R_2\to R_2-4R_1$ ג. $R_2\to 2R_2+4R_1$

7) $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix}1&1+i\\1+i&2i\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1+i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

F=ℝ F=ℂ

16) $(x,y)=(1,2)$

17) $(x,y)=(5-2t,t)$

18) ϕ

19) ϕ

20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ

24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

15) נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע m שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

2) 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

3) 1. $k\neq -1, k\neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

4) 1. $k\neq 1, k\neq -0.4$ 2. $k=1, k=-0.4$

5) 1. $k\neq \pm 1, k\neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

6) 1. $k\neq -1, k\neq -3, k\neq 2$ 3. $k=-1, k=-3, k=2$

7) 1. $k=-1$ 2. $k\neq \pm 1$ 3. $k=1$

8) 2. $k=3$ 3. $k\neq 3$

9) 1. $k\neq 1$ 2. $k=1$

10) 1. $a\neq 2$ 2. $a=2,\ b\neq -3$ 3. $a=2, b=-3$

11) 2. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$. 3. $a=-6,\ b=2.5$

12) 2. $a=2,\ b\neq 2$ 3. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

13) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1,\ k\neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

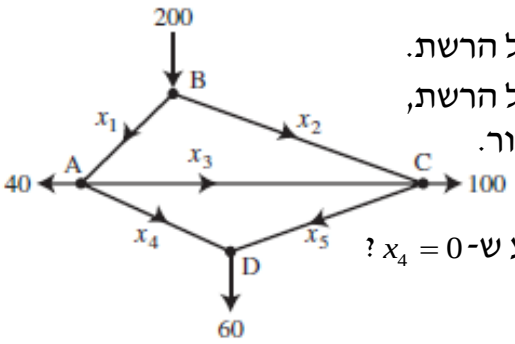
15) א. $m\neq 0,-2,3$ ב. $m=-2,3$ ג. $m=0$ ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



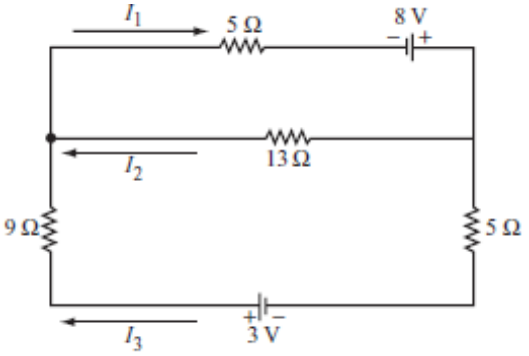
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

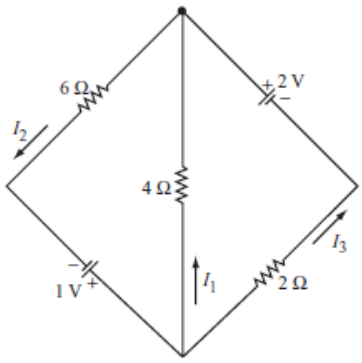
ג. מהו הערך המינימלי של x_1, אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות **2-3** מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$. ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317}$, $I_2=\frac{97}{317}$, $I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22}$, $I_2=\frac{7}{22}$, $I_3=\frac{6}{11}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

1) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

3) נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

6) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-A' את הצורה המדורגת של A.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את A.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.

ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.

ז. הטענה לא נכונה.

5) א. $m\neq 0,-2,3$. הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.

ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,

אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.

ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

6) $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה לינארית

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות 14
2. המטריצה ההופכית 19
3. מטריצה אלמנטרית 26
4. פירוק LU 28
5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית 29
6. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות 36
7. דרגה של מטריצה 37
8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית 41

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6},\ B_{4\times6},\ C_{6\times2},\ D_{4\times2},\ E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 1-2^n & 1\end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 2×4 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 2×6 ח. לא ט. 4×6 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$
ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix}a&-\dfrac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב.
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$$

18)
$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1&1\\5&-7&k^2+3\\3&-1&k+3\end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&1&1&1&k\\1&1&1&k&1\\1&1&k&1&1\\1&k&1&1&1\\k&1&1&1&1\end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X:

12) א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

15) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&9\end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I-A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה AB לא הפיכה.

ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.

ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

26) נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים a,b,c,d כך ש-M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$

ג. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$

28) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו- $A-I$ הפיכות.

29) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $B^2A=-2B^3$ (1) וגם $B^3+AB^2=3I$ (2).

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B.

30) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n=0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו- $I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B, מסדר n.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.

ב. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.

ג. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.

ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1, k \neq -2$ **11)** $k = 1, k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^TC(B^{-1})^T BC^T$ **15)** $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ **17)** $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $A^{-1} = -\frac{1}{48}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ- A^2.

ב. BA מ- A^2.

ג. B^2 מ- BA.

ד. B^2 מ- AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A?

פתרו בשתי דרכים:
דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.
דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$

2) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$

$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$

3) שאלת הוכחה.

4) -3

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א. $$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

בשאלות **2-6** נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות:

2) $A\underline{x}=\underline{b}$ **3)** $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ **4)** $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$ **6)** $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$,
בעזרת המטריצה ההפוכה.

8) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$,
בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.
הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m.

13) נתונה מטריצה ריבועית A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכיחו ש-A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k.
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת k.

15) מטריצה A מקיימת $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.

ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ v=(y_1,y_2,1,2),\ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:

א. $x=au+bv+cw$

ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$

ג. $x=au+bv+w$

ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$

ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

18) נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם u וגם λu $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.

ב. אם u ו- v וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.

ג. אם הווקטורים $(1,2,...,n),\ (n,...,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,...,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

20) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^TA=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

23) תהא $A\in M_{4\times 4}\left(R\right)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&3\\2&4&1&3&6\\-3&-6&3&-8&-8\end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C\neq D$ ו- $AC=AD=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$

ב. $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$

2)
$$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) שאלת הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5,k=9$

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-t,-2s,s,-t,-t,t)$

ג. $D=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\0&0\\-2&2\\2&-2\end{pmatrix}(t=s=1)$ $C=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\\1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}(t=s=0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמתו את המשפט $rank\left(A\right)=rank\left(A^T\right)$,

על המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

2) אמתו את המשפט $rank\left(AB\right)\le\min\left\{rank(A),rank(B)\right\}$,

עבור $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.

חשבו את $rank\left(A\right)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:

א. $rank\left(A\right)=n-1\Rightarrow rank\left(A^2\right)=n-1$

ב. $rank\left(A\right)=n-1\Leftarrow rank\left(A^2\right)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $rank\left(A\right)=rank\left(AB\right)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$.

ג. אם $rank\left(A\right)>rank\left(B\right)$, אז $rank\left(AB\right)>rank\left(B\right)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $rank(B)$, $rank(A)$.

ב. חשבו את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n.

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k.

9) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$, $A_{3\times5}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

10) תהי A מטריצה מסדר $m\times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n\times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB=I_m$ אז $rank(A)=rank(B)=m$.

ב. אם $BA=I_n$ אז $rank(A)=rank(B)=n$.

ג. אם $AB=I_m$ וגם $BA=I_n$ אז בהכרח $m=n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T=I_m$ וגם $A^TA=I_n$.

11) בשדה $\mathbf{F}$ נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1,b_2,...,b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M=\left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, כאשר $m_{ij}=a_ib_j$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) תהי $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=b_i^2-b_j^2$,
כאשר $b_1,b_2,...,b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n\ge 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n\ge 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A,B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m\times n$, כך שלכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{x}\neq\underline{0}$,
מתקיים $A\underline{x}\neq B\underline{x}$.
מה הדרגה של המטריצה $A-B$?

14) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x}=\underline{0}$, הוא פתרון של המערכת
$A\underline{x}=\underline{0}$.
הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A.

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB)=\rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB)<\rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי $P(A)\subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2)<\rho(A)$.
הוכיחו שקיים $v\in\mathbb{R}^n$, כך ש- $Av\neq 0$ וגם $A^2v=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4,k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k\neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.

