

אלגברה א



תוכן העניינים

1	שדות	1
8	מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות	8
25	פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות	25
38	מטריצות	38
66	מרחבים וקטורים	66
94	העתקות ליניאריות	94
104	מטריצות והעתקות ליניאריות	104
116	דטרמיננטות	116
135	ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון	135
160	שדה השאריות מודולו p	160

אלגברה א

פרק 1 - שדות

תוכן העניינים

1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות.....1
2. שדות.....5

חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 1) $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, 2) $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$, 3)
 4) $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, 5) $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

שדות

שאלות

- 1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על R . בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א.
$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned}$$

- 2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$. על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
- $$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
- $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$
- הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

- 3) נתונה הקבוצה $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
- $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
- הוכיחו שהקבוצה C , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה. באיזה שדה מפורסם מדובר?

- 4) ענו על הסעיפים הבאים:
- הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
 - הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
 - הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
 - הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

(5) יהיו a, b איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$.

ב. הוכיחו כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

ג. הוכיחו כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

(6) יהיו a ו- b איברים של שדה.

הוכיחו כי:

א. $(-1) \cdot a = -a$

ב. $(-a)b = a(-b) = -ab$

(7) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.

כלומר, הוכיחו כי $ab = cb \Rightarrow a = c$ לכל a, b, c , בשדה ($b \neq 0$).

(8) הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה $a, b, c, 0 \neq$,

קיים בשדה איבר יחיד x , כך ש- $ax + b = c$.

(9) נתון F שדה, ויהיו $x, y \in F$, כך ש- $xy \neq 0, 1$.

הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x - xyx)^{-1} = x^{-1} + (y^{-1} - x)^{-1}$, וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

(10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על R^2 .

א. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

ב. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

האם $(R^2, +, \cdot)$ שדה?

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A = \{f : R \rightarrow R \mid \forall x, f(x) \neq 0\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

האם הקבוצה A , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B = \{f : R \rightarrow R\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.

האם הקבוצה B , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

(12) יהי F שדה בעל מספר סופי של איברים.

הראו שלכל איבר $a \neq 0$ ב- F , קיים k טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$.

(13) נתון השדה Z_7 .

א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.

ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.

ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

(14) נתונה הקבוצה $Z_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$, מספר ראשוני p .

כאשר $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p}$, ו- $\bar{a} = \{x \in Z \mid a \equiv x \pmod{p}\}$.

לכל $\bar{a}, \bar{b}$ בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

הוכיחו ש- $(Z_p, \oplus, \otimes)$ מהווה שדה.

בקיזור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו p , כאשר p ראשוני, מהווה שדה.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) א. שאלת הוכחה.

ב. האיבר הנגדי לאיבר $\bar{3}$ הוא $\bar{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{2}$.

ג. האיבר ההופכי לאיבר $\bar{4}$ הוא $\bar{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{3}$.

(14) שאלת הוכחה.

אלגברה א

פרק 2 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות..... 8
2. הצמוד המרוכב..... 10
3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית..... 13
4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב..... 15
5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים..... 17
6. חילוק פולינומים..... 20
7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה..... 21
8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית..... 22

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את המשוואות ומצאו את z :

$$(1) \quad z^2 + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

בשאלות 4-7 חשבו :

$$(4) \quad (i\sqrt{2})^6 \quad (5) \quad (i^5 - i^{13})^2 \\ (6) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (7) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ ממשי וכי $z_1 - z_2$ מדומה.

א. מצאו קשר בין a_1 ל- a_2 ובין b_1 ל- b_2 .

ב. הראו כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

(9) יהיו $z_1, z_2, \dots, z_n$ מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ב. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$

ג. הוכיחו כי $|z_1^n| = |z_1|^n$

(10) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $z^{11} = 1$ אז $z + \frac{1}{z}$ מספר ממשי.

(11) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $|z+1| = |z-1|$ אז iz מספר ממשי.

תשובות סופיות

- (1) $\pm 3i$
- (2) $2 \pm i$
- (3) $3 \pm 2i$
- (4) -8
- (5) 0
- (6) $2 - 9i$
- (7) $-11 + 10i$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z = x + yi$):

$$\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1+i}{1-3i} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2+i} \quad (1)$$

פתרו את המשוואות בשאלות 4-6 ומצאו את המספר המרוכב z :

$$(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0 \quad (6)$$

$$z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \quad (5)$$

$$2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (4)$$

(7) פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(8) חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } \sqrt{5-12i}$$

$$\text{ב. } \sqrt{8+6i}$$

(9) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } (1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$$

$$\text{ב. } (-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$$

בשאלות 10-11 פתרו את המשוואות:

$$iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0 \quad (10)$$

$$z^2 - i\bar{z} + 6 = 0 \quad (11)$$

(12) הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{z}{\bar{z}^2}$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13 נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z - i| = 1$.
הוכח:

א. $|z|^2 = 2 \operatorname{Im}(z)$

ב. $\frac{z - 2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14 המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.
מצאו את a .

15 נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

תשובות סופיות

(1) $2 - i$

(2) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

(3) $-\frac{1}{2} + i$

(4) $z = -1 + 2i$

(5) $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$

(6) $z = i, z = -1$

(7) $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(8) א. $z = \pm(3 - 2i)$ ב. $z = \pm(3 + i)$

(9) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(10) $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(11) $z_1 - 3i, z_2 = 2i$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) $a = -\frac{3}{4}$

(15) שאלת הוכחה.

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית :

- (1) $1 + \sqrt{3}i$ (2) $-1 - i$ (3) $-3 - \sqrt{3}i$ (4) $1 - i$
 (5) $1 + i$ (6) $\sqrt{3} - i$ (7) $\sqrt{3}i$ (8) -8

(9) נתון המספר המרוכב $z = R \operatorname{cis} \theta$.

הביעו באמצעות R ו- θ את המספרים :

- א. $\bar{z}$
 ב. $\frac{1}{z}$
 ג. $-z$
 ד. $-\frac{1}{z}$
 ה. iz
 ו. $z \cdot \bar{z}$

(10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים :

- א. $z + \bar{z}$
 ב. $z \cdot \bar{z}$
 ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים :

- א. $z^2 - \bar{z}^2$
 ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(12) הוכיחו :

- א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$
 ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

תשובות סופיות

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt{12} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad \textbf{(3)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad \textbf{(4)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \textbf{(5)}$$

$$2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad \textbf{(6)}$$

$$\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \textbf{(7)}$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \textbf{(8)}$$

$$\textbf{(9)} \quad \text{א. } R \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ב. } \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ג. } R \operatorname{cis}(180^\circ + \theta)$$

$$\text{ד. } \frac{1}{R} \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ה. } R \operatorname{cis}(90^\circ + \theta) \quad \text{ו. } R^2$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (3) \qquad (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad (2) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \qquad \sqrt[5]{1} \quad (5) \qquad \sqrt[6]{-8} \quad (4)$$

(7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי : $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{32}i \quad (1)$$

$$-2^9 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$8^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
 ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי : $z^6 = 1$.

