

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)



## תוכן העניינים

1. שדות..... 1
2. מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות..... 8
3. ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון..... 25
4. מרחבי מכפלה פנימית..... 50
5. קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט..... 62

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)

פרק 1 - שדות

תוכן העניינים

1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות..... 1
2. שדות..... 5

## חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $n$  ו- $k$  טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה:  $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את:

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $1) A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $2) A \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $3) (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$   
 $4) (B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$ ,  $5) (B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

## שדות

### שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ . בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) נתונה הקבוצה  $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

הוכיחו שהקבוצה  $C$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה. באיזה שדה מפורסם מדובר?

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

(5) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

א. הוכיחו כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

ג. הוכיחו כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

(6) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.

הוכיחו כי:

א.  $(-1) \cdot a = -a$

ב.  $(-a)b = a(-b) = -ab$

(7) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.

כלומר, הוכיחו כי  $ab = cb \Rightarrow a = c$ , לכל  $a, b, c$ , בשדה ( $b \neq 0$ ).

(8) הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה  $a, b, c, 0 \neq$ ,

קיים בשדה איבר יחיד  $x$ , כך ש- $ax + b = c$ .

(9) נתון  $F$  שדה, ויהיו  $x, y \in F$ , כך ש- $xy \neq 0, 1$ .

הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי  $(x - xyx)^{-1} = x^{-1} + (y^{-1} - x)^{-1}$ , וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

(10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על  $R^2$ .

א.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

ב.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

האם  $(R^2, +, \cdot)$  שדה?

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה  $A = \{f : R \rightarrow R \mid \forall x, f(x) \neq 0\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולות חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

האם הקבוצה  $A$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה  $B = \{f : R \rightarrow R\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולות חיבור וכפל כמו בסעיף א'.

האם הקבוצה  $B$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

(12) יהי  $F$  שדה בעל מספר סופי של איברים.

הראו שלכל איבר  $a \neq 0$  ב- $F$ , קיים  $k$  טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$ .

(13) נתון השדה  $Z_7$ .

א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.

ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.

ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

(14) נתונה הקבוצה  $Z_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ , מספר ראשוני.

כאשר  $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p}$ , ו- $\bar{a} = \{x \in Z \mid a \equiv x \pmod{p}\}$ .

לכל  $\bar{a}, \bar{b}$  בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

הוכיחו ש- $(Z_p, \oplus, \otimes)$  מהווה שדה.

בקיזור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו  $p$ , כאשר  $p$  ראשוני, מהווה שדה.

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) א. שאלת הוכחה.

ב. האיבר הנגדי לאיבר  $\bar{3}$  הוא  $\bar{4}$ , והאיבר הנגדי לאיבר  $\bar{5}$  הוא  $\bar{2}$ .

ג. האיבר ההופכי לאיבר  $\bar{4}$  הוא  $\bar{2}$ , והאיבר ההופכי לאיבר  $\bar{5}$  הוא  $\bar{3}$ .

(14) שאלת הוכחה.

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)

פרק 2 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות ..... 8
2. הצמוד המרוכב ..... 10
3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית ..... 13
4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב ..... 15
5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים ..... 17
6. חילוק פולינומים ..... 20
7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה ..... 21
8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית ..... 22

## מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את המשוואות ומצאו את  $z$  :

$$(1) \quad z^2 + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

בשאלות 4-7 חשבו :

$$(4) \quad (i\sqrt{2})^6 \quad (5) \quad (i^5 - i^{13})^2$$

$$(6) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (7) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(8) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

ידוע כי  $z_1 + z_2$  ממשי וכי  $z_1 - z_2$  מדומה.

א. מצאו קשר בין  $a_1$  ל-  $a_2$  ובין  $b_1$  ל-  $b_2$ .

ב. הראו כי המכפלה  $z_1 \cdot z_2$  היא ממשית.

(9) יהיו  $z_1, z_2, \dots, z_n$  מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ב. הוכיחו כי  $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$

ג. הוכיחו כי  $|z_1^n| = |z_1|^n$

(10) יהי  $z$  מספר מרוכב.

הוכיחו: אם  $z^{11} = 1$  אז  $z + \frac{1}{z}$  מספר ממשי.

(11) יהי  $z$  מספר מרוכב.

הוכיחו: אם  $|z+1| = |z-1|$  אז  $iz$  מספר ממשי.

**תשובות סופיות**

- (1)  $\pm 3i$
- (2)  $2 \pm i$
- (3)  $3 \pm 2i$
- (4)  $-8$
- (5)  $0$
- (6)  $2 - 9i$
- (7)  $-11 + 10i$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

## הצמוד המרוכב

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו (כתבו את התוצאה בצורה  $z = x + yi$ ):

$$\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1+i}{1-3i} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2+i} \quad (1)$$

פתרו את המשוואות בשאלות 4-6 ומצאו את המספר המרוכב  $z$ :

$$(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0 \quad (6)$$

$$\bar{z}z - 5\bar{z} = 10i \quad (5)$$

$$2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (4)$$

7 פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר  $z$  ו- $w$  משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

8 חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א.  $\sqrt{5-12i}$

ב.  $\sqrt{8+6i}$

9 פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א.  $(1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב.  $(-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$

בשאלות 10-11 פתרו את המשוואות:

$$iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0 \quad (10)$$

$$z^2 - i\bar{z} + 6 = 0 \quad (11)$$

12 הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה  $\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{z}{\bar{z}^2}$  כאשר  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

13) נתון מספר מרוכב  $z \neq 0$  המקיים:  $|z-i|=1$ . הוכח:

א.  $|z|^2 = 2 \operatorname{Im}(z)$

ב.  $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14) המספר  $\frac{3+4i}{a-i}$  הוא ממשי טהור. מצאו את  $a$ .

15) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

הראו כי כדי שתוצאת החילוק  $\frac{z_1}{z_2}$  תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

## תשובות סופיות

(1)  $2 - i$

(2)  $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

(3)  $-\frac{1}{2} + i$

(4)  $z = -1 + 2i$

(5)  $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$

(6)  $z = i, z = -1$

(7)  $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(8) א.  $z = \pm(3 - 2i)$  ב.  $z = \pm(3 + i)$

(9) א.  $z_{1,2} = i, 1$  ב.  $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(10)  $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(11)  $z_1 - 3i, z_2 = 2i$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14)  $a = -\frac{3}{4}$

(15) שאלת הוכחה.

## הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

### שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית:

- (1)  $1 + \sqrt{3}i$     (2)  $-1 - i$     (3)  $-3 - \sqrt{3}i$     (4)  $1 - i$   
 (5)  $1 + i$     (6)  $\sqrt{3} - i$     (7)  $\sqrt{3}i$     (8)  $-8$

(9) נתון המספר המרוכב  $z = Rcis\theta$ .

הביעו באמצעות  $R$  ו- $\theta$  את המספרים:

- א.  $\bar{z}$   
 ב.  $\frac{1}{z}$   
 ג.  $-z$   
 ד.  $-\frac{1}{z}$   
 ה.  $iz$   
 ו.  $z \cdot \bar{z}$

(10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- א.  $z + \bar{z}$   
 ב.  $z \cdot \bar{z}$   
 ג.  $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- א.  $z^2 - \bar{z}^2$   
 ב.  $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(12) הוכיחו:

- א.  $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$   
 ב.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

## תשובות סופיות

$$2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad (2)$$

$$\sqrt{12} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (5)$$

$$2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad (6)$$

$$\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad (7)$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (8)$$

$$R \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ב.} \quad R \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$R^2 \quad \text{ו.} \quad R \operatorname{cis}(90^\circ + \theta) \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ד.}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

## נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

### שאלות

בשאלות 1-6 חשבו:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (3) \qquad (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad (2) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \qquad \sqrt[5]{1} \quad (5) \qquad \sqrt[6]{-8} \quad (4)$$

(7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי:  $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{32}i \quad (1)$$

$$-2^9 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$8^{\frac{1}{6}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$1^{\frac{1}{5}} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$8^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

## תרגול נוסף במספרים מרוכבים

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ .  
 ב. הראו כי אם  $z$  הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי:  $z^6 = 1$ .