4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.

5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.

6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) 1

12) שאלת הוכחה.

13) n

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

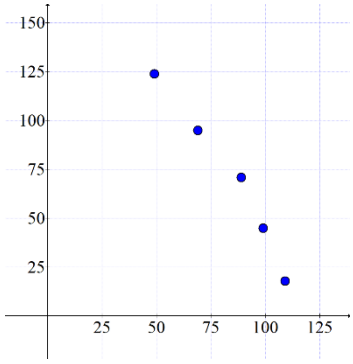
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price\,(x)$	$Demand\ /\ sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18

א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.

ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.

ג. מה משמעות השיפוע של הישר?

ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.

ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.

ד. 14.41

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה לינארית

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג 42
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n 47
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות 52
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 54
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה 55
6. שימושי הדטרמיננטה 60

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשבו: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו-B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-k $(1 \le k \le n)$.
תהי C מטריצה הזהה למטריצות A ו-B אך נבדלת מהן בשורה ה-k, שם היא שווה לסכום השורה ה-k של A והשורה ה-k של B.
הוכיחו כי $|C| = |B| + |A|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1

2) א. -1 ב. -3 ג. -14

3) א. 24 ב. 234 ג. -300

4) 9

5) 6

6) א. 0 ב. 0 ג. 3

7) א. 24 ב. 44 ג. 104

8) 120

9) 114

10) 6

11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il

12) פתרונות באתר.

13) -8

14) 16

15) 9

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) $(k-1)^4(k+4)$

19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,...,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

הפיכה?

2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ-n?

3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

8) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

9) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 3$:

$$\left(a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j \\ 1 & 2\leq i\leq n,\ j=1 \\ 1 & 2\leq j\leq n,\ i=1 \\ x & else\end{cases}\right).\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j\end{cases}$.

חשבו את $D_n=|A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

13) נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה B.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

14) חשבו את $D_n=\begin{vmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

15) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}2 & & 1\\ & \iddots & \\ n & & 2\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}i & i+j=n+1\\ 2 & else\end{cases}$.

16) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}a & & b\\ & \iddots & \\ b & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}b & i+j=n+1\\ a & else\end{cases}$.

17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. A הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13)
$$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\end{cases}$$

15)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n \text{ odd}\end{cases}$$

16)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ odd}\end{cases}$$

17)
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n \text{ even}\end{cases}$$

18)
$$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ even}\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ odd}\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

2) א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|B|, |A|$.

6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18,\ |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1}:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9 & 26 & -1 & 14 & 10\\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0\\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0\\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$.

5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל-± 1, כאשר כל איברי A ו-A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,
אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכיחו ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון כי A,B הפיכות ו-C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.

ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.

ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.

ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times 3}$, $A_{3\times 5}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $|AB| = |BA|$

ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:

א. $4^3 |A|^3$

ב. $4^3 |B|^3$

ג. $4|B|^3$

ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $|A| = 4$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A) = 0$

ד. $|A| = 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:

א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש-$\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש-$a_{ij}=\begin{cases}i & i=j\\ 1 & i\neq j\end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,
אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשבו $|\det(A)|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $\left|Adj(A)\right|=|A|^{n-1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj\left(A\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) ד

13) שאלת הוכחה.

14) ד

15) ד

16) שאלת הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א. 13. א. 1. 14 א. 2. ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה לינארית

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים 61
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית 65
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה 69
4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים 73

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו-c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו-c מהווים סדרה הנדסית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-15** בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A \mid A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A \mid AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A \mid |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A \mid A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A \mid AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4.
כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3:
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	2)	כן	3)	כן	4)	לא	5)	לא
6)	כן	7)	לא	8)	כן	9)	כן	10)	לא
11)	לא	12)	כן	13)	כן	14)	כן	15)	כן
16)	כן	17)	לא	18)	כן	19)	כן	20)	לא
21)	לא	22)	כן	23)	כן	24)	כן	25)	כן
26)	כן	27)	לא	28)	כן	29)	לא	30)	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$

ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$

ג. לא.