(2) נתונה המשוואה $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.
 ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

(4) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.
 ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .
 ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. פתרו את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$.
 ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.
 הערה : סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

(6) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.
 ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(7) נתונה המשוואה $(z-1)^3 = 1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

(8) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.
א. מצאו את שורשי המשוואה: z_3, z_2, z_1 .
ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.
ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(9) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
 s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.
א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .
ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצאו את הפרמטרים s ו- t .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$.
ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.
הפרש סדרה זו הוא $1 + \frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.
הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$,
כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

(1) א. $z_1 = \text{cis}60^\circ, z_2 = \text{cis}240^\circ, z_3 = \text{cis}120^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

(2) א. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$ ב. שאלת הוכחה.

(3) $z = 0, z = 1, z = -1$

(4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

(5) א. $z_n = 2\text{cis}[30^\circ + (n-1)72^\circ] \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$ ב. $q = \text{cis}72^\circ$

(6) א. $z_1 = \text{cis}45^\circ, z_2 = \text{cis}165^\circ, z_3 = \text{cis}285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. $z_3 = \sqrt[3]{2}\text{cis}290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}\text{cis}170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}\text{cis}50^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

(9) א. $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ ב. $t = 9, s = \pm 1$

(10) א. $z_2 = -0.5 + 0.5i, z_1 = 0$ ב. $a_1 = -8.5$

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים :

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

פתרון משוואות פולינומאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

שאלות

בשאלות 1-4 נתון $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$, $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$
מצאו:

$$(1) \quad \text{א. } 4u + v \quad \text{ב. } 2i \cdot u - v \quad (2) \quad u \cdot v$$

$$(3) \quad \text{א. } u \cdot u \quad \text{ב. } |u|$$

$$(4) \quad |v|$$

בשאלות 5-6 פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i$$

מעל השדה F : $iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i$, כאשר,

$$(-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i$$

$$(5) \quad F = \mathbb{R}$$

$$(6) \quad F = \mathbb{C}$$

בשאלות 7-8 בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

(7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

(8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות 9-10 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$
תלויים ליניארית ב- C^3 :

(9) מעל $\mathbb{C}$.

(10) מעל $\mathbb{R}$.

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 11-13 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(13) \text{ נתונה מטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \text{ב. } (-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$$

$$(2) \quad \text{א. } 20 + 35i \quad \text{ב. } 66$$

$$(3) \quad \sqrt{66}$$

$$(4) \quad \sqrt{92}$$

$$(5) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(6) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t)$$

$$(7) \quad \text{כן}$$

$$(8) \quad \text{לא}$$

$$(9) \quad \text{תלויים.}$$

$$(10) \quad \text{בלתי תלויים.}$$

$$(11) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} : x = 1 \pm 2i, \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \text{ערכים עצמיים : } x = 3, \text{ וקטורים עצמיים : } \mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(13) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2)$$

אלגברה א

פרק 3 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 25
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) 30
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות 33
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות 36

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{(5)} & \text{(4)} & \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,

כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$(8) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה F :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 1+4i \\ iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 &= 2+i \\ (-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 &= 5-i \end{aligned}$$

א. $F = \mathbb{R}$

ב. $F = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \text{א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \qquad (x, y) = (5-2t, t) \quad (17) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \qquad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \qquad (x, y, z) = (-1-7t, 2+2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \qquad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \qquad (x, y, z, t) = (-a+2b, 1+2a-2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t+1+i, 3, t) \quad \text{ב} \qquad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1 \quad (2)$$

$$kx + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1)$$

$$3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \quad (4)$$

$$5x + (1 - k)y + k^2 z = 1$$

$$x + 2ky + z = 0$$

$$3x + y + kz = 2 \quad (3)$$

$$x + 9ky + 5z = -2$$

$$x + ky + 3z = 2$$

$$kx - y + z = 4 \quad (6)$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0$$

$$kx - y = 1$$

$$(k - 2)x + ky = -2 \quad (5)$$

$$(k^2 - 1)z = 9$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8)$$

$$2x + ky = 3$$

$$(k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$3x + 4y - z = 2$$

$$kx - 2y + z = -1$$

$$x + 8y - 3z = k$$

$$2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + y - z + t = 1$$

$$ax + y + z + t = b \quad (12)$$

$$3x + 2y + at = 1 + a$$

$$2x + 4y + az = -1$$

$$x + 2y + 4z = -4$$

$$x + 2y - 4z = 0$$

$$x + 2y + 6z = -2b$$

$$(11)$$

$$x + 2y - 4z = b$$

$$7x - 10y + 16z = 7 \quad (10)$$

$$2x - ay + 3z = 1$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות :}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור a, b, c, d , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.
 ב. מצאו תנאי עבור b, c, d , כך שלכל a , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת : } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
 ח. מצאו לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים : } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע m שלושת המישורים:
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).
 ב. לא נפגשים באף נקודה.
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).
 ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

תשובות סופיות

- (1) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = 1$.3 $k = -2$
- (2) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = -2$.3 $k = 1$
- (3) 1. $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$.2 $k = \frac{4}{7}$.3 $k = -1$
- (4) 1. $k \neq 1, k \neq -0.4$.2 $k = 1, k = -0.4$
- (5) 1. $k \neq \pm 1, k \neq -2$.2 $k = \pm 1, k = -2$
- (6) 1. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$.3 $k = -1, k = -3, k = 2$
- (7) 1. $k = -1$.2 $k \neq \pm 1$.3 $k = 1$
- (8) 1. $k \neq 1$.2 $k = 1$.3 $k \neq 3$
- (9) 1. $k \neq 1$.2 $k = 1$
- (10) 1. $a \neq 2$.2 $a = 2, b \neq -3$.3 $a = 2, b = -3$
- (11) 1. $a \neq -6$ או $b \neq 2.5$.2 $a = -6, b = 2.5$.3
- (12) 1. $a = 2, b \neq 2$.2 $a \neq 2$ או $a = 2, b = 2$.3
- (13) א. $ab + 2c \neq d$.ב. $b = 0, c = 1.5, d = 3$
- (14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$.ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$
- ג. 1. $k \neq 2, k \neq -1$.2 $k = -1$.3 $k = 2$.ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$
- ה. $k = \pm 2$.ו. $k = -2$.ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$
- (15) א. $m \neq 0, -2, 3$.ב. $m = -2, 3$.ג. $m = 0$.ד. לא.

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות

שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- מצאו את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
- עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
- עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
- החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
- החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
- לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
- החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת ההומוגנית}$$

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.
 עבור אילו ערכים של m הקבוע W (אם בכלל) הוא:
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).
 ב. ישר (מצאו ישר זה).
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- A' את הצורה המדורגת של A .
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.
 מצאו את A .

תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה. ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה. ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א. $m \neq 0, -2, 3$ הנקודה היא $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- ב. אם $m = 0$ נקבל ישר $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ אם $m = 2$ נקבל ישר $\underline{x} = t(2, -1, 1)$,
- אם $m = 3$ נקבל ישר $\underline{x} = t(3, -3, 1)$.
- ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

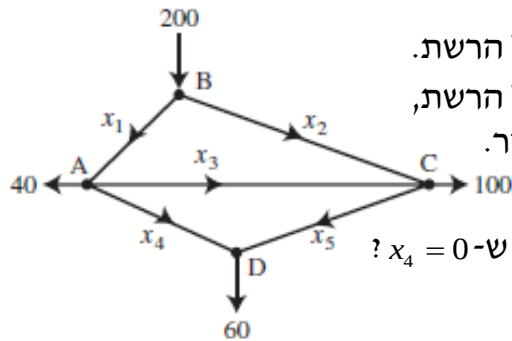
שאלות

(1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

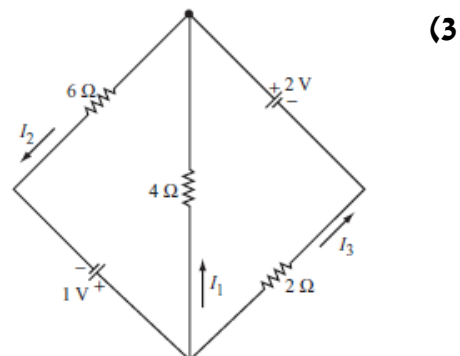
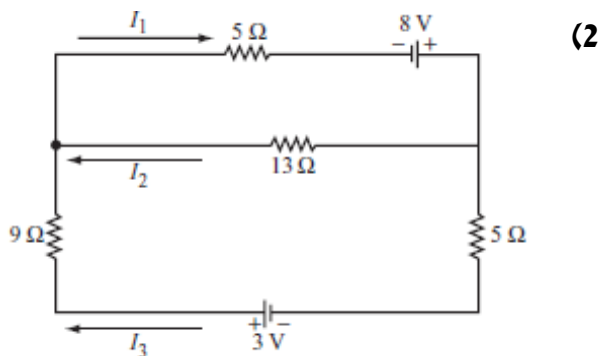
ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.



ג. מהו הערך המינימלי של x_1 , אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

תשובות סופיות

(1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$. ג. 40.

$$(2) \text{ א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317}$$

$$(3) \text{ } I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$$

אלגברה א

פרק 4 - מטריצות

תוכן העניינים

38	1. מטריצות
43	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
44	3. המטריצה ההופכית
51	4. דרגה של מטריצה
55	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
62	6. מטריצה אלמנטרית
64	7. פירוק LU
65	8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית

מטריצות

שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

- (2) מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

(4) $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6) $I_2 BC$

(7) $tr(C^T C)$

(8) $DABC$

(9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } (A-I)(A+I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקימות $A^2 = -4I$.

$$(11) \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

(12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

(13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } AA^T = 0. \text{ הוכיחו כי } A=0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

(14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.

ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

$$(15) \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות

מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר

ℓ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

- 17** תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

18 מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

(1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6

ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג. $(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{17 א.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{18}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

- (1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
 1. AA^T סימטרית.
 2. $A + A^T$ סימטרית.
 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
 1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
 2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
 3. $A^2 + B$ סימטרית.
- (3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
 1. AB^3 אנטי-סימטרית.
 2. AB^2 סימטרית.
 3. $(A - B)^2$ סימטרית.
- (4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
 1. AB אנטי-סימטרית.
 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.
- (5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

(21) נתון כי $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממסדר $n \geq 2$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
- ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
- ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
- ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
- ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
- ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה AB לא הפיכה.
- ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
- ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

(26) נתונה

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים a, b, c, d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

(27) נתון כי $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

הוכיחו:

$$\text{א. אם } BA = I - A^2 \text{ וגם } B^2 = -AB, \text{ אז } B = 0.$$

$$\text{ב. אם } A^2 = 2I, \text{ אז } A + I \text{ ו- } A - I \text{ הפיכות.}$$

(29) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $B^2A = -2B^3$ (1) וגם

$$(2) B^3 + AB^2 = 3I.$$

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

(30) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA + 2I = B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

(31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n = 0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ ו- $I + A$ הפיכות.

$$\text{ג. נגדיר: } e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

הוכיחו: אם $e^A = I$ אז $A = 0$.

(32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B , מסדר n .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
- ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} A - \frac{1}{6} I \quad \text{ב.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{12} B + \frac{5}{12} I \quad \text{ב.} \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{ג. שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{ד. שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{ה. שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
- 28) שאלת הוכחה.
- 29) שאלת הוכחה.
- 30) שאלת הוכחה.
- 31) שאלת הוכחה.
- 32) ד

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1 \quad \text{א.}$$

$$\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1 \quad \text{ב.}$$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \text{rank}(A) = \text{rank}(AB), \text{ אז בהכרח } B \text{ הפיכה.}$$

$$\text{ב. ייתכן ש-} \text{rank}(A) < \text{rank}(AB).$$

$$\text{ג. אם } \text{rank}(A) > \text{rank}(B), \text{ אז } \text{rank}(AB) > \text{rank}(B).$$

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

$$\text{הוכיחו כי } \text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3.$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$\text{א. } \text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$$

$$\text{ב. } \text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$.
הוכיחו:

$$\text{א. אם } AB = I_m \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$$

$$\text{ב. אם } BA = I_n \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$$

$$\text{ג. אם } AB = I_m \text{ וגם } BA = I_n \text{ אז בהכרח } m = n$$

$$\text{ד. אם } A \text{ לא ריבועית אז לא ייתכן שגם } AA^T = I_m \text{ וגם } A^T A = I_n$$

(11) בשדה F נתונים $a_1, a_2, \dots, a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

$$\text{קבעו מהי דרגתה של המטריצה } M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ כאשר } m_{ij} = a_i b_j.$$

12) תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$,

כאשר $b_1, b_2, \dots, b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A, B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

14) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$ אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $k \neq 1, 4, 10$, $\text{rank}(A)=4$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10} A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בשאלות 2-6 נתון כי

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

$$3x - 2y + 2z = 5$$

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10 למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
 $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$, $(x, y, z) = (2, 3, 4)$.
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{12 נתון}$$

ידוע כי $\text{rank}(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
 מצאו את הקבועים k, m .

13 נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
 הוכיחו ש- A מטריצה לא הפיכה.

14 נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
 בטאו קבוע זה בעזרת k .