(2) נתונה המשוואה  $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ .

- א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.  
 ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(3) פתרו את המשוואה  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ .

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה  $z^3 = i$ .  
 ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא  $i$ .  
 ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. פתרו את המשוואה  $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$ .  
 ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.  
 הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה  $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ , כאשר  $q$  מנת הסדרה.

(6) נתון  $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

- א. מצאו את פתרונות המשוואה  $z^3 = w^3$ .  
 ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא  $w^3$ .

(7) נתונה המשוואה  $(z-1)^3 = 1$ .  
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

(8) נתונה המשוואה  $z^3 = -\sqrt{3} + i$ .

א. מצאו את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ .

ב. מצאו את הסכום  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$ .

ג. הראו כי הסכום  $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$  הוא מספר מדומה טהור.

(9) נתונה המשוואה  $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$ , כאשר  $z$  הוא מספר מרוכב,  
 $s$  ו- $t$  הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- $z_1, z_2$  הם פתרונות המשוואה.

א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות  $s$  ו- $t$ .

ב. נתון  $z_1 \cdot z_2 = -18i$ . מצאו את הפרמטרים  $s$  ו- $t$ .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה  $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$ .

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,  
שכל איבריה שונים מאפס.

הפרש סדרה זו הוא  $1 + \frac{1}{16}i$ .

האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה:  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$ ,

כאשר  $d$  נקרא הפרש הסדרה.

## תשובות סופיות

- (1) א.  $z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^\circ, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ$ . ב. שאלת הוכחה.
- (2) א.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$ . ב. שאלת הוכחה.
- (3)  $z = 0, z = 1, z = -1$
- (4) א.  $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$ . ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (5) א.  $z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ]$   $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . ב.  $q = cis72^\circ$ .
- (6) א.  $z_1 = cis45^\circ, z_2 = cis165^\circ, z_3 = cis285^\circ$ . ב. שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א.  $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$ . ב. 6. ג. שאלת הוכחה.
- (9) א.  $z_1 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ . ב.  $t = 9, s = \pm 1$ .
- (10) א.  $z_1 = 0, z_2 = -0.5 + 0.5i, z_3 = -8.5$ . ב.  $a_1 = -8.5$ .

## חילוק פולינומים

### שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים :

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

## פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

## שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

### שאלות

בשאלות 1-4 נתון  $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$ ,  $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$   
מצאו:

(1) א.  $4u + v$       ב.  $2i \cdot u - v$       (2)  $u \cdot v$

(3) א.  $u \cdot u$       ב.  $|u|$

(4)  $|v|$

בשאלות 5-6 פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i$$

מעל השדה  $\mathbf{F}$ :  $iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i$  , כאשר:

$$(-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i$$

(5)  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

(6)  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

בשאלות 7-8 בדקו האם  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$   
הוא תת-מרחב של  $C^3$ :

(7) מעל השדה הממשי  $\mathbb{R}$ .

(8) מעל שדה המרוכבים  $\mathbb{C}$ .

בשאלות 9-10 בדקו האם הווקטורים  $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$   
תלויים ליניארית ב- $C^3$ :

(9) מעל  $\mathbb{C}$ .

(10) מעל  $\mathbb{R}$ .

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 11-13 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(13) \text{ נתונה מטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \text{ב. } (-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$$

$$(2) \quad \text{א. } 20 + 35i \quad \text{ב. } 66$$

$$(3) \quad \sqrt{66}$$

$$(4) \quad \sqrt{92}$$

$$(5) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(6) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t)$$

$$(7) \quad \text{כן}$$

$$(8) \quad \text{לא}$$

$$(9) \quad \text{תלויים.}$$

$$(10) \quad \text{בלתי תלויים.}$$

$$(11) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} : x = 1 \pm 2i, \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \text{ערכים עצמיים : } x = 3, \text{ וקטורים עצמיים : } \mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(13) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = \langle 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = \langle 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2 \rangle$$

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)

פרק 3 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

- 1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב ..... 25
- 2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה..... 29
- 3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים ..... 41
- 4. דמיון מטריצות ..... 45

## לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

### שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצאו מטריצה אופיינית.
- מצאו פולינום אופייני.
- מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצאו וקטורים עצמיים.
- קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו  $A^{2009}$ .
- מצאו את הפולינום המינימלי.
- קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , כאשר  $D$  מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי  $A$  מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

מצאו את המטריצה  $A$ .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ ,

בעלת וקטורים עצמיים  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

## תשובות סופיות

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג. } x=0, x=1 \quad (1)$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=0$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ו.  $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – לא ניתנת.

ט.  $m(x) = x(x-1)^2$   $\deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.  
י. לא הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג. } x=1, x=2 \quad (2)$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=2$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ו.  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – לא ניתנת.

ט.  $m(x) = (x-1)^2(x-2)$   $\deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.  
י. הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג. } x=0, x=1, x=2 \quad (3)$$

$x=0$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=1$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1.

ד.  $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ו.  $\langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle$  ניתנת ללכסון. ז.  $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח.  $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$  ט.  $m(x) = x(x-1)(x-2)$  י. לא הפיכה.

$$p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{ב.} \quad \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

1.  $x=-4$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=6$  – ריבוב אלגברי: 1.

$$\text{ד. } V_{x=6} = \text{sp}\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=2} = \text{sp}\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=-4} = \text{sp}\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ז.} \quad \text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ח.}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

(5) אין פתרונות מעל  $\mathbb{R}$ , ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, \quad \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, \quad \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(6) ערכים עצמיים:  $x=3$ , וקטורים עצמיים:  $\mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle$ . לא ניתנת ללכסון.

(7) ערכים עצמיים:  $x_1=2, x_{2,3}=3$

$$\text{וקטורים עצמיים: } V_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), \quad v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0)$$

$$(8) \quad \mathbf{v}_{x=-2} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad \mathbf{v}_{x=-1} = (-1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_{x=4} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (1, -2, 1), \quad x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (-1, 2), \quad x=-1, x=3$$

$$(11) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(13) אין כזו מטריצה.

## לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

### שאלות

(1) נתונה מטריצה ריבועית  $A$ .

הוכיחו או הפריכו:

א.  $0$  ערך עצמי של המטריצה  $A$ , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם  $A$  הפיכה ו- $\lambda$  ע"ע של  $A$ , אז  $\frac{1}{\lambda}$  הוא ערך עצמי של  $A^{-1}$ .

ג. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של  $A$  הוא  $\lambda$ , אז  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ .

ו. אם  $A^{-1} = A^T$  ואם  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ , אז  $\lambda = \pm 1$ .

ז. אם  $A^2 = A$  ואם  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ , אז  $\lambda = 0$  או  $\lambda = 1$ .

(2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה  $A$  יש וקטור עצמי  $v$  השייך לערך העצמי 4.

$$B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$$

הוכיחו ש- $v$  וקטור עצמי גם של המטריצה  $B$  וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- $v$  וקטור עצמי של מטריצה  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda$ . יהי  $p(x)$  פולינום.

הוכיחו ש- $v$  ו"ע של המטריצה  $p(A)$  השייך לערך עצמי  $p(\lambda)$ .

(3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$$

2. נתון כי  $\text{tr}(A) = 4$ . חשבו את  $|A|$ , אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מסדר  $n$ .

נניח כי  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  הפולינום האופייני של  $A$ .