33) א. $k=0$

ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4?

ב. האם u_1 שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. האם u_3 שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. האם u_4 שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו-u_2?

ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.

ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2,\ u_2 = u_1 - 2u_3$.

3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2,\ u_2 = 4u_4 - u_1$.

4) א+ב+ג. $k = -4$

5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.

7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.

8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $D = 0.25A + 0.25B,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad B = A - 2C,\quad A = B + 2C$

9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2,\ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ p_2 = p_1 - 2p_3,\ p_1 = p_2 + 2p_3$

10) לכל ערך של a, b, c.

11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

13) בלתי תלויים ליניארית.

14) תלויים.

15) בלתי תלויים ליניארית.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א. כן. ב. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ \ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ \ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב-R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל-R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה לינארית ב-T.

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4:

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank):

15)
$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

16)
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ p_2(x)=-1+x^2,\ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

שאלות

1) להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases}x+y-z+2w=0\\3x-y+7z+4w=0\\-5x+3y-15z-6w=0\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x-y+z+w=0\\x+2z-w=0\\x+y+3z-3w=0\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x-y+z+w=0\\2x-2y+2z+2w=0\end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- U, W ו- V.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) להלן שני תת-מרחבים של המרחב R^4:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3,3-x+7x^2+4x^3,-5+3x-15x^2-6x^3\}$$
$$V=sp\{1-x+x^2+x^3,1+2x^2-x^3,1+x+3x^2-3x^3,5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3,1+2x+x^2+2x^3,-1+2x+3x^2+2x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R]\,|\,p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\{1+x, x+x^2, 1+x^3\}$$
$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

6) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$
$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = -A^T\} \ , \ W = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

8) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\} \ , \ W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- U.
ב. מצאו בסיס וממד ל- W.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים מממד 2 של R^3.
הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכיחו כי $U+W=V$.
ב. חשבו $\dim(U\cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim W=5,\ \dim U=4\ (U\not\subseteq W)$.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכיחו כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכיחו כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכיחו כי $U\oplus W\neq V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, $\dim W=2$

$B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, $\dim U=2$

$B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, $\dim V=3$

ב. $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ $\dim(U+V)=3$

ג. $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, $\dim(U\cap V)=2$

2) א. $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\-3x-y+2t=0\end{cases}$, $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$, $\dim U=2$

ב. $-8x-y+5z+2t=0$, $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$, $\dim V=3$

ג. $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$, $\dim(U+V)=4$

ד. $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$, $\dim(U\cap V)=1$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $U+V=sp\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\}$, $\dim(U+V)=4$

ב. $B_{U\cap V}=\{5+x+5x^2+8x^3\}$, $\dim(U\cap V)=1$

4) א. $B_{U+V}=\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\}$, $\dim(U+V)=3$

ב. $B_{U\cap V}=\{-1+x^2\}$, $\dim(U\cap V)=1$

5) $B_{U\cap V}=\{-1+x^2,1+x^3\}$, $\dim(U\cap V)=2$

6) א. $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U)=2$

$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(W)=3$

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U+W)=4$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=1$

ד. ראו בסרטון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim W=2$ $\quad B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim U=1$,

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\quad \dim(U+W)=3$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=0$

ד. לא. $\quad$ ה. לא.

8) א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(U\cap W)=3$

ה. לא.

9) שאלת הוכחה.

10) א. שאלת הוכחה. $\quad$ ב. 8

11) $\dim(U+W)=8,9\ or\ 10$, $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$

12) $\dim(U\cap W)=2,3 or 4$, $\dim(U+W)=6\ or\ 7$

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה לינארית

פרק 5 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב 78
2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה 82
3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים 94
4. דמיון מטריצות 98

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009}.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו-I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ **2)** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ **4)** $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.

במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.

כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.

פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ **6)** $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$$

12) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

13) אין כזו מטריצה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה מטריצה ריבועית A.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכיחו ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכיחו ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-
$p(x)=x^2-\text{tr}(A)x+|A|$.