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת}$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
- ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax = d$ ($d \neq 0$). נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $\text{rank}(A) = 2$. ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א. $x = au + bv + cw$
- ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג. $x = au + bv + w$
- ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים: בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת $A_{m \times n} \cdot x = b$. הוכיחו או הפריכו:
- א. אם u וגם λu ($\lambda \neq 1$) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם u ו- v וגם $\alpha u + \beta v$ ($\alpha, \beta \neq 0$) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים $(1, 2, \dots, n)$, $(n, \dots, 2, 1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1, \dots, n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

(19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א. A הפיכה.
- ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
- ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

(20) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m < n$. הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
- ב. למערכת $(A^T A)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
- ג. ייתכן מצב בו למערכת $(A^T A)x=0$ יש פתרון יחיד.
- ד. ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x=0$ יש פתרון יחיד.

(21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n , כך שלכל מטריצה ריבועית $B \neq 0$ מסדר n , מתקיים $AB \neq 0$. הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$.

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$,
- אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$,
- אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
- ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$ וגם $AA^T = I_m$.
- ה. אם $m \neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

(23) תהא $A \in M_{4 \times 4}(R)$ ויהי $b \in R^4$.

ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.

- א. נגדיר $w = \alpha u + \beta v$.
- הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha + \beta = 1$.
- ב. נניח בנוסף כי $w = -u + 2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2 x=b$.
- הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

ג. מצאו $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C \neq D$ ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad (2)$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad (4)$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad (6)$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (8)$$

$$(9) \text{ שאלת הוכחה.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(11) \text{ אם } k \neq 2 \text{ או } k \neq -1, \text{ אז יש פתרון אחד.}$$

$$\text{אם } k = 2, \text{ אז יש אינסוף פתרונות.}$$

$$\text{אם } k = -1, \text{ אז אין פתרונות.}$$

$$(12) \quad m = 5, k = 9$$

$$(13) \text{ שאלת הוכחה.}$$

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, t)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \quad \text{ג.}$$

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. A^2 מ- B^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתרו בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

(1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

(3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

תשובות סופיות

(1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$

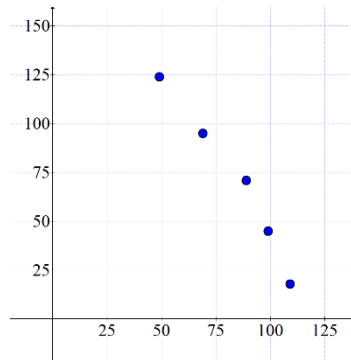
(2) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$

(3) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

- 1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- 2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

- 1) $f(x) = 0.8x + 2$
- 2) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. 119.2 יחידות.
- ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
- ד. 14.41

אלגברה א

פרק 5 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

66	1. מרחבים ותת-מרחבים
70	2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית
74	3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה
78	4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים
83	5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס
85	6. תרגילי תיאוריה מתקדמים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

- R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \rightarrow R)$ מעל השדה R .

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות 8-15 בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

(8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W = \{A \mid A = A^T\}$.

(9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B . כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

(10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

(11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

(12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

(13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר, $W = \{A \mid AB = 0\}$.

(14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

(15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות 16-21 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

(16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

(17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

(18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 . כלומר, $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$.

(19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

(20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n , כאשר $4 \leq n \leq 7$.

(21) $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

בשאלות 22-30 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

(22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$.

(23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$.

(24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

(25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

(26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

(27) $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

(28) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(29) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(30) $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$

(31) בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

(32) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. מצאו וקטור b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

- (33)** יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F .
 א. מצאו תנאי על k , עבורו הקבוצה $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(2) = k\}$,
 הינה תת-מרחב של V .
 ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V , שפורשים את W .

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

- | | | | | | | | | | |
|-----|------------------------------------|--|----|-----|----|-----|----|-----|----|
| (1 | כן | (2 | כן | (3 | כן | (4 | לא | (5 | לא |
| (6 | כן | (7 | לא | (8 | כן | (9 | כן | (10 | לא |
| (11 | לא | (12 | כן | (13 | כן | (14 | כן | (15 | כן |
| (16 | כן | (17 | לא | (18 | כן | (19 | כן | (20 | לא |
| (21 | לא | (22 | כן | (23 | כן | (24 | כן | (25 | כן |
| (26 | כן | (27 | לא | (28 | כן | (29 | לא | (30 | כן |
| (31 | א. כן
ב. לא | | | | | | | | |
| (32 | א. $u = (1, 0, 0, 0, 0)$
ג. לא. | ב. $B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid -b_1 + b_2 + 2b_3 \neq 0\}$ | | | | | | | |
| (33 | א. $k = 0$ | ב. $W = \text{span}\{2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4\}$ | | | | | | | |

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1 א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה ליניארית?
- 2 א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3 א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4 נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?
- 5 נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הביעו את הווקטור $v = (10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v = (7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3, u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3$, $p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3$,
 $p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$.

- א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

בשאלות 11-13 נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

$$\{u - v, u - w, u + v - 2w\} \quad (11)$$

$$\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\} \quad (12)$$

$$\{u + v, v + w, w\} \quad (13)$$

בשאלות 14-15 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V = R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q . הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R , כשהוא מרחב וקטורי מעל Q .

17) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1, A_2, \dots, A_n$. הוכיחו את הטענה הבאה :
למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 4, 3, 1)\}$$

א. האם $U = W$?

ב. האם $U = V$?

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2$, $u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2$, $u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s$, $b = 4t - 13s$, $c = 7s$, $d = 7t$.
- (6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.
- (7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.
- (8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$.
- ב. $A = B + 2C$, $B = A - 2C$, $C = 0.5A - 0.5B$, $D = 0.25A + 0.25B$.
- (9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$.
- ב. $p_1 = p_2 + 2p_3$, $p_2 = p_1 - 2p_3$, $p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2$, $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$.
- (10) לכל ערך של a, b, c .
- (11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (13) בלתי תלויים ליניארית.
- (14) תלויים.
- (15) בלתי תלויים ליניארית.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

ב. $\{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1)\}$

ג. $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

(2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

א. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x, x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,

בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad .3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad .2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad .1$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.מצאו בסיס וממד ל- U , W ו- V .

$$(6) \text{ נתון } U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

$$(7) \text{ נתון } U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

$$(8) \text{ נתון } U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

$$(9) \text{ נתון } U = \{A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A = A^T\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

$$(10) \text{ נתון } U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

$$(11) \text{ נתון } U = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**(12)** להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .**(13)** להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .**(14)** להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות 15-16 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (4) א. לא. ב. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$. ג. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 1)\}$
- (5) א. W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (6) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (7) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (9) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 3.
- (10) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 0.
- (11) בסיס: $\{p_1(x) = -1 + x^3, p_2(x) = -1 + x^2, p_3(x) = -1 + x\}$ ממד: 3.
- (12) א. בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$ ממד: 2.
- ב. בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$ ממד: 3.
- (13) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 2.
- (14) בסיס: $\{1 + x - x^2 + 2x^3, -3x + 3x^2 - 7x^3\}$ ממד: 2.
- (15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$ ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 2, דרגה: 2.
- (16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$ ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים

שאלות

1) להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות :

$$1) \begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- U, W ו- V .