הוכיחו כי  $a_0 = (-1)^n |A|$ ,  $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$ .

(4) נתונה מטריצה  $A$  מסדר  $n$ .  
הוכיחו:

א.  $\lambda$  עי"ע של  $A \Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I) < n$ .

ב. הריבוי הגיאומטרי של עי"ע  $\lambda$  שווה ל- $n - \text{rank}(A - \lambda I)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) = k < n$  אז 0 עי"ע של המטריצה  $A$  מריבוי גיאומטרי  $n - k$ .  
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

(5) נתונה מטריצה ריבועית  $B$  מסדר 4. ידוע כי  $\text{rank}(B) = 1$ .  
הוכיחו:

א. 0 עי"ע של המטריצה  $B$ .

ב. הריבוי הגיאומטרי של העי"ע 0 הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של העי"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה  $B$  לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה  $B$  עי"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$ .

(6) נתונה מטריצה  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי  $\lambda = k \neq 0$ .

הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- $A$ .

(7) תהינה  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר  $n$  המקיימות  $AB = BA$ .  
נניח כי  $\text{rank} A = n - 1$  ו- $v$  וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.  
הוכיחו כי  $v$  הוא וקטור עצמי של המטריצה  $B$ .

(8) תהי  $A$  מטריצה מסדר 3 המקיימת  $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$ .  
א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה  $A$ .  
ב. מצאו את הערכים העצמיים של  $A$  ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל עי"ע.  
ג. קבעו האם  $A$  ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- $A$ .  
ד. קבעו האם  $A$  הפיכה?  
ה. הוכיחו כי  $(A - 10I)^2(A - 4I) = 0$ . האם ייתכן ש- $A = 4I$  או  $A = 10I$ ?

(9) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $5 \times 5$ , כך ש- $\det A = 12$  וגם  $\rho(I + A) = \rho(2I - A) = 3$ .  
הוכיחו ש- $A$  לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

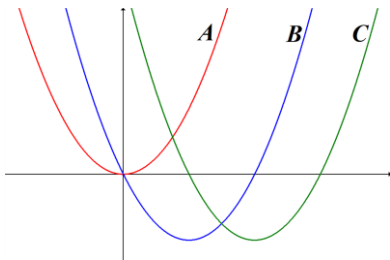
**10** נתונה מטריצה  $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  (מטריצה עם שורה אחת). מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה  $A^T A$  (הניחו  $n > 1$ ).

**11** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 3$ , כך ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$  , וכן  $\rho(2I + A) < \rho(4I - A)$ .

הוכיחו ש- $A$  לכסינה.

**12** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 3$  המקיימת  $\rho(2I - A) > \rho(5I + A)$ .

ידוע גם ש- $\text{span}\{(3, 1, -1)\}$  הוא מרחב הפתרונות של המערכת  $A\underline{x} = 2\underline{x}$ . הוכיחו ש- $A$  לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- $A$ .



**13** באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות  $A, B, C$  מסדר 2. ידוע שהמטריצה  $A$  ניתנת ללכסון. מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות  $B$  ו- $C$  ניתנות ללכסון.

**14** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 3.

נתון כי  $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$  וכי  $\lambda = 1$  ערך עצמי של המטריצה. הוכיחו כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

**15** יהיו  $A, B \in M_2[\mathbb{R}]$ .

ידוע כי  $A = AB - BA$ .

הוכיחו כי  $A^2 = 0$ .

**16** תהי  $A$  מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $\text{tr}(A) \neq -1$ .

א. הוכיחו כי  $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{1 + \text{tr}(A)} A$ .

ב. בעזרת סעיף א מצאו את  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ .

**17** נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מסדר  $n$ .  
 ויהיו  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  הערכים העצמיים של המטריצה.  
 הוכיחו:

א.  $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

ב.  $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

הערה:

הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל  $\mathbb{C}$ . בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

**18** נתונה מטריצה ממשית  $A$  מסדר 2.

- א. אם  $tr(A) = 3$ ,  $tr(A^2) = 5$ . מצאו את  $|A|$ .  
 ב. אם וקטורי העמודה של  $A$  מקבילים ואם  $tr(A) = 5$  מצאו את  $tr(A^2)$ .  
 ג. אם  $|A| = 5$  ואם ל- $A$  ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו  $tr(A)$ .

**19** תהי  $A$  מטריצה מסדר 3 שמקיימת  $|A| = 1$ .

- א. אם  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  הוא ערך עצמי של  $A$  מצאו את כל הע"ע של  $A$ .  
 ב. ידוע כי  $A^{100} = aA^2 + bA + cI$ . מצאו את  $a, b, c$ .

**20** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הפולינום האופייני של מטריצה  $A$  הוא  $p_A(x) = x^2 + bx + c$ . מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה  $4A$ .  
 ב. מטריצה  $A \in M_2[\mathbb{R}]$  מקיימת  $|A| < 0$ . הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

**21** תהי  $A$  מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני  $p(t) = (t-2)^2 (t+1)^2 (t-5)^8 (t+3)^7$ .

- א. מה הדרגה של  $A$ ?  
 ב. ידוע שקיימת מטריצה  $P$  הפיכה כך ש- $AP = PD$ , כאשר  $D$  אלכסונית. חשבו את הדרגה של  $A - 5I$ .

(22) תהי  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  מטריצה ממשית.

א. נסמן את העי"ע של  $A$  על ידי  $\alpha$  ו- $\beta$ . הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha = \beta$ , והוכיחו ש- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ .

(23) תהי  $A$  מטריצה לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ , שהפולינום האופייני שלה

$$p(t) = t^4 + 2it^3 + 3t^2$$

הוכיחו שהמטריצה  $A^2 - 3A + I$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ , ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(24) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי  $A$  מטריצה ריבועית מעל  $\mathbb{R}$ , בעלת פולינום אופייני  $p(t) = t^3 - 2t + 5$ . הוכיחו שלכל  $b \in \mathbb{R}^3$  יש למערכת  $Ax = b$  פתרון יחיד ומצאו את  $|A|$  ו- $\text{tr}(A)$ .
- ב. תהי  $A$  מטריצה ממשית, כאשר  $A \neq I$ , ובעלת פולינום אופייני  $p(t) = (t-1)^3$ . הוכיחו ש- $A$  הפיכה, וחשבו את  $\text{tr}(A - 2I)$ .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו ש- $\lambda$  עי"ע של  $A$  אם ורק אם  $A - \lambda I$  לא הפיכה.
- ב. תהי  $A$  מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני  $p(t) = (t-1)(t+2)^{n-1}$ , כאשר  $n \geq 2$ . הוכיחו שהמטריצה  $C = A^2 + A - 2I$  לא הפיכה, ושהמטריצה  $D = A^2 - 2I$  הפיכה.

(26) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
- ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.
- ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.
- ד. הוכיחו שאם  $A$  מטריצה נילפוטנטית מסדר  $n$  אז  $A^n = 0$ .
- ה. תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית מסדר  $n$ , ותהי  $B = A - I$ . מצאו את  $|B|$ .

**(27)** צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים. בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

**(28)** תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$ .

חשבו את  $|A|$ .

**(29)** נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

**(30)** נתונות שתי מטריצות ריבועיות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ . הוכיחו או הפריכו:

א. ל- $AB$  ו- $BA$  אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- $v$  וקטור עצמי, שונה מאפס, של  $A$  ו- $B$ ,

אז  $v$  גם הוא וקטור עצמי של המטריצה  $4A+10B$ .

**(31)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר  $k$ , המטריצה  $A+kI$  ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה  $A$ , מצאו את הערך העצמי

של המטריצה  $A+kI$ .