2. נתון כי $\text{tr}(A)=4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכיחו כי $a_{n-1}=-\text{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה מטריצה A מסדר n.
הוכיחו:

א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow rank(A-\lambda I)<n$.

ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל- $n-rank(A-\lambda I)$.

ג. אם $rank(A)=k<n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n-k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכיחו:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $tr(B)$.

6) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda=k\neq 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

7) תהיינה A ו-B מטריצות מסדר n המקיימות $AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$ ו- v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0<rank(A-10I)<rank(A-4I)<3$.

א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

ד. קבעו האם A הפיכה?

ה. הוכיחו כי $(A-10I)^2(A-4I)=0$. האם ייתכן ש- $A=4I$ או $A=10I$?

9) תהי A מטריצה מסדר 5×5, כך ש- $\det A=12$ וגם $\rho(I+A)=\rho(2I-A)=3$.
הוכיחו ש-A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

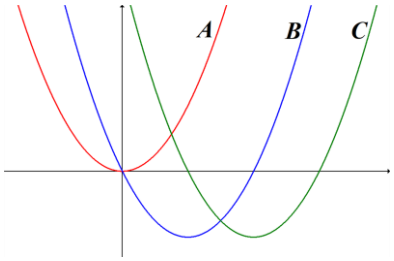
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הניחו $n>1$).

11) תהי A מטריצה מסדר 3×3, כך ש- $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I+A)<\rho(4I-A)$.
הוכיחו ש- A לכסינה.

12) תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I-A)>\rho(5I+A)$.
ידוע גם ש- $span\{(3,1,-1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=2\underline{x}$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A.

13) באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A, B ו- C מסדר 2.
ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון.
מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.



14) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

15) יהיו $A,B\in M_2[\mathbb{R}]$.
ידוע כי $A=AB-BA$.
הוכיחו כי $A^2=0$.

16) תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $tr(A)\neq-1$.

א. הוכיחו כי $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{1+tr(A)}A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

ב. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

הערה:
הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

א. אם $tr(A)=3,\ tr(A^2)=5$. מצאו את $|A|$.

ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A)=5$ מצאו את $tr(A^2)$.

ג. אם $|A|=5$ ואם ל-A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A|=1$.

א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A.

ב. ידוע כי $A^{100}=aA^2+bA+cI$.
מצאו את a,b,c.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t)=(t-2)^2(t+1)^2(t-5)^8(t+3)^7$.

א. מה הדרגה של A?

ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש-$AP=PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A-5I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהי $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את העי"ע של A על ידי α ו- β.
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha=\beta$, והוכיחו ש- $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה $p(t)=t^4+2it^3+3t^2$.

הוכיחו שהמטריצה A^2-3A+I לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t)=t^3-2t+5$.
הוכיחו שלכל $b\in R^3$ יש למערכת $A\mathbf{x}=b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $tr(A)$.

ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A\neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t)=(t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\mathrm{tr}(A-2I)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו ש- λ ע"ע של A אם ורק אם $A-\lambda I$ לא הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n\geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C=A^2+A-2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D=A^2-2I$ הפיכה.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.

ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.

ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n=0$.

ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n, ותהי $B=A-I$.
מצאו את $|B|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים.
בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

28) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.
חשבו את $|A|$.

29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים.
א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו-B, מסדר n. הוכיחו או הפריכו:
א. ל-AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.
ב. נניח ש-v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו-B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.
ב. A ניתנת ללכסון.
ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

34) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $n=2$, $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, מצאו בסיס ל- W.

36) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u,Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.

ה. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha\geq 1$.

ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש-$A^2v=2v$.

40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

41) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכיחו כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A.
הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.
צריך להוכיח: $A^2 = I$.

45) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1.
הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ- 0.
ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n.
הוכיחו ש- 0 ע"ע של A, ושהוא הע"ע היחיד שלה.

46) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.
א. הוכיחו ש- A לכסינה.
ב. האם המטריצה $B = 4A^{111} - 10A + 20I$ הפיכה?