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

2) להלן שני תת-מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{sp}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{sp}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).

ה. האם $U+V = R^4$?

ו. האם $U \oplus V = R^4$?

3) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{sp}\{1+x-x^2+2x^3, 3-x+7x^2+4x^3, -5+3x-15x^2-6x^3\}$$

$$V = \text{sp}\{1-x+x^2+x^3, 1+2x^2-x^3, 1+x+3x^2-3x^3, 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

4) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{sp}\{1+x+x^3, 1+2x+x^2+2x^3, -1+2x+3x^2+2x^3\}$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

- (5) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:
 $U = \text{sp}\{1+x, x+x^2, 1+x^3\}$
 $V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$
 מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

- (6) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$
 $U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$
 $W = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$
 א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W .
 ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
 ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ד. אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

- (7) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:
 $U = \{A \in V \mid A = -A^T\}$, $W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$
 א. מצאו בסיס וממד ל- U ול- W .
 ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
 ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ד. האם $U+W=V$?
 ה. האם $U \oplus W = V$?

- (8) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:
 $U = \{A \in V \mid A = A^T\}$, $W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$
 א. מצאו בסיס וממד ל- U .
 ב. מצאו בסיס וממד ל- W .
 ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
 ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ה. $U \oplus W = V$.

- (9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים מממד 2 של R^3 .
 הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

(10) יהי V מרחב וקטורי מממד 10.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 9.

א. הוכיחו כי $U + W = V$.

ב. חשבו $\dim(U \cap W)$.

(11) יהי V מרחב וקטורי מממד 10.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 7.

מצאו את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

(12) יהי V מרחב וקטורי מממד 7.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V , כך ש- $\dim U = 4$, $\dim W = 5$, $(U \not\subseteq W)$.

מצאו את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

(13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . $\phi \neq A, B \subseteq V$.

נגדיר: $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $sp(A + B) = sp(A) \cup sp(B)$.

ב. $sp(A \cup B) = sp(A) \cup sp(B)$.

ג. $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$.

ד. $sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$.

ה. $sp(A \cap B) = sp(A) \cap sp(B)$.

(14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3 , המוגדרים על ידי:

$$U = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}, \quad W = \{(0, b, c)\}$$

הוכיחו כי $U \oplus W = R^3$.

(15) יהי $V = M_n[R]$.

א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.

יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.

הוכיחו כי $U \oplus W = V$.

ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.

יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.

הוכיחו כי $U \oplus W \neq V$.

תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 \quad \text{א. (1)}$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases} , B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2 \quad \text{א. (2)}$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 \quad , B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} \quad , \quad \dim V = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{ג.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ד.} \quad \text{ה. כן.} \quad \text{ו. לא.}$$

$$U+V = sp\{1+x-x^2+2x^3, 2x-5x^2+x^3, x^2, x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{א. (3)}$$

$$B_{U \cap V} = \{5+x+5x^2+8x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{1+x+x^3, x+x^2+x^3, x^2+2x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2, 1+x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{א. (5)}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U) = 2 \quad \text{א. (6)}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(W) = 3$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U+W) = 4 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U \cap W) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. ראו בסרטון.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim U = 1, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim W = 2 \quad \text{א. 7}$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 3 \quad \text{ב. 7}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 0 \quad \text{ג. 7}$$

ד. לא. ה. לא.

א. 8

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim U = 6$$

ב.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 6$$

ג.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(U+W) = 9$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 3 \quad \text{ד. 7}$$

ה. לא.

9 שאלת הוכחה.

10 א. שאלת הוכחה. ב. 8

$$\dim(U+W) = 8, 9 \text{ or } 10, \dim(U \cap W) = 4, 5, 6 \text{ or } 7 \quad \text{11}$$

$$\dim(U \cap W) = 2, 3 \text{ or } 4, \dim(U+W) = 6 \text{ or } 7 \quad \text{12}$$

13 שאלת הוכחה.

14 שאלת הוכחה.

15 שאלת הוכחה.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) \quad \text{נתונים שני בסיסים של } M_2[R]:$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

(4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V .

הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ בת"ל,

אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,

לפי הבסיס B , $\{[u_1], [u_2], \dots, [u_m]\}$, הם בת"ל.

הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (x, y, z - x - y) \quad \text{ב.} \quad (x, y - x - z, z) \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ד.} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (a, b, c - a - b) \quad \text{ב.} \quad (a, b - a - c, c) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (x, y, z, t) \quad \text{ב.} \quad (x, y - x, z - y + x, t - z + y - x) \quad \text{א.} \quad (3)$$

(4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

- (1) יהי V מרחב, ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה; $b \in V$.
הוכיחו כי: $b \in sp(A) \Leftrightarrow sp(A \cup \{b\}) = sp(A)$.
- (2) יהיו u, v, w וקטורים, כך ש- $\{u, v\}$ בלתי-תלוי ליניארי ו- $u \in sp(\{v, w\})$.
א. הוכיחו ש- $w \in sp(\{u, v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z , הקבוצה $\{u, w, z\}$ בלתי-תלוי ליניארי.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u, v, z\}$ בלתי-תלוי ליניארי.
- (3) יהי U מרחב, תהי $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$ ויהי $u \in U$ וקטור כלשהו.
הוכיחו כי אם $u \in sp(A)$, וכן $u \notin sp(A - \{u_n\})$, אז $u_n \in sp(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u)$.
- (4) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלוי ליניארי.
הוכיחו כי $A \cup \{b\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b \notin sp(A)$.
- (5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ ויהי $b \in sp(A)$.
למשוואה $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = b$ אין פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $k \geq n$.
ב. A פורשת את V .
ג. A בהכרח תלוי ליניארי.
- (6) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלוי ליניארי.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $b \notin sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא ת"ל.

- (7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$. נסמן: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $T = \{av_1 + v_2 + v_3, v_1 + av_2 + v_3, v_1 + v_2, av_3\}$. הוכיחו או הפריכו:
- $spS \subseteq spT$.
 - אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a \neq -2, 1$, אז $sp(T) = sp(S)$.
 - $\dim(spT) \leq 2$.
 - $\dim(sp(T)) = \dim(sp(S))$.
- (8) יהי V מרחב ותהיינה $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V . הוכיחו או הפריכו:
- $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$.
 - אם $A \cup B$ בת"ל, אז A, B שתיהן בת"ל.
 - אם $\dim V = m + k$ וגם A, B שתיהן בת"ל, אז $A \cup B$ בת"ל.
 - אם $A \cup B$ בת"ל, אז $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.
- (9) יהי V מרחב ויהיו $U, W \subseteq V$ תמריים. תהיינה $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq U$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ שתי קבוצות בת"ל. הוכיחו כי אם $U \cap W = \{0\}$, אז $A \cup B$ בת"ל.
- (10) יהי V מרחב ויהיו U, W תמריים שלו. הוכיחו כי $U \cup W$ מרחב $\Leftrightarrow U \subseteq W$ או $W \subseteq U$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

- א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A .
- ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
- ג. אם $AB = 0$, אז בהכרח $A = 0$ או $B = 0$.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(12) \text{ נסמן } W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}, U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

- א. $U = W$
- ב. $\dim U = \dim W$
- ג. $U \subseteq W$
- ד. אם $U + W = \mathbb{R}^3$, אז $U \cap W = \{0\}$.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

- א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
- ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
- ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
- ד. A תלויה ליניארית.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,

תהי $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$.