**(32)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $3 \times 3$ . ידוע כי  $v_1, v_2$  הם ו"ע של  $A$ , שונים מאפס,

המתאימים לע"ע  $\lambda = 1$ , וכי  $v_3$  הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע  $\lambda = -1$ .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים  $v_1, v_2$  בת"ל, אז  $A^{2018} = I$ .

ב.  $A$  ניתנת ללכסון.

ג.  $v_3$  הוא צרוף לינארי של הווקטורים  $v_1, v_2$ .

**(33)** הוכיחו או הפריכו :

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.  
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.  
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.  
 ד. קיימת מטריצה  $A$  אשר הווקטור  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$  הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

**(34)** נתונות שתי מטריצות מסדר  $n$  : מטריצה  $B$  הניתנת ללכסון ומטריצה  $Q$  הפיכה. הוכיחו או הפריכו :

- א. המטריצה  $Q^{-1}BQ$  אלכסונית.  
 ב. המטריצה  $Q^{-1}BQ$  ניתנת ללכסון.  
**(35)** נסמן ב- $W$  את קבוצת כל המטריצות מסדר  $n$ , שעבורן  $v$  הוא ו"ע.  
 א. הוכיחו כי  $W$  תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר  $n$ .  
 ב. עבור  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $n = 2$ , מצאו בסיס ל- $W$ .

**(36)** תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ , כאשר  $a$  קבוע ממשי.

- א. עבור  $a = 3$ , תנו דוגמה לזוג  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  שאינו וקטור עצמי של  $A$ .  
 ב. עבור איזה ערך של  $a$ , הזוג  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי של  $A$ ?  
 ג. יהי  $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$  וקטור שאינו ו"ע של  $A$ .  
 הוכיחו כי הקבוצה  $\{u, Au\}$ , מהווה בסיס של  $\mathbb{R}^2$ .

**(37)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית, אם  $A^2 = A$ .  
 תהי  $A$  מטריצה אידמפוטנטית.

- א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של  $A$  הם 0 או 1 בלבד.  
 ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של  $A$ .  
 ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של  $A$  מתפרק לגורמים לינאריים.  
 ד. הוכיחו כי  $A$  ניתנת ללכסון.  
 ה. הוכיחו כי  $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$  (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

- (38)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:
- קיים תת מרחב  $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$  של  $R^5$ , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$ .
  - אם  $u_1, u_2$  ו"ע של  $A$ , אז גם הווקטור  $u_1 + u_2$  ו"ע של  $A$ .
  - אם המטריצה  $B$  שקולת שורות למטריצה  $A$ , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
  - אם  $A$  לכסינה מעל  $R$ , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
  - אם כל הערכים העצמיים של  $A$  שונים זה מזה, אז המטריצה  $A$  לכסינה מעל  $R$ .

- (39)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

- $\text{rank}(A) = 4$ .
- $A$  לכסינה.
- $\text{tr}(A) > 10$ .
- $|A| \leq 127$ .
- קיים וקטור עצמי  $v$  של  $A$ , כך ש- $A^2 v = 2v$ .

- (40)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית ויהי  $n$  מספר טבעי. הוכיחו או הפריכו:

- אם  $v$  וקטור עצמי של  $A$ , אז  $v$  וקטור עצמי גם של  $A^n$ .
- אם  $v$  וקטור עצמי של  $A^n$ , אז  $v$  וקטור עצמי גם של  $A$ .
- אם  $A$  לכסינה, אז  $A^n$  לכסינה.
- אם  $A^n$  לכסינה, אז  $A$  לכסינה.

- (41)** נתונה מטריצה  $A$ , שהפולינום המינימלי שלה הוא  $m(x) = (x-1)^2$ . הוכיחו כי המטריצה  $A^2 + 4A + 3I$  הפיכה.

- (42)** הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

- (43)** נתונה מטריצה סימטרית ממשית  $A$ . הוכיחו שווקטורים עצמיים של  $A$  המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

- (44) תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$ .  
 נתון: (1)  $A$  ניתנת ללכסון. (2) קיים  $k$  טבעי כך ש- $A^k = I$ .  
 צריך להוכיח:  $A^2 = I$ .

- (45) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$ , לכסינה ובעלת דרגה 1. הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ-0.  
 ב. תהי  $A$  מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר  $n$ . הוכיחו ש-0 ע"ע של  $A$ , ושהוא הע"ע היחיד שלה.

(46) נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

- א. הוכיחו ש- $A$  לכסינה.  
 ב. האם המטריצה  $B = 4A^{11} - 10A + 20I$  הפיכה?

- (47) תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת  $A^2 + I = 0$ . הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':  
 א. הפיכה  $A$ .  
 ב. לא ניתנת לליכסון  $A$ .  
 ג. לא סימטרית  $A$ .  
 ד.  $n$  זוגי.  
 ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה  $A$  מרוכבת?

- (48) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n$  ויהי  $c$  קבוע. ידוע ש- $\lambda$  ע"ע של המטריצה  $A$  עם וקטור עצמי  $v$ .  
 א. הוכיחו כי  $\lambda + c$  הוא ערך עצמי של המטריצה  $A + cI$  עם וקטור עצמי  $v$ .  
 ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע  $\lambda$  של המטריצה  $A$  שווה לריבוי האלגברי של הע"ע  $\lambda + c$  של המטריצה  $A + cI$ .  
 ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע  $\lambda$  של המטריצה  $A$  שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע  $\lambda + c$  של המטריצה  $A + cI$ .

$$(49) \text{ נתונה מטריצה } A \text{ על ידי } a_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ a & i \neq j \end{cases} \text{ כאשר } 1 \leq i, j \leq n$$

חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה  $A$ .  
 קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.  
 בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את  $|A|$ .  
 הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

(50) תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$ .  
 הוכיחו:

- א. אם  $n$  אי-זוגי אז למטריצה לפחות עי"ע ממשי אחד.  
 ב. אם  $\lambda$  עי"ע של  $A$  אז גם הצמוד המרוכב שלו  $\bar{\lambda}$  הוא עי"ע של  $A$ .

(51) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n$ .  
 הוכיחו:

- א. אם  $A$  ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז  $A^2 = I$ .  
 ב. אם כל הערכים העצמיים של  $A$  ממשיים וקטנים מ-1 אז  $|I - A| > 0$ .

(52) תהי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.  
 הוכיחו שכל ערך עצמי של  $A$  הוא מספר מדומה.  
 תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה  $bi$  כאשר  $b$  ממשי.

(53) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.  
 צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.  
 תהי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.  
 ב. הוכיחו שהמטריצה  $A$  נורמלית.  
 ג. הוכיחו שהדרגה של  $A$  היא זוגית.  
 הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

(54) סדרה  $(a_n)$  מוגדרת רקורסיבית על ידי:  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ .  
 מצאו ביטוי סגור עבור  $a_n$  (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

(55) סדרה  $(a_n)$  מוגדרת רקורסיבית על ידי:  $a_0 = a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ .  
 מצאו ביטוי סגור עבור  $a_n$  (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

## תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il).

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. הערך העצמי הוא 260.
- (3) א.2.  $|A| = 4$
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6)  $D = \text{diag}(0, 0, k)$
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א.  $p(\lambda) = (\lambda - 10)^2(\lambda - 4)$
- ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.
- ג.  $D = \text{diag}(10, 10, 4)$  ד. כן. ה. לא.
- (9)  $\text{diag}(-1, -1, 2, 2, 3)$
- (10)  $\text{tr}(A) = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12)  $\text{diag}(2, -5, -5), \text{diag}(-5, 2, -5), \text{diag}(-5, -5, 2)$
- (13)  $\text{rank}(A) = 0, \text{rank}(B) = 1, \text{rank}(C) = 2$
- (14) 0, 1, -1
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) ב.  $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.  $|A| = 2$  ב.  $\text{tr}(A^2) = 25$  ג.  $\text{tr}(A) = 6$
- (19) א.  $1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  ב.  $a = 0, b = 1, c = 0$
- (20) א.  $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$
- (21) א. 19 ב. 11
- (22) שאלת הוכחה.
- (23)  $\text{diag}(1, 1, -3i, -8 + 9i)$
- (24) א.  $|A| = -5$  ב.  $\text{tr}(A - 2I) = -3$
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) ה.  $|B| = (-1)^n$
- (27)  $|A| = -384$

$$m_M(x) = (x-2)^2(x-7) \quad (28)$$

$$p_M(x) = (x-5)^2(x-6)(x-7) \quad \text{א.} \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

$$(31) \text{ ב. } 4+k$$

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

$$(35) \text{ ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(36) \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(37) \text{ ב. } p(x) = x, p(x) = x-1, p(x) = x(x-1)$$

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

(41) שאלת הוכחה.

