

אלגברה לינארית ג' + ד'



תוכן העניינים

1.	דטרמיננטות	1
2.	המרחב n^R	5
3.	ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות	16
4.	דימיון מטריצות (ללא ספר)	

אלגברה לינארית ג' + ד'

פרק 1 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטות.....1
2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות.....4

חישוב דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג:

$$\text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

בשאלות 5-6 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \quad (6) \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

בשאלות 7-8 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$(7) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$$

$$(8) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$$

בשאלות 9-11 נתון כי $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו :

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (10) \qquad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad (12) \text{ הוכיחו כי :}$$

בשאלות 13-14 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשבו :

$$(13) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(14) \text{ א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj} B|$$

(15) נתון כי A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

(16) נתון כי A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|$, $|B|$.

(17) נתון כי A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$, ו- B הפיכה.
מצאו את n .

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (5) 120
- (6) 114
- (7) פתרונות באתר www.GooL.co.il
- (8) פתרונות באתר.
- (9) -8
- (10) 16
- (11) -36
- (12) הוכחה.
- (13) א. 4 ב. 2^{13}
- (14) א. -8 ב. -2^{11}
- (15) $\frac{81}{32}$
- (16) $|A|=18, |B|=-2/3$
- (17) 7

כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 11 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 4x + y + 8z &= 21 \\ 2x + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x + 2z + 5t &= 8 \\ -2x - 6y &= -8 \\ 5x + 3y - 7z + 4t &= 5 \\ 2x + 5y + 44z &= 51 \end{aligned} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 1, y = 2 \\ (2) \quad x &= 1, y = 1, z = 2 \\ (3) \quad x &= y = z = t = 1 \end{aligned}$$

אלגברה לינארית ג' + ד'

פרק 2 - המרחב R^n

תוכן העניינים

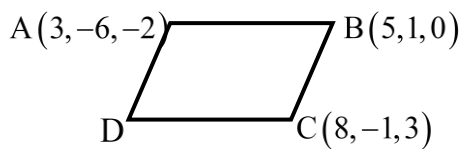
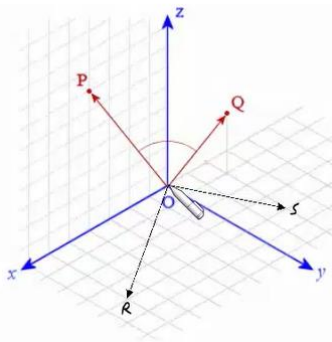
- 1. וקטורים 5
- 2. מרחב וקטורי 10
- 3. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית 11
- 4. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה 13

וקטורים

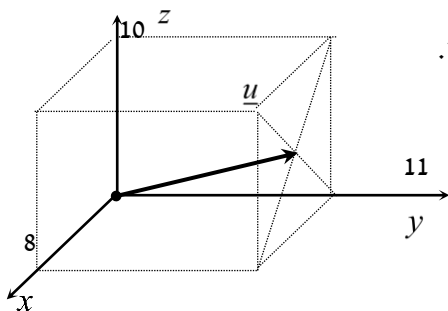
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך: $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

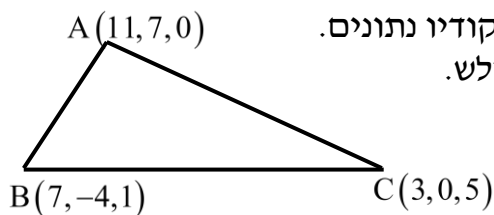
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



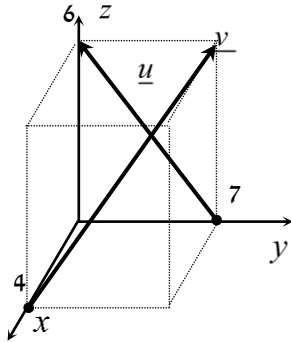
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

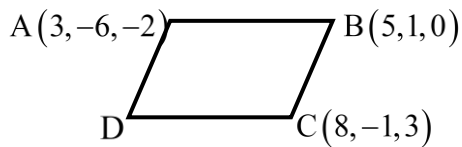
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{u} = (-3, 1, 4)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

מרחב וקטורי

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

תשובות סופיות

(1) כן

(2) כן

(3) כן

(4) לא

(5) לא

(6) כן

(7) לא

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1 א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה ליניארית?
- 2 א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3 א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4 נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?
- 5 נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

- (6) הביעו את הווקטור $(10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הביעו את הווקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2, u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2, u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א-ג. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$.
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של a, b, c .

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

ב. $\{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1)\}$

ג. $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

(2) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס ומימד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגניות

(3) להלן שלוש מערכות של משוואות הומוגניות :

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad 3. \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 1.$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.

מצאו בסיס ומימד ל- U , W ו- V .

(4) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס ומימד ל- U .

(5) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס ומימד ל- U .

(6) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס ומימד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

בשאלות 7 ו-8 נתונים שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

(7) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

(8) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 9 ו-10 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$(9) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ ג. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 1)\}$
- (3) W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (4) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (5) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (6) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (7) בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$ ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$ ממד: 3.
- (9) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$ ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 2, דרגה: 2.
- (10) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$ ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 3, דרגה: 3.

אלגברה לינארית ג' + ד'

פרק 3 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות.....16

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{עבור המטריצה } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} :$$

- א. מצאו מטריצה אופיינית.
- ב. מצאו פולינום אופייני.
- ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצאו וקטורים עצמיים.
- ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009} .
- ט. מצאו את הפולינום המינימלי.
- י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$(6) \quad \text{נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

$$(7) \quad \text{נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הע"ע-ים של A יהיו 1 ו-1 בלבד.
 ב. עבור ערכי a ו- b שנמצאו בסעיף א, קבעו האם המטריצה לכסינה.

(8) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

$$\text{ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והם מתאימים לערכים העצמיים $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$.

מצאו את המטריצה A .

(9) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 , בעלת וקטורים עצמיים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

(10) הוכיחו או הפריכו:

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה, השייך לע"ע 14.

(11) נתונה מטריצה ריבועית A .

הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ ערכים עצמיים: } x_1 = 2, x_{2,3} = 3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(2) v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x = 1, x = 3, x = -2$$

$$(3) v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x = 1, x = 4, x = -1$$

$$(4) v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x = -1, x = 3$$

$$(5) \text{ א. } \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \text{ ב. } p(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

$$\text{ג. } x = 6, x = 2, x = -4$$

$$x = -4 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x = 2 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x = 6 - \text{ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ט.}$$

$$m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

י. הפיכה.

$$(6) k_1 = 3, k_2 = -\frac{32}{9}$$

$$(7) \text{ א. } a = 3, b = -4 \text{ או } a = 1, b = 0 \quad \text{ב. לא לשתייה.}$$

$$(8) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(9) \text{ אין כזו מטריצה.}$$

$$(10) \text{ א. הפרכה: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ג. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(11) \text{ א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.}$$

$$\text{ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.}$$

אלגברה לינארית ג' + ד'

פרק 4 - דימיון מטריצות

תוכן העניינים

1. דימיון מטריצות (ללא ספר)