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A = Pv$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות

וזרות של וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם $A \cup B$ תלויה לינארית,

אז בהכרח A תלויה לינארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V , אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V .

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W , אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U, W שני תתי-מרחבים של מרחב V ,

כך ש- $\dim V = n, \dim U = \dim W = n-1$.

אז:

א. $n-2 \leq \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \neq W$, ייתכן ש- $U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש- $V = U + \text{sp}\{v\}$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + \text{sp}\{v\} = V$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

18) נניח כי v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V .

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\}$ והווקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 שונים זה מזה,

אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו- $v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם v_1, v_2 בת"ל וגם v_3, v_4 בת"ל, וכן $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\} = \{0\}$,

אז v_1, v_2, v_3, v_4 הם בת"ל.

19) אם V, W תת מרחבים של מרחב וקטורי U , ומתקיים:

$$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$$

אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

ו. 5

20) V, W תת-מרחבים ממימד 3 של $\mathbb{R}^7$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1, v_2, v_3\}$

בסיס של V , אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(21) אם A מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

- מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A .
- מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A .
- אף תשובה אינה נכונה.

(22) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A .
- אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
- אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
- אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.
- אף תשובה אינה נכונה.

(23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
- שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
- A בלתי תלויה לינארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(24) \text{ יהי } a \text{ מספר ממשי ויהיו } U = Sp\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right\}, W = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

- $U \cap W = \{0\}$ לכל ערכי a .
- $U \cap W \neq \{0\}$ לכל ערכי a .
- $\dim(U \cap W) = 3$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- $\dim(U \cap W) = 1$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(25) \text{ נתונות המטריצות } T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים :

א. $\text{rank}(T) = 1, \text{rank}(R) = 2$

ב. $\text{rank}(R^3 T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של $R^3 T^5$ שווה למרחב השורות של T^5 .

ד. $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה של וקטורים

מ- V ($1 \leq n$). נניח בנוסף ש- $\dim(V) = n$. אזי בהכרח מתקיים :

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V .

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V , אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V , אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות של

וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים :

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם A, B תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3 + 12x^2 - x + 11$,

ביחס לבסיס $\{2x^3 + 3x^2 + 2, x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 + 2\}$, הוא :

א. $(2, 2, -2, 4)$

ב. $(4, -2, -1, 2)$

ג. $(2, -1, -2, 4)$

ד. $(4, -1, 2, 2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

- אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.
- אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
- אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.
- אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c = d\}$$

$$W = \text{sp}\{(1, 0, 1, 1), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

- מצאו בסיס וממד עבור $U, W, U \cap W$.
- עבור תת מרחבים K, L של מרחב וקטורי V , הגדירו את $K + L$.

(31) A מטריצה לא ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax = 0$ פתרון יחיד, אז:

- יש מערכת לא הומוגנית $Ax = b$ ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית $Ax = b$ עם יותר מפתרון אחד.
- יש מערכת לא הומוגנית $A^t y = c$ ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית $A^t y = c$ עם יותר מפתרון אחד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(32) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4 ,

$$\text{כך ש- } \text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(B) = 3.$$

הוכיחו כי $AB \neq 0$.

(33) A מטריצה 3×3 , כך ש- $A^2 = 0$ אבל $A \neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:

- 0
- 1
- 2
- 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(34) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז:

- AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
- AB בהכרח לא הפיכה.
- BA בהכרח הפיכה.
- אם $AB = 0$, אז $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 5$.

(35) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח:

- א. A הפיכה.
 ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.
 ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
 ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A .

תשובות סופיות

(11) א	(12) ב	(13) א	(14) ד
(15) א+ד	(16) ג	(17) א+ג	(18) הוכחה.
(19) ד+ג	(20) ב	(21) ב+ג	(22) ד
(23) ה	(24) ב+ד	(25) ב+ג	(26) א+ב
(27) א	(28) ג	(29) ג	
$B_U = \{(-1, 1, 00), (-1, 010), (1, 001)\}$ $B_W = \{(100-1), (010-1), (0012)\}$ $U \cap W = sp\{(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3)\}$ $\dim U = 3, \quad \dim W = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2$			
(31) ד	(32) הוכחה.	(33) ב	
(34) ד	(35) ד		

אלגברה א

פרק 6 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

94	1. העתקות ליניאריות
96	2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות
99	3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם
103	4. פעולות עם העתקות ליניאריות

העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; \quad T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

16 עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1, 2, 3)$, $T(0,1,1) = (4, 5, 6)$, $T(0,0,1) = (7, 8, 9)$

18 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1, 2, 1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

19 $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1), T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0), T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

20 $T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

$$T(1, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3)$$

21 נתונה העתקה ליניארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, המקיימת:

$$T(0, 1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

22 נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	2) כן	3) לא	4) לא	5) לא
6) כן	7) כן	8) לא	9) לא	10) לא
11) כן	12) כן	13) כן	14) לא	15) לא
16) כן	17) כן	18) כן	19) כן	20) כן

21) שאלת הוכחה. 22) שאלת הוכחה.

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו :

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^3 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר תמונתה נפרשת על ידי: } \{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}.$$

$$(8) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^4 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: } \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow U$.

$$(9) \quad \text{הוכיחו כי אם } \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) \text{ אז הממד של } V \text{ זוגי.}$$

(10) הוכיחו או הפריכו :

א. קימת העתקה ליניארית $T: R^5 \rightarrow R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T: R^4 \rightarrow R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

11 ידוע שהעתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$, מקיימת: $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$, $\dim(W) = 4$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

12 הוכיחו או הפריכו:

- א. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$.
 ב. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ שמקיימת: $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^2)$, $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$, מתקיים $T = T^2$.
 ג. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$, אז בהכרח $T = 0$.

13 מטריצה $A_{m \times n}$ מגדירה העתקה $T: R^n \rightarrow R^m$; $T(x) = Ax$,
 ואילו $A_{n \times m}^T$ מגדירה העתקה $S: R^m \rightarrow R^n$; $S(y) = A^T y$.
 הראו כי $\operatorname{Im}(T) = (\operatorname{Ker}(S))^\perp$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס : $\{(0,0,1,4)\}$, מימד : 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד : 3.