(42) שאלת הוכחה.

(43) שאלת הוכחה.

(44) שאלת הוכחה.

(45) שאלת הוכחה.

(46) שאלת הוכחה.

(47) שאלת הוכחה.

(48) שאלת הוכחה.

$$(49) |A| = (b-a)^{n-1} [a(n-1) + b]$$

(50) שאלת הוכחה.

(51) שאלת הוכחה.

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

$$(54) a_n = 2^{n+1} - 3^n$$

$$(55) a_n = \frac{1}{3} (3 + (-1)^n + 2^{n+1})$$

## חקירת הלכסינות של מטריצה

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}, \text{ כאשר } k \text{ קבוע ממשי.}$$

- א. לאיזה ערכים של  $k$  המטריצה לכסינה?  
 ב. במקרים בהם  $A$  לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- $A$ .

$$(2) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \text{ כאשר } k \text{ קבוע ממשי.}$$

לאיזה ערכים של  $k$  (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

$$(3) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}.$$

- א. מצאו את כל ערכי  $a$ , כך ש- $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ .  
 ב. במקרה בו  $A$  לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(4) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \text{ כאשר } m \in \mathbb{R}.$$

עבור אילו ערכים של  $m$ , המטריצה  $A$  לכסינה?  
 כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(5) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } k \text{ קבוע ממשי חיובי.}$$

- א. לאיזה ערך של הפרמטר  $k$  המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה  $A$ ?  
 עבור ערך ה- $k$  שמצאת בסעיף א:  
 ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.  
 ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(6) \text{ נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי  $a$  ו- $b$  עבורם הערכים העצמיים של  $A$  יהיו 1 ו-1- בלבד.  
 ב. עבור ערכי  $a$  ו- $b$  שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

$$(7) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{R}.$$

- א. מצאו את כל הערכים של  $a$ , עבורם  $A$  לכסינה.  
 ב. במקרים בהם  $A$  לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית  $D$  הדומה ל- $A$ .

$$(8) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}.$$

- א. עבור כל ערך של  $a$ , מצאו את הערכים העצמיים של  $A$ .  
 ב. עבור אילו ערכי  $a$ , המטריצה  $A$  לכסינה?  
 בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- $A$ .

$$(9) \text{ נתונה המטריצה הבאה מעל } \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix},$$

- כאשר  $a, b, c$  מספרים ממשיים המקיימים  $a - b + c = -1$ .  
 א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של  $A$  ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.  
 ב. נתון כי  $a = b > 1$ .  
 הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

$$ג. ידוע כי  $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + a < 0$ .$$

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

- (10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים  $a, b$ , כך שהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ לכסינה.}$$

$$(11) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- א. עבור אילו ערכי  $a, b$  ל $A$  לכסינה? נמקו.  
 ב. בכל אחד מהמקרים ש- $A$  לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש- $A$  דומה לה.

$$(12) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a, b \in \mathbb{R}$$

- מצאו את כל הערכים של  $a$  ו- $b$ , כך ש- $A$  לכסינה.  
 בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(13) \text{ נתונה מטריצה ממשית } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \text{ פרמטר ממשי.}$$

- ידוע ש- $\lambda = -2$  הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.  
 א. מהו ערכו של  $a$ ?  
 ב. האם המטריצה לכסינה?

$$(14) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}$$

- האם קיימים ערכי  $a$ , כך ש- $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ ? מעל  $\mathbb{C}$ ?  
 אם כן, עבור כל ערך כזה של  $a$ , רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- $A$ .

$$(15) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ a & -a & a \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{R}$$

- מצאו את כל ערכי  $a$  עבורם  $A$  לכסינה:  
 א. מעל  $\mathbb{R}$ .  
 ב. מעל  $\mathbb{C}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $k \neq 4$ . ב.  $D = \text{diag}(4, k, k)$
- (2) המטריצה  $A$  לא ניתנת ללכסון לכל ערך של  $k$ .
- (3) א.  $A$  לכסינה אם ורק אם  $a \neq \pm 1$ . ב.  $D = \text{diag}(1, -a^2, a^2)$
- (4)  $A$  לכסינה לכל  $m$  ודומה למשל ל-  $D = \text{diag}(m-1, m-1, m+2)$
- (5) א.  $k=3$ . ב. ר"א  $= 1$ . ר"ג  $= 1$ . ג.  $D = \text{diag}(2, -3, -5)$
- (6) א.  $a=3, b=-4$  או  $a=1, b=0$ . ב. המטריצה לא לכסינה.
- (7) א.  $A$  לכסינה עבור כל  $a$ . ב. דומה למטריצה אלכסונית  $D = \text{diag}(a, 1, 2)$ .
- (8) א. אם  $a \neq 0, 2, -1$ , אז יש שלושה ע"ע שונים  $a^2, 2a, a+2$ .  
 אם  $a=0$ , הע"ע הם 0 ו-2.  
 אם  $a=-1$ , הע"ע הם 1 ו-2.  
 אם  $a=2$ , יש ע"ע אחד והוא 4.  
 ב.  $A$  לכסינה אם ורק אם  $a \neq 2, -1$ .
- במקרה זה היא דומה למטריצה  $D = \text{diag}(a^2, 2a, a+2)$ .
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) אם  $a=b=0$ , או אם  $a \neq 0$  ו-  $b=0$ , אז  $A$  לכסינה.
- (11) א+ב.  $A$  לכסינה בשלושה מקרים:  
 כאשר  $a \neq 0, 1$  ואז דומה ל-  $D = \text{diag}(1, 0, a)$   
 או כאשר  $a=0$  וגם  $b=0$  ואז דומה ל-  $D = \text{diag}(0, 0, 1)$   
 או כאשר  $a=1$  וגם  $b = -\frac{1}{2}$  ואז דומה ל-  $D = \text{diag}(0, 1, 1)$
- (12)  $A$  לכסינה אם ורק אם:  
 1.  $b \neq 2, 3$  ואז  $D = \text{diag}(3, 2, 2, b)$   
 או 2.  $b=2$  וגם  $a=0$  ואז  $D = \text{diag}(3, 2, 2, 2)$   
 או 3.  $b=3$  וגם  $a=0$  ואז  $D = \text{diag}(3, 3, 2, 2)$
- (13) א.  $a=3$ . ב. כן.
- (14) מעל  $\mathbb{R}$ : לכסינה אם  $a=0$  ודומה ל-  $D = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$   
 מעל  $\mathbb{C}$ : לכסינה לכל  $a$  דומה ל-  $D = \text{diag}(a, -a, ai, -ai)$
- (15) א.  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$  אם ורק אם  $a=0$ . ב.  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$  לכל  $a$ .

## דמיון מטריצות

### שאלות

(1) ידוע ש- $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א.  $|A| = |B|$

ב.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- $A$  ו- $B$  אותו פולינום אופייני.

(2) הוכיחו באינדוקציה: אם  $P^{-1}AP = B$ , אז  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$  וידוע כי  $A$  דומה למטריצה  $4A$ . הוכיחו כי  $A$  מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות:  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$ .

