

אלגברה לינארית



תוכן העניינים

1	פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות
14	מטריצות
42	דטרמיננטות

אלגברה לינארית

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 1
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) 6
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות 9
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות 12

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll}
 2x + y = 4 & x - y = 0 & x - 4y = -7 & x + 10y = 11 \\
 x + y = 3 & 2x + y = 3 & x - y = -1 & 2x - 2y = 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{ד.} \\
 \text{ג.} \\
 \text{ב.} \\
 \text{א.}
 \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll}
 x = 3 & x - 4y + z = -7 & x + 10y = 11 & \\
 2x + y + z = 3 & x - y = -1 & 2x - 2 = 0 & \\
 x - z = 0 & x + y + z = 5 & x + y = 3 & \\
 2x + y = 4 & & & \\
 z + t = 8 & & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{ג.} \\
 \text{ב.} \\
 \text{א.} \\
 \text{ד.}
 \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll}
 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(3)} \\
 R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\
 R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3
 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l}
 \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \mathbb{C} ופעם מעל השדה \mathbb{R} .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה F :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 1+4i \\ iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 &= 2+i \\ (-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 &= 5-i \end{aligned}$$

א. $F = \mathbb{R}$

ב. $F = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א. $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$ $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \quad \text{ב} \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$ $F=\mathbb{R}$

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \quad (9) \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array}$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array}$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור a, b, c, d , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.
 ב. מצאו תנאי עבור b, c, d , כך שלכל a , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
 ח. מצאו לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של m שלוש המישורים:
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).
 ב. לא נפגשים באף נקודה.
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).
 ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

תשובות סופיות

(1) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = 1$.3 $k = -2$

(2) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = -2$.3 $k = 1$

(3) 1. $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$.2 $k = \frac{4}{7}$.3 $k = -1$

(4) 1. $k \neq 1, k \neq -0.4$.2 $k = 1, k = -0.4$

(5) 1. $k \neq \pm 1, k \neq -2$.2 $k = \pm 1, k = -2$

(6) 1. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$.3 $k = -1, k = -3, k = 2$

(7) 1. $k = -1$.2 $k \neq \pm 1$.3 $k = 1$

(8) 1. $k = 3$.2 $k = 3$.3 $k \neq 3$

(9) 1. $k \neq 1$.2 $k = 1$

(10) 1. $a \neq 2$.2 $a = 2, b \neq -3$.3 $a = 2, b = -3$

(11) 1. $a \neq -6$ או $b \neq 2.5$.2 $a = -6, b = 2.5$.3

(12) 1. $a = 2, b \neq 2$.2 $a \neq 2$ או $a = 2, b = 2$.3

(13) א. $ab + 2c \neq d$.ב. $b = 0, c = 1.5, d = 3$

(14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$.ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq 2, k \neq -1$.2. $k = -1$.3. $k = 2$.ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$.ו. $k = -2$.ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

(15) א. $m \neq 0, -2, 3$.ב. $m = -2, 3$.ג. $m = 0$.ד. לא.

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
 ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
 ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
 ב. החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
 ג. החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
 ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
 ה. החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ו. החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.
 עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).
 ב. ישר (מצאו ישר זה).
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- A' את הצורה המדורגת של A .
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.
 מצאו את A .

תשובות סופיות

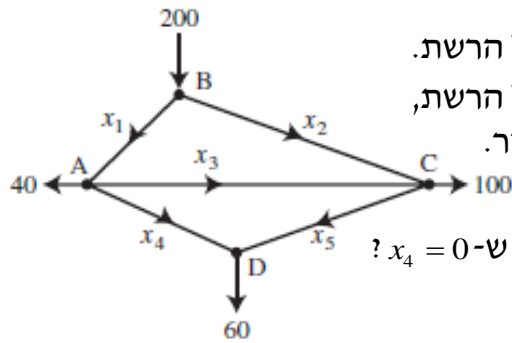
- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א. $m \neq 0, -2, 3$. הנקודה היא $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- ב. אם $m = 0$ נקבל ישר $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ אם $m = 2$ נקבל ישר $\underline{x} = t(2, -1, 1)$,
- אם $m = 3$ נקבל ישר $\underline{x} = t(3, -3, 1)$.
- ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