(2) גרעין – בסיס : $\{(0,0,0)\}$, מימד : 0.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד : 3.

(3) גרעין – בסיס : $\{(-7,3,0,1), (1,-2,1,0)\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד : 2.

(4) גרעין – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2.

(5) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$, מימד : 2.

(6) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$, מימד : 3.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע¹, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_3[\mathbb{R}] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכיחו:}$$

- א. אם $\dim(U) < \dim(V)$, אז T לא על.
- ב. אם $\dim(U) > \dim(V)$, אז T לא חח"ע.
- ג. אם $\dim(U) = \dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

- א. אם $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
- ב. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ג. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ד. אם $\dim(V) < \dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

¹ הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
הוכח או הפוך:

א. אם $\dim(V) > \dim(W)$ ואם $T(v_1) = 0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.

ב. אם $\dim(V) > \dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W .

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W , אז T חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T היא איזומורפיזם אז $m = n$.

ב. אם $m > n$, אז T חח"ע.

ג. אם $T(v) = Av$ לכל v , אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T על, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ג. T היא איזומורפיזם.

ד. T היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m \times n}$,

כך ש- $T(v) = Av$ לכל $v \in R^n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v \in \text{Ker}(T)$, אז $v \in \text{rowsp}(A)$.

ב. אם $v \in \text{rowsp}(A)$, אז $v \in \text{Ker}(T)$.

ג. אם $v \in \text{colsp}(A)$, אז $v \in \text{Im}(T)$.

ד. אם $\text{Ker}(T) = \{0\}$, אז $n < m$.

13 נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^n$, ונתונה מטריצה A ,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_3[R] \rightarrow R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \rightarrow R$.

15 נתונה העתקה ליניארית $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T .

תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = 3$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, \dots, -1+x^n\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$(15) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Im}(T) = M_n[R]$$

$$\text{ב. חח"ע ועל. } T^{-1}(A) = A^T \text{ ג.}$$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות 1-9, תהייה $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ו- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x, y, z) = (x - z, y)$, $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- | | | | | |
|-------------|--------------|----------------|-----------|----------|
| (1) $S + T$ | (2) $4S$ | (3) $4S - 10T$ | (4) TS | (5) ST |
| (6) T^2 | (7) T^{-1} | (8) T^{-2} | (9) S^2 | |

תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2) $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5) $ST: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $St(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$
- (6) $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7) $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x, -y, 17x - 4y - z)$
- (8) $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.

אלגברה א

פרק 7 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

104	1. מטריצה שמייצגת העתקה.....
110	2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס.....
113	3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה.....

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה :

כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים). לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$, נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:

$$1. [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$$

$$2. [T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$$

$$3. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2}$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3) נתונה העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3 , ויהי T אופרטור לינארי על R^3 .

$$\text{נתון כי: } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו- } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לפי הבסיס:}$$

(6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R] \rightarrow P_3[R]$, $D(p(x)) = p'(x)$, לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

(7) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$. ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B = \{1, 1-x, x+x^2\}$,

$$. [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T(p(x))$.

* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את $T^2(p(x))$.

(10) תהי $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית,

כך שמתקיים $T(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.

נתון כי B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $\text{rank}(A) = n$.

הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.

11 נתונה העתקה לינארית $T: P_3[R] \rightarrow P_3[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

12 נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

13 נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(a + bx + cx^2) = b + cx$.

הוכיחו ש- T העתקה נילפוטנטית.

14 יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B = \{1, x, x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית

$$T(p(x)) = xp''(x) - p'(x); T: V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\text{Im}(T), \text{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15 נתונות שתי העתקות לינאריות $S, T: V \rightarrow V$.

יהי $B = \{u, v, w\}$ בסיס ל- V .

$$\text{נתון כי: } \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

א. הוכיחו כי: $\text{Ker}(S) = \{0\}$, $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u), T(v), T(w)\}$ פורשת את V .

ד. קבעו האם $\{S(u), S(v), S(w)\}$ פורשת את V .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג. הוכחה.}$$

$$\text{ד. לא.} \quad \text{ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.} \quad \text{ו. 0 עי"ע יחיד; הוי"ע שלו: (1, -1, 1).} \quad \text{ז. לא.}$$

$$(3) \quad T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$$

$$(4) \quad [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6) \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$$

$$(9) \quad \text{א. } T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c) + (2a+4c)x + (2a+b+2c)x^2$$

$$\text{ב. } T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2$$

$$(10) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(11) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\{-x+x^3, -1+x^2\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\{1+x^2, x+x^3\}$$

$$\text{ב. } T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

$$(12) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{ב. } \text{tr}(T) = 15, \quad \det(T) = 0, \quad \text{rank}(T) = 2$$

$$(13) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(14) \quad \text{א. } [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \quad \dim(\text{Im}(T)) = 1$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1, x^2\}, \quad \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

$$(15) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

(1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות,

ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T(x, y) = (x + y, y, -x)$, $T : R^2 \rightarrow R^3$

ב. $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$, $T : R^4 \rightarrow R^2$

(2) נתונה העתקה לינארית $T : R^4 \rightarrow R^2$; $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$

מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2 .

(3) תהי $T : R^3 \rightarrow R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$$

חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס

$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ של R^3 , לבסיס $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$ של R^2 .

כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

(4) עבור העתקה לינארית $T : R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

כאשר: $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(5) עבור העתקה לינארית $T : R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

כאשר $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(6) נתונה העתקה לינארית $T : P_3[R] \rightarrow P_2[R]$.

המטריצה שמייצגת את ההעתקה T , מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$

לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(7) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$, אשר המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V) = n$, ויהיו B_2, B_1 בסיסים סדורים של V . הוכיחו או הפריכו:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{א.}$$

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{ב. אם } T \text{ העתקת זהות, אז בהכרח}$$

$$[T]_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} = I_n \quad \text{ג. אם } T \text{ העתקת זהות, אז בהכרח}$$

(10) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a, b, c)$.

ג. חשבו את $T^4(a + bx + cx^2)$.

(11) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

(12) חשבו את ST ואת TS , עבור ההעתקות:

$$S(x, y) = (x - y, x + y, y) \quad ; \quad S: R^2 \rightarrow R^3$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow R^2$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ א. } [T] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

$$(2) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [T] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

$$(5) \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$(6) \quad T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (b + 2c)1 + (2c + 6d)x + (3d)x^2$$

$$(7) \quad T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

$$(8) \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

(9) שאלת הוכחה.

$$(10) \quad T^{-1}(a, b, c) = (a - b + c)1 + (b - c)x + cx^2 \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

ג. לא ניתן.