האם קיימים קבועים ממשיים  $a, b$ , כך שהמטריצה  $A$  דומה למטריצה  $B$ ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ :  $A, B, C$ . הוכיחו כי:

א.  $A$  דומה לעצמה.

ב. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $B$  דומה ל- $A$ .

ג. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

ד. אם  $A$  דומה ל- $B$  ושתייהן הפיכות, אז  $A^{-1}$  דומה ל- $B^{-1}$ .

ה. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^k$  דומה ל- $B^k$ , לכל  $k$  טבעי.

ו. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $q(x)$  פולינום, אז  $q(A)$  דומה ל- $q(B)$ .

ז. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^T$  דומה ל- $B^T$ .

ח. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

ט. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$ .

הערה –  $\text{Nullity}(A) =$  מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

6 הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.  
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.  
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7 ידוע שלמטריצה ריבועית  $A$  מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א.  $\text{rank}(A)$

ב.  $\dim \text{Ker}(A)$

ג.  $\text{tr}(A)$

ד.  $|A^T A|$

ה. עייע עבור  $A^T A$ .

ו. עייע עבור  $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$ .

הערה –  $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

8 הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

9 ענו על הסעיפים הבאים :

- א.  $A$  ו- $B$  שתי מטריצות הדומות למטריצה  $C$ .  
 הוכיחו כי  $A$  דומה ל- $B$ .

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

10 עבור אילו ערכים של  $x$  המטריצות הבאות דומות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

**11** הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**12** נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n[\mathbb{R}]$ .

נתון כי  $A$  ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

$B$  דומה ל- $A$  אם ורק אם  $B$  ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של  $A$ .

**13** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$ .

עבור אילו ערכים של  $a$  ו- $b$  המטריצות  $A$  ו- $B$  דומות?

**14** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , כאשר  $a \in \mathbb{R}$ .

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $P^{-1}AP = B$ .

**15** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

**16** תהיינה  $A, B$  מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$ , בעלות דרגה 1, וכן  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = k$ , כאשר

$k$  מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של  $A$  ו- $B$ .

ב. הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  דומות.

**(17)** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 3$  עם פולינום אופייני  $p(t) = (t-1)(t+4)^2$ , ונתון כי  $\rho(4I + A) = 1$ .

- א. רשמו את הפולינום האופייני של  $A^2$ .  
 ב. הוכיחו שהמטריצה  $A^4 - 10A + 9I$  לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $(A^4 - 10A + 9I)\underline{x} = \underline{0}$ .

**(18)** נתון כי  $A, B, C, D \in M_n[\mathbb{R}]$  כך ש- $A$  דומה ל- $B$  ו- $C$  דומה ל- $D$ . הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A+C$  דומה ל- $B+D$ .  
 ב.  $AC$  דומה ל- $BD$ .

**(19)** הוכיחו או הפריכו:

- א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.  
 ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

**(20)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  אז  $A - kI$  דומה ל- $B - kI$ .  
 ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**(21)** נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות דומות.

הוכיחו של- $A$  ו- $B$  אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

**(22)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $7 \times 7$ , בעלת דרגה 4.

נתון שהפולינום  $q(t) = t^4 - 7t^2 + 10$  מחלק את הפולינום האופייני של  $A$ .

מצאו את הפולינום האופייני של  $A$ .

א. הוכיחו ש- $A$  לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את  $\text{tr}(A^2)$ .

23 נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n(R)$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $B+I$  דומה ל- $I-A$  אז  $A^2$  דומה ל- $B^2$ .

ב. אם ל- $A$  ול- $B$  אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

### תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) לא.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו.  $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10)  $x=0$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13)  $a=0$  ו- $b=-2$

14) כן, עבור  $a = \pm 2$

15) המטריצות דומות ו- $P$  מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

16) א.  $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$  ב. שאלת הוכחה.

17) א.  $p(x) = (x-1)(x-16)^2$  ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.

21) שאלת הוכחה.

22) א.  $D = \text{diag}(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$  ב.  $\text{tr}(A^2) = 14$

23) שאלת הוכחה.

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)

פרק 4 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

50	1. מרחבי מכפלה פנימית
52	2. הנורמה והמרחק
54	3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים
57	4. אורתוגונליות
60	5. משלים אורתוגונלי

## מרחבי מכפלה פנימית

### שאלות

(1) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ .

(2) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ ?

(3) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  ב- $\mathbb{R}^3$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$ ?

(4) לכל שני וקטורים  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ב- $\mathbb{R}^n$ ,

נגדיר:  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$ , כאשר  $k_1, \dots, k_n$  מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$ .

מהי המכפלה המתקבלת אם  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?

(5) לכל שתי מטריצות  $A, B$  ב- $M_{m \times n}[R]$ , נגדיר:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{m \times n}[R]$ .  
 $\text{tr}$  מייצג את המילה  $\text{trace}$  (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות  $f, g$  ב- $C[a, b]$ , נגדיר:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .

- (7) נתונה מכפלה פנימית על  $R^3$ , שעבורה הקבוצה  $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$  מהווה בסיס אורתונורמלי. חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$ .

### תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.  
 (2)  $k > 9$   
 (3)  $-1 < k < 1$   
 (4) עבור  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ , נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.  
 (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{m \times n}[R]$ .  
 (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .  
 (7)  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

## הנורמה והמרחק

## שאלות

(1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ :  $u = (1, -2, 2)$ ,  $v = (3, -2, 6)$ ,  $w = (5, 3, -2)$ .  
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$ , חשבו:

א. $\langle u, v \rangle$	ב. $\langle u, w \rangle$	ג. $\langle v, w \rangle$	ד. $\langle u + v, w \rangle$
ה. $\ u\ $	ו. $\ v\ $	ז. $\ u + v\ $	ח. $d(u, v)$
ט. $\hat{u}$	י. $\hat{v}$		

(2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2 \times 3}[R]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 3}[R]$ , חשבו:

א. $\langle A, B \rangle$	ב. $\langle A, C \rangle$	ג. $\langle A, B + C \rangle$
ד. $\langle B, C \rangle$	ה. $\langle 4A + 10B, 11C \rangle$	ו. $\ A\ $
ז. $\ B\ $	ח. $d(A, B)$	ט. $\hat{A}$

(3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0, 1]$ :

$$p(x) = x + 3, \quad q(x) = 3x + 1, \quad r(x) = x^2 - 4x - 1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$

חשבו:

א. $\langle p, q \rangle$	ב. $\langle p, r \rangle$	ג. $\langle p, q + r \rangle$
ד. $\ p\ $	ה. $d(p, q)$	ו. $\hat{r}$

(4) הוכיחו:  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

(5) הוכיחו:  $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

(6) הוכיחו:  $\langle u-v, u+v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$

(7) הוכיחו:  $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(8) הוכיחו:  $\frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle$

(9) יהי  $V$  ממ"פ ויהיו  $u, v \in V$  וקטורים המקיימים:  $\|u\| = a, \|u+v\| = b, \|u-v\| = c$ . מצאו את  $\|v\|$  ואת  $\langle u, v \rangle$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 19      ב. -5      ג. -3      ד. -8  
 ה. 3      ו. 7      ז.  $\sqrt{96}$       ח.  $\sqrt{20}$   
 ט.  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$       י.  $(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$

(2) א. 185      ב. -12      ג. 173      ד. -24      ה. -3168  
 ו.  $\sqrt{355}$       ז.  $\sqrt{139}$       ח.  $\sqrt{124}$       ט.  $\frac{1}{\sqrt{355}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(3) א. 9      ב. -9.5833      ג. -0.5833      ד.  $\sqrt{\frac{37}{3}}$

ה.  $\sqrt{\frac{4}{3}}$       ו.  $\frac{x^2 - 4x - 1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9)  $\|v\| = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}}$ ,  $\langle u, v \rangle = \frac{b^2 - c^2}{4}$

## אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

## שאלות

(1) הוכיחו כי אם  $u, v$  תלויים לינארית, אז  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ .

(2) יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ו- $y_1, y_2, \dots, y_n$  מספרים ממשיים. הוכיחו כי  $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ .

(3) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות בקטע הסגור  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$ .

(4) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. נניח כי  $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in R^n$  שני וקטורי יחידה ב- $R^n$ . הוכיחו כי  $|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq 1$ .  
 ב. נניח ש- $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$ . הוכיחו כי  $(u_1 + \dots + u_n)^n \leq n(u_1^2 + \dots + u_n^2)^{n/2}$ .

(5) נניח ש- $a_1, a_2, \dots, a_n$  מספרים חיוביים כך ש- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . הוכיחו כי  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n}$ .

(6) הוכיחו את אי השוויון  $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \leq \sqrt{\frac{n^2 + n}{2}}$ .

(7) נתון כי  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . הוכיחו כי  $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$ .

$$(8) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i .$$

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$$

$$ב. \text{ נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = 1, \text{ הוכיחו כי } \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}$$

$$ב. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i}$$

(11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים  $u = (1, 2, 2)$ ,  $v = (-2, 1, 2)$  ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$ .

(12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים  $u = (3, 4)$ ,  $v = (1, 2)$  ביחס למכפלה הפנימית  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$  ב- $\mathbb{R}^2$ .

(13) מצאו את  $\cos \theta$  עבור הזווית  $\theta$  שבין  $p(x) = 2x - 1$  ו- $q(x) = x^2 - 1$  בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$  שב- $C[0, 1]$ .

(14) מצאו את  $\cos \theta$  עבור הזווית  $\theta$  שבין  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ .

**(15)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורי יחידה המקיימים  $\|u - v\| = 2$ . הוכיחו ש- $u$  ו- $v$  הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11)  $\theta = 63.61^\circ$
- (12)  $\theta = 9.44^\circ$
- (13)  $\cos \theta = 0.173^\circ$
- (14)  $\cos \theta = 0.00036^\circ$
- (15) שאלת הוכחה.

## אורתוגונליות

### שאלות

(1) הוכיחו כי הווקטורים  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (4, 7, -6)$  אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$ .

(2) מצאו את ערכו של הקבוע  $k$ , עבורו הווקטורים  $u = (1, k, 3)$ ,  $v = (4, 7, -6)$  יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$ .

(3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (2, 5, 7)$  ב- $\mathbb{R}^3$ .

(4) הוכיחו כי הפולינומים  $p(x) = 2x - 1$ ,  $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$  אורתוגונליים בקטע  $[0, 1]$  (ביחס למכפלה הפנימית  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ ).

(5) במרחב  $P_n[\mathbb{R}]$  (מרחב הפולינומים ממעלה  $n \geq 1$  מעל  $\mathbb{R}$ ), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6), \quad q(x) = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב  $P_7[\mathbb{R}]$ , עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

(6) נתונות שתי מטריצות:  $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ ,

מצאו את הערך של הקבוע  $k$ , עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

(7) הוכיחו כי:  $\|u+v\| = \|u-v\| \Leftrightarrow u \perp v$ .

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$ ?

(8) הוכיחו כי:  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$ .

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

**(9)** הוכיחו כי :  $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow (u-v) \perp (u+v)$ .  
 מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

**(10)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים  $(3, 2, 1)$  ו- $(1, -1, 2)$ ,  
 ושמרחקו מהווקטור  $(1, 1, 0)$  הוא  $\sqrt{3}$ .

**(11)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.  
 נגדיר  $a = u - 2v$ ,  $b = 3u + v$ .  
 אם  $\alpha$  היא הזווית בין  $a$  ל- $b$ , אז  $\cos \alpha$  שווה ל-?

**(12)** יהיו  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה  $k$ .  
 יהי  $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$  וקטור שמרחקו מ- $2w_2$  שווה למרחקו מ- $w_1$ .  
 מהו המרחק של  $v$  מ- $w_1$ ?

**תשובות סופיות**

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $k = 2$ (3)  $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6)  $k = 0.5$ 

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  or  $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (11)  $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (12)  $\frac{5}{4}k$

## משלים אורתוגונלי

## שאלות

- (1) יהי  $W = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 5, 3, 1)\}$ . מצא בסיס וממד עבור  $W^\perp$ . הראו כי מתקיים משפט הפירוק.
- (2) יהי  $w = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ . מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ . הראו כי מתקיים משפט הפירוק.
- (3) יהי  $W = \text{span}\{x\} \subseteq P_2[R]$ . מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[0, 1]$ .
- (4) יהי  $W = \text{span}\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$ . מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[0, 1]$ .
- (5) יהי  $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2 \times 2}[R]$ . מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 2}[R]$ .
- (6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.
- (7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.
- (8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית  $A \cdot \underline{x} = 0$ . יהי  $U$  מרחב הפתרונות של המערכת. תנו פירוש אפשרי ל- $U$  בעזרת המושג משלים אורתוגונלי, והמושג מרחב השורות של המטריצה  $A$ .
- (9) נניח ש- $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ . הוכיחו כי:  $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$ .

(10) נניח ש- $W$  הוא תת קבוצה של  $V$ .  
הוכיחו כי:  $W \subseteq W^{\perp\perp}$ .

(11) נניח ש- $W$  הוא תת קבוצה של  $V$ .  
הוכיחו כי:  $W = W^{\perp\perp}$  (אם  $V$  מממד סופי).

(12) נניח ש- $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ .  
הוכיחו כי:  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ .

(13) נניח ש- $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ .  
הוכיחו כי:  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ .

### תשובות סופיות

$$W^\perp = \text{span}\{(-3, 1, 0, 1), (11, -5, 1, 0)\} \quad (1)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad (2)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\left(-\frac{2}{3} + x\right), \left(-\frac{1}{2} + x^2\right)\right\} \quad (3)$$

$$W^\perp = \text{span}\{1.5x^2 - 6x + 5\} \quad (4)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (5)$$

$$B_W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_{W^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (7)$$

(8) הסבר בוודא.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

# אלגברה לינארית (מענה חלקי)

פרק 5 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

- 1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל ..... 62
- 2. ההיטל של וקטור ..... 66
- 3. תהליך גרם-שמידט ..... 69

## בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

### שאלות

- (1) נתונה קבוצת וקטורים  $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$  ב- $\mathbb{R}^3$ .
- א. הראו שהקבוצה  $S$  אורתוגונלית.  
 ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.  
 ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ .
- (2) נתונה קבוצת וקטורים  $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$  ב- $\mathbb{R}^3$ ,  
 ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור  $(13, -1, 7)$ ,  
 כצירוף לינארי של איברי  $S$ .
- (3) נתונה קבוצת וקטורים  $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$  ב- $\mathbb{R}^3$ ,  
 רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו  $v = (a, b, c)$  ב- $\mathbb{R}^3$ ,  
 ביחס לבסיס  $S$ .
- (4) נניח ש- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  היא בסיס אורתוגונלי ל- $V$ .
- הוכיחו שלכל  $v \in V$ , אז  $v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n$ .
- הערה: הקבוע  $a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$  נקרא מקדם פורייה של  $v$  ביחס ל- $u_i$ ,  
 או הרכיב של  $v$  ביחס ל- $u_i$ .
- (5) נתונה קבוצת פונקציות  $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$  ב- $V = C[0, \pi]$ .  
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?  
 במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,  
 נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.  
 ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
- (6) נתונה קבוצת פונקציות  $S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$  ב- $V = C[0, 2\pi]$ .  
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.  
 ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.  
 האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה  $S = \{(2, 4, 4), (4, -1, -1), (0, 2, -2)\}$  ב- $\mathbb{R}^3$ .