47) תהי $A_{n \times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2 + I = 0$.
הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':
א. A הפיכה.
ב. A לא ניתנת ללכסון.
ג. A לא סימטרית.
ד. n זוגי.
ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.
ידוע ש- λ ע"ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v.
א. הוכיחו כי $\lambda + c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A + cI$ עם וקטור עצמי v.
ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.
ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

49) נתונה מטריצה A על ידי $a_{ij}=\begin{cases}b & i=j\\ a & i\neq j\end{cases}$ כאשר $1\le i,j\le n$.
חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A.
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
הוכיחו:
א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.
ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A.

51) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו:
א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או 1-אז $A^2=I$.
ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I-A|>0$.

52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

53) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.
ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=1$ $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=2,\ a_2=4$ $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

1) שאלת הוכחה.

2) א. הערך העצמי הוא 260.

3) א.2. $|A|=4$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $D=diag(0,0,k)$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $p(\lambda)=(\lambda-10)^2(\lambda-4)$

ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.

ג. $D=diag(10,10,4)$ ד. כן. ה. לא.

9) $\mathrm{diag}(-1,-1,2,2,3)$

10) 0 ו- $tr(A)$.

11) שאלת הוכחה.

12) $diag(2,-5,-5),\ diag(-5,2,-5),\ diag(-5,-5,2)$

13) $rank(A)=0,\ rank(B)=1,\ rank(C)=2$

14) $0,1,-1$

15) שאלת הוכחה.

16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

17) שאלת הוכחה.

18) א. $|A|=2$ ב. $tr(A^2)=25$ ג. $tr(A)=6$

19) א. $1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ב. $a=0,\ b=1,\ c=0$

20) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$

21) א. 19 ב. 11

22) שאלת הוכחה.

23) $\mathrm{diag}(1,1,-3i,-8+9i)$

24) א. $|A|=-5$ ו- $tr(A)=0$ ב. $\mathrm{tr}(A-2I)=-3$

25) שאלת הוכחה.

26) ה. $|B|=(-1)^n$

27) $|A|=-384$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $m_M(x)=(x-2)^2(x-7)$

29) א. $p_M(x)=(x-5)^2(x-6)(x-7)$

30) שאלת הוכחה.

31) ב. $4+k$

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

36) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

37) ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

41) שאלת הוכחה.

42) שאלת הוכחה.

43) שאלת הוכחה.

44) שאלת הוכחה.

45) שאלת הוכחה.

46) שאלת הוכחה.

47) שאלת הוכחה.

48) שאלת הוכחה.

49) $|A|=(b-a)^{n-1}\left[a(n-1)+b\right]$

50) שאלת הוכחה.

51) שאלת הוכחה.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $a_n=2^{n+1}-3^n$

55) $a_n=\frac{1}{3}\left(3+(-1)^n+2^{n+1}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&0&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

2) נתון $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, כאשר $m\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m, המטריצה A לכסינה?
כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

5) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2&2k&k+1\\k-1&-1&2\\-k&0&-6\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?
עבור ערך ה-k שמצאת בסעיף א:

ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.

ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- **בלבד**.

ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

7) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל הערכים של a, עבורם A לכסינה.

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל-A.

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. עבור כל ערך של a, מצאו את הערכים העצמיים של A.

ב. עבור אילו ערכי a, המטריצה A לכסינה?

בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

9) נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$,

כאשר a,b,c מספרים ממשיים המקיימים $a-b+c=-1$.

א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

ב. נתון כי $a=b>1$.

הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a<0$.

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a,b, כך שהמטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ לכסינה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי a,b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש-A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש-A דומה לה.

12) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & a & 0 & b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

מצאו את כל הערכים של a ו-b, כך ש-A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

13) נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & a\\ 3 & -5 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, כאשר a פרמטר ממשי.

ידוע ש-$\lambda=-2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a?

ב. האם המטריצה לכסינה?

14) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\\ a & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

האם קיימים ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

15) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -a & 2a\\ a & -a & a\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $k \neq 4$ ב. $D = diag(4,k,k)$

2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k.

3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = diag\left(1,-a^2,a^2\right)$

4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = diag(m-1,m-1,m+2)$

5) א. $k = 3$ ב. ר"א = 1. ר"ג = 1. ג. $D = diag(2,-3,-5)$

6) א. $a = 3,\ b = -4$ או $a = 1,\ b = 0$ ב. המטריצה לא לכסינה.

7) א. A לכסינה עבור כל a. ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(a,1,2)$.

8) א. אם $a \neq 0,2,-1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2, 2a, a+2$.

אם $a = 0$, הע"ע הם 0 ו- 2.

אם $a = -1$, הע"ע הם 1 ו- -2.

אם $a = 2$, יש ע"ע אחד והוא 4.

ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2,-1$.

במקרה זה היא דומה למטריצה $D = diag\left(a^2,2a,a+2\right)$.

9) שאלת הוכחה.

10) אם $a = b = 0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b = 0$, אז A לכסינה.

11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:

כאשר $a \neq 0,1$ ואז דומה ל- $D = diag(1,0,a)$

או כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ ואז דומה ל- $D = diag(0,0,1)$

או כאשר $a = 1$ וגם $b = -\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = diag(0,1,1)$

12) A לכסינה אם ורק אם:

1. $b \neq 2,3$ ואז $D = diag(3,2,2,b)$.

או 2. $b = 2$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,2,2,2)$.

או 3. $b = 3$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,3,2,2)$.

13) א. $a = 3$ ב. כן.

14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a = 0$ ודומה ל- $D = diag(0,0,0,0)$.

מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = diag(a,-a,ai,-ai)$.

15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a = 0$. ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.
האם קיימים קבועים ממשיים a,b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A,B,C. הוכיחו כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $\mathrm{Nullity}(A)=\mathrm{Nullity}(B)$.

הערה – $\mathrm{Nullity}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הוכיחו או הפריכו:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim \operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $\left|A^TA\right|$

ה. ע"ע עבור A^TA.

ו. ע"ע עבור $\left(4A^2+10A+I\right)^{-1}$.

הערה – $\dim \operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. A ו-B שתי מטריצות הדומות למטריצה C.
הוכיחו כי A דומה ל-B.

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\-1&x&2\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

12) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי A ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

B דומה ל-A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A.

13) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של a ו-b המטריצות A ו-B דומות?

14) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP=B$.

15) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&2&\dots&0&0\\0&0&\dots&n-1&0\\0&0&\dots&0&n\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}n&0&\dots&0&0\\0&n-1&\dots&0&0\\0&0&\dots&2&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=B$.

16) תהיינה A,B מטריצות ב-$M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=k$, כאשר k מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו-B.

ב. הוכיחו ש-A ו-B דומות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I+A)=1$.

א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2 .

ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4-10A+9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $\left(A^4-10A+9I\right)\underline{x}=\underline{0}$.

18) נתון כי $A,B,C,D\in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש-A דומה ל-B ו-C דומה ל-D .
הוכיחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל-$B+D$.

ב. AC דומה ל-BD .

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: אם A דומה ל-B אז $A-kI$ דומה ל- $B-kI$.

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&0\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix}$$

21) נתון כי A ו-B מטריצות דומות.
הוכיחו של-A ו-B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4 .
נתון שהפולינום $q(t)=t^4-7t^2+10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A .
מצאו את הפולינום האופייני של A .

א. הוכיחו ש-A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $tr\left(A^2\right)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n(R)$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2.
ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) לא.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1,\frac{1}{15},\frac{1}{37}$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $x=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) $b=-2$ ו- $a=0$
14) כן, עבור $a=\pm 2$
15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.
16) א. $p_A(t)=p_B(t)=t^n-kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.
17) א. $p(x)=(x-1)(x-16)^2$. ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.
21) שאלת הוכחה.
22) א. $D=diag\left(0,0,0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ ב. $tr\left(A^2\right)=14$
23) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©