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$\text{ב. } T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad ST(a + bx + cx^2) = (a + c, a + 2b - c, b - c)$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית, $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P , שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W .
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית, $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

(3) מצאו העתקה לינארית T , שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x, y, z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי מממד n .

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

- א. הוכיחו ש- T הפיכה אם"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.
 ב. הוכיחו כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1} ?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א. } v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1). \quad \text{ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x = 0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1). \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), v_{\lambda=2} = (1, 0, 1). \quad \text{ב. ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ג. } T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad \text{א. } [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. } v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד. } T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א. } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } v_{\lambda=1} = 1. \quad \text{ג. לא ניתנת לליכסון.}$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

אלגברה א

פרק 8 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

116	1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג.
121	2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n.
126	3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות.
128	4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות.
129	5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה.
134	6. שימושי הדטרמיננטה.

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ב.} \end{array} & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{א. (7)} \end{array} \\ \\ & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ג.} \end{array} \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \\ \text{(8)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \\ \text{(9)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \\ \text{(10)} \end{array}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \\ \text{ג.} \end{array} & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \\ \text{ב.} \end{array} & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \\ \text{א. (11)} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכיחו כי:}$$

$$\text{18) חשבו: } \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- k ($1 \leq k \leq n$).
- תהי C מטריצה הזוהה למטריצות A ו- B אך נבדלת מהן בשורה ה- k , שם היא שווה לסכום השורה ה- k של A והשורה ה- k של B .
- הוכיחו כי $|A| + |B| = |C|$.

$$\text{ב. חשבו: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $(k-1)^4 (k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0, \dots, a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

(3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij} = |i - j|$.

(5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$.

(9) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של k המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את $D_n = |A_{n \times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n = |A_{n \times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3, b=1, c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

(13) נתונה מטריצה $A_{n \times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:

מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה

הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה B .

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min\{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \quad (18) \text{ חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר } n, \text{ כאשר } n \geq 2$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0.$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3) n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0.$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4$, $|B|=2$. חשבו:

(1) א. $|ABA^{-1}B^T|$ ב. $|4A^2B^3|$

(2) א. $| -A^{-2}B^T A^3 |$ ב. $| -2A^2 A^T \text{adj} B |$

(3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$. הוכיחו: $|A|=|B|$.

(4) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$. חשבו את $|B|$.

(5) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$. חשבו את $|A|$, $|B|$.

(6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

(7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש- $|A|=0$.

(8) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$, ו- B הפיכה. מצאו את n .

(9) נתון: $\det(A_{n \times n})=2$, $\det(B_{n \times n})=\frac{1}{3}$.

חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

תשובות סופיות

(1) א. 4 ב. 2^{13}

(2) א. -8 ב. -2^{11}

(3) שאלת הוכחה.

(4) $\frac{81}{32}$

(5) $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9) 4^n

(10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{lll} x+2z+5t=8 & x+z=3 & x+2y=5 \\ -2x-6y=-8 & 4x+y+8z=21 & 3x+4y=11 \\ 5x+3y-7z+4t=5 & 2x+3z=8 & \\ 2x+5y+44z=51 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

$$(4) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות: } x+y+kz+t+r=1$$

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$, x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-
 $x=y=z=t=r$.

(5) יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $(A^t A)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4$$

$$\text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $(A^{-1})_{1,5}$.

(5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל- ± 1 , כאשר כל איברי

A ו- A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,

אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.

הוכיחו ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- A הפיכה.

הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

(8) נתון כי A, B הפיכות ו- C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $AB=0$, אז $A=0$.
- ב. אם $|AB|=0$, אז $A=0$.
- ג. אם $|AB|=0$, אז $|A|=0$.
- ד. אם $AB=0$, אז $|A|=0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. $|AB|=|BA|$
- ב. $\text{adj}(AB) \neq \text{adj}(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3 \times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז $|\text{adj}(A) \cdot B|$ שווה ל:

- א. $4^3 |A|^3$
- ב. $4^3 |B|^3$
- ג. $4 |B|^3$
- ד. $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $|A| = 4$
- ב. A הפיכה.
- ג. $\text{adj}(A) = 0$
- ד. $|A| = 0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז :

- בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$.
- ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 2$, כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, אז בהכרח מתקיים :

- $|A| = n! - 1$.
- A הפיכה.
- $\text{adj}(A)$ לא הפיכה.
- אם $n = 4$, אז $|\text{Adj}(A)| > 214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 4$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- אם $\text{rank}(A) = n - 2$, אז בהכרח $\text{adj}(A) = 0$.
- אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $\text{adj}(A)$ אנטי-סימטרית.
- אם $\text{adj}(A) = 0$, אז בהכרח $A = 0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז $\text{adj}B$ מתקבלת מ- $\text{adj}A$ ע"י :

- הכפלת השורה הראשונה פי 4.
- הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.
- הכפלת העמודה הראשונה פי 4.
- הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.
- אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$.

חשבו $|\det(A)|$.

19 נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
 הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$.

ג. $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$.

תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{א. } 240 \quad \text{ב. } 0.5$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם $k = 0$.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) ד

(13) שאלת הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) שאלת הוכחה.

(17) ד

$$(18) \quad \frac{-5}{2^{\frac{1}{2}}}$$

(19) שאלת הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- (1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה :
 1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו : $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות : $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו : $(1,2), (3,4), (5,8)$
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- (1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2

אלגברה א

פרק 9 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

135	1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב
139	2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה
151	3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים
155	4. דמיון מטריצות

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- א. מצאו מטריצה אופיינית.
- ב. מצאו פולינום אופייני.
- ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצאו וקטורים עצמיים.
- ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כ. מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009} .
- ט. מצאו את הפולינום המינימלי.
- י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
- פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$.

מצאו את המטריצה A .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 ,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = x(x-1)^2 \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי : 1.

ד. $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} \text{א.} & \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \\ \text{ב.} & p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \end{matrix}$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$x=-4 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=2 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=6 - \text{ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

$$(5) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \text{ערכים עצמיים: } x=3, \text{ וקטורים עצמיים: } v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(7) \quad \text{ערכים עצמיים: } x_1=2, x_{2,3}=3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) \quad v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad \text{אין כזו מטריצה.}$$

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

(1) נתונה מטריצה ריבועית A .

הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

(2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.

$$B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$$

הוכיחו ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ .
יהי $p(x)$ פולינום.

הוכיחו ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

(3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$$

2. נתון כי $\text{tr}(A) = 4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .

נניח כי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ הפולינום האופייני של A .

הוכיחו כי $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$, $a_0 = (-1)^n |A|$.

(4) נתונה מטריצה A מסדר n .

הוכיחו:

א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I) < n$.ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל- $n - \text{rank}(A - \lambda I)$.ג. אם $\text{rank}(A) = k < n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n - k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.(5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\text{rank}(B) = 1$.

הוכיחו:

א. 