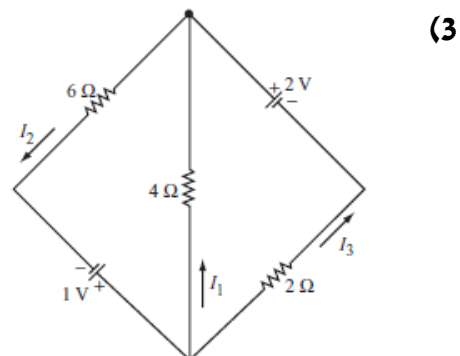
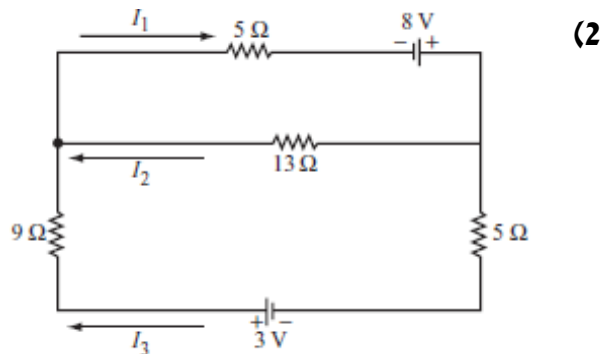
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1 , אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות בנוגע מערכת משוואות לינאריות.

תשובות סופיות

(1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. חופשי. x_3 . $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$. ג. 40.

(2) א. $I_1 = \frac{255}{317}$, $I_2 = \frac{97}{317}$, $I_3 = \frac{158}{317}$

(3) $I_1 = -\frac{5}{22}$, $I_2 = \frac{7}{22}$, $I_3 = \frac{6}{11}$

אלגברה לינארית

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

14	1. מטריצות
19	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
20	3. המטריצה ההופכית
27	4. דרגה של מטריצה
31	5. בחזרה למערכת משוואות לינארית
38	6. מטריצה אלמנטרית
40	7. פירוק LU
41	8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית

מטריצות

שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2 מצאו את x, y, z , אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4 $2tr(D^2 - 2E)$

5 א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6 $I_2 BC$

7 $tr(C^T C)$

8 $DABC$

- (9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
נתון כי $(A-I)(A+I) = 0$.
הוכיחו או הפריכו: $A = I$ או $A = -I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקיימות $A^2 = -4I$.

(11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

- (13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .
נתון כי $AA^T = 0$. הוכיחו כי $A = 0$.

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר ℓ .

16 א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17 תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

18 מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
 ז. 6×2 ח. לא

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n \binom{n}{n}I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

(1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

(3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A - B)^2$ סימטרית.

(4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:

1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

(5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.

הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ , חשבו את } Y \text{ , אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B.$$

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

$$(19) \text{ נתון כי } p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

$$(21) \text{ נתון כי } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$$

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
 ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
 ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
 ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
 ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
 ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ד. המכפלה AB לא הפיכה.
 ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
 ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
 ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים a, b, c, d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA = I - A^2$ וגם $B^2 = -AB$, אז $B = 0$.

ב. אם $A^2 = 2I$, אז $A + I$ ו- $A - I$ הפיכות.

(29) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $B^2A = -2B^3$ וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

(30) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA + 2I = B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

(31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n = 0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ ו- $I + A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם $e^A = I$ אז $A = 0$.

(32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B , מסדר n .
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
- ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ג.} \quad A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ג.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ג.} \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad (19)$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ג.} \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
- 28) שאלת הוכחה.
- 29) שאלת הוכחה.
- 30) שאלת הוכחה.
- 31) שאלת הוכחה.
- 32) ד

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$.A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

ב. $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$.

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$. הוכיחו:

א. אם $AB = I_m$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$.

ב. אם $BA = I_n$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

ג. אם $AB = I_m$ וגם $BA = I_n$ אז בהכרח $m = n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T = I_m$ וגם $A^T A = I_n$.

(11) בשדה F נתונים a_1, a_2, \dots, a_m איברים, שלא כולם אפס, ו- b_1, b_2, \dots, b_n איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, כאשר $m_{ij} = a_i b_j$.

12 תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$,

כאשר b_1, b_2, \dots, b_n מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$?

הוכיחו או הפריכו.

13 תהיינה A, B מטריצות מעל \mathbb{R} , מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

14 תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15 תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$ $k \neq 1, 4, 10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות $3x - 2y + 2z = 5$,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4), \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10 למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$, $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי $\text{rank}(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
 מצאו את הקבועים k, m .

13 נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
 הוכיחו ש- A מטריצה לא הפיכה.

14 נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
 בטאו קבוע זה בעזרת k .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
- ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל \mathbb{R} : $Ax = d$ ($d \neq 0$). נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $\text{rank}(A) = 2$. ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א. $x = au + bv + cw$
- ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג. $x = au + bv + w$
- ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
- בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
 - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת $A_{m \times n} \cdot x = b$. הוכיחו או הפריכו:
- א. אם u וגם λu ($\lambda \neq 1$) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם u ו- v וגם $\alpha u + \beta v$ ($\alpha, \beta \neq 0$) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים $(1, 2, \dots, n)$, $(n, \dots, 2, 1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1, \dots, n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

(19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- A הפיכה.
- למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
- לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

(20) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m < n$. הוכיחו או הפריכו:

- ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
- למערכת $(A^T A)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
- ייתכן מצב בו למערכת $(A^T A)x=0$ יש פתרון יחיד.
- ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x=0$ יש פתרון יחיד.