בדקו האם הקבוצה  $S$  אורתוגונלית.  
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?  
האם היא בסיס אורתונורמלי?  
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה  $S = \{1, x, x^2, x^3\}$  ב- $P_3[\mathbb{R}]$ .

בדקו האם הקבוצה  $S$  אורתוגונלית.  
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?  
האם היא בסיס אורתונורמלי?  
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.  
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$ )

9) נתונה קבוצה  $S = \{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$  ב- $P_2[\mathbb{R}]$ .

בדקו האם הקבוצה  $S$  אורתוגונלית.  
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?  
האם היא בסיס אורתונורמלי?  
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.  
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$ )

10) נתונה הקבוצה  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_3[\mathbb{R}]$

בדקו: האם הקבוצה  $S$  אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?  
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?  
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.  
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי  $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\}$  בסיס אורתונורמלי של  $\mathbb{R}^2$ .

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו  $v \in \mathbb{R}^2$ .

ב. יהי  $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\}$  בסיס אורתונורמלי של  $\mathbb{R}^3$ .

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו  $v \in \mathbb{R}^3$ .

$$(13) \text{ יהי } D = \left\{ A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. הוכיחו ש- $D$  מהווה בסיס אורתונורמלי של  $M_2(\mathbb{R})$  עם המכפלה

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$$

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית  $A \in M_2(\mathbb{R})$  עם המכפלה הפנימית לעיל.

(14) במרחב  $C([-\pi, \pi])$  של כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[-\pi, \pi]$  נגדיר את

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

המכפלה הפנימית הבאה  $\{f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin x\}$  מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  ביחס למערכת

הנתונה.

(15) במרחב  $C([-\pi, \pi])$  של כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[-\pi, \pi]$  נגדיר את

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

תהי  $\{f_1 = \sin x, f_2 = \sin(2x), \dots, f_{60} = \sin(60x)\}$  מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$  ביחס

למערכת הנתונה.

## תשובות סופיות

1 א. שאלת הוכחה. ב.  $S \left\{ \frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}} \right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2  $(13, -1, 7) = \frac{-1}{7}(2, 1, 4) + 3(1, 2, 1) + \frac{24}{7}(3, -2, 1)$

3  $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4) + \frac{a+2b+c}{6}(1,2,1) + \frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4 שאלת הוכחה.

5 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}}, \dots \right\}$$

6 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

7 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה

אורתונורמלית,  $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{36}}(2, 4, 4), \frac{1}{\sqrt{8}}(4, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{18}}(0, 2, -2) \right\}$

8 הקבוצה לא אורתוגונלית.

9 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S = \{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

10 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא

אורתונורמלית,  $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{80}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

11 שאלת הוכחה.

12 שאלת הוכחה.

13 שאלת הוכחה.

14 שאלת הוכחה.

15  $2 \geq \frac{16}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{59^2} \right]$

## ההיטל של וקטור

### שאלות

- (1) מצאו את מקדם פורייה  $c$  ואת ההיטל של  $v = (1, 2, 2)$  לאורך  $w = (0, 1, -1)$  ב- $\mathbb{R}^3$ .
- (2) מצאו את מקדם פורייה  $c$  ואת ההיטל של  $v = (1, -2, 2, 0)$  לאורך  $w = (0, 2, -1, 2)$  ב- $\mathbb{R}^4$ . מקובל לסמן גם  $\text{proj}(v, w)$ .
- (3) מצאו את מקדם פורייה  $c$  ואת ההיטל של  $p(x) = 2x - 1$  לאורך  $q(x) = x^2$  במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$ .
- (4) מצאו את מקדם פורייה  $c$  ואת ההיטל של  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  לאורך  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) יהי  $V = \mathbb{R}^3$  ויהי  $W = \text{span}\{w_1 = (1, 2, 1), w_2 = (1, -1, 1)\}$  תת מרחב של  $V$ . מצאו את ההיטל של הווקטור  $v = (-2, 2, 2)$  על תת המרחב  $W$  לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V = \mathbb{R}^3$ . בנוסף, רשמו את  $v$  כסכום  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ , כאשר  $v_{\parallel} \in W$ ,  $v_{\perp} \in W^{\perp}$ .
- (6) יהי  $V = \mathbb{R}^4$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ויהי  $W = \text{span}\{w_1 = (1, 1, 0, -1), w_2 = (1, 0, 1, 1), w_3 = (0, -1, 1, -1)\}$  תת מרחב של  $V$ . מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור  $v = (3, 4, 5, 6)$  בתת המרחב  $W$ . בנוסף, כתבו את  $v$  כסכום של וקטור מ- $W$  ווקטור מ- $W^{\perp}$ .
- (7) יהי  $V = C([0, 1])$  מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע  $[0, 1]$ . ויהי  $W = \text{span}\left\{w_1 = 1, w_2 = x - \frac{1}{2}\right\}$  תת מרחב של  $V$ . מצאו את ההיטל של  $v = 4x^2 - 4$  על  $W$  עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את  $v$  כסכום של וקטור מ- $W$  ווקטור מ- $W^{\perp}$ .

(8) נתון המרחב  $C([-1,1])$  עם המכפלה הפנימית  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ .

נגדיר תת מרחב של  $C([-1,1])$  :  $W = sp\{f_1 = |x|+x, f_2 = |x|-x\}$

מצאו את ההיטל של  $f(x) = x^2$  על  $W$ .

(9) נתון המרחב  $C([-π, π])$  עם המכפלה הפנימית  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{π} \int_{-π}^π f(x)g(x)dx$ .

נגדיר תת מרחב של  $C([-π, π])$  :

$W = sp\{f_1 = \sin x, f_2 = \sin(2x), \dots, f_{60} = \sin(60x)\}$

ידוע שהקבוצה  $\{f_i\}_{i=1}^{60}$  היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של  $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$  על  $W$ .

## תשובות סופיות

$$\text{proj}(v, w) = cw = 0, \quad c = 0 \quad (1)$$

$$\text{proj}(v, w) = cw = -\frac{2}{3}(0, 2, -1, 2), \quad c = \frac{-2}{3} \quad (2)$$

$$\text{proj}(p, q) = c \cdot q(x) = \frac{5}{6}x^2, \quad c = \frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\text{proj}(A, B) = cB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{6} \quad (4)$$

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = (0, 2, 0) + (-2, 0, 2), \quad \pi(v) = (0, 2, 0) \quad (5)$$

$$(3, 4, 5, 6) = v_{\parallel} + v_{\perp} = (5, 2, 3, 6) + (-2, 2, 2, 0), \quad \pi(v) = (5, 2, 3, 6) \quad (6)$$

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = \left(-\frac{14}{3} + 4x\right) + \left(4x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right), \quad \pi(v) = -\frac{14}{3} + 4x \quad (7)$$

$$\text{proj}_w f = \frac{3}{4}|x| \quad (8)$$

$$\text{proj}_w f = \frac{4 \sin(x)}{\pi} + \frac{4 \sin(3x)}{3\pi} + \frac{4 \sin(5x)}{5\pi} + \dots + \frac{4 \sin(59x)}{59\pi} \quad (9)$$

## תהליך גרם-שמידט

### שאלות

(1) נתון:  $U = \text{span}\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$   
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$ .

(2) נתון:  $U = \text{span}\{(2,2,2,2), (1,1,2,4), (1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$   
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$ .

(3) נתון:  $U = \text{span}\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$   
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$ ,  
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[-1,1]$ .

(4) נתון:  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$   
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U$ ,  
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

### תשובות סופיות

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2) \right\} \quad (1)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}} \right\} \quad (2)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{2}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{8}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{7}} \right\} \quad (3)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{33}} \right\} \quad (4)$$