(21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n , כך שלכל מטריצה ריבועית $B \neq 0$ מסדר n , מתקיים $AB \neq 0$. הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$.

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
- ייתכן ש- $A^T A = I_n$ וגם $AA^T = I_m$.
- אם $m \neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

(23) תהא $A \in M_{4 \times 4}(R)$ ויהי $b \in R^4$.

ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.

- נגדיר $w = \alpha u + \beta v$. הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha + \beta = 1$.
- נניח בנוסף כי $w = -u + 2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2 x = b$. הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

ג. מצאו $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C \neq D$ ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad (2)$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad (4)$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad (6)$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(11) אם $k \neq 2$ או $k \neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k = 2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k = -1$, אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
 נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
 ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. A^2 מ- B^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתרו בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \bullet \quad (2)$$

$$\bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

$$(1) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

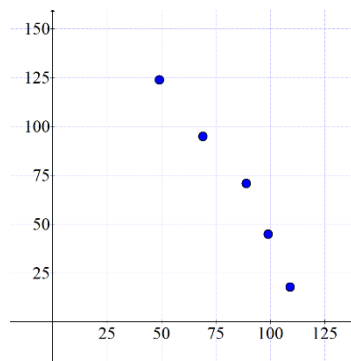
$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

- (1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- (2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

- (1) $f(x) = 0.8x + 2$
- (2) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. 119.2 יחידות.
- ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
- ד. 14.41

אלגברה לינארית

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

42	1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג
47	2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n
52	3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות
54	4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות
55	5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה
60	6. שימושי הדטרמיננטה

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכיחו כי:}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשבו:}$$

(19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- k ($1 \leq k \leq n$).
- תהי C מטריצה הזוהה למטריצות A ו- B אך נבדלת מהן בשורה ה- k , שם היא שווה לסכום השורה ה- k של A והשורה ה- k של B .
- הוכיחו כי $|A| + |B| = |C|$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} \quad \text{ב. חשבו:}$$

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $(k-1)^4(k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים a_0, \dots, a_{n-1} , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

(3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij} = |i - j|$

(5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$.

(9) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של k המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את $D_n = |A_{n \times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n = |A_{n \times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3, b=1, c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

(13) נתונה מטריצה $A_{n \times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה
הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה B .

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 2$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
 חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B \text{ . הוכיחו: } |A|=|B|$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2 \text{ . חשבו את } |B|$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} B^2-2A^{-1}=0, A+3B=0 \text{ . חשבו את } |A|, |B|$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2 \text{ , ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

תשובות סופיות

(1) א. 4 ב. 2^{13}

(2) א. -8 ב. -2^{11}

(3) שאלת הוכחה.

(4) $\frac{81}{32}$

(5) $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9) 4^n

(10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \quad (1)$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות: $x+y+kz+t+r=1$.

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$,x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$.x=y=z=t=r$$

(5) יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $(A^t A)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4$$

$$\text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון:}$$

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $(A^{-1})_{1,5}$.

(5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל- ± 1 , כאשר כל איברי

A ו- A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,

אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.

הוכיחו ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- A הפיכה.

הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

(8) נתון כי A, B הפיכות ו- C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
- ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
- ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
- ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. $|AB| = |BA|$
- ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3 \times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:

- א. $4^3 |A|^3$
- ב. $4^3 |B|^3$
- ג. $4 |B|^3$
- ד. $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $|A| = 4$
- ב. A הפיכה.
- ג. $adj(A) = 0$
- ד. $|A| = 0$

- 14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז:
- בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
 - בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$.
 - ייתכן ש $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
 - אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 2$, כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה A .

ג. $\text{adj}(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n = 4$, אז $|\text{Adj}(A)| > 214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 4$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n - 2$, אז בהכרח $\text{adj}(A) = 0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $\text{adj}(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $\text{adj}(A) = 0$, אז בהכרח $A = 0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4, אז $\text{adj}B$ מתקבלת מ- $\text{adj}A$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$.

חשבו $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n . הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

ג. $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

0.5 ב. א. 240 (4)

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם $k = 0$.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) ד

(13) שאלת הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) שאלת הוכחה.

(17) ד

(18) $\frac{-5}{2^2}$

(19) שאלת הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- 1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה: $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$.1
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$.
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$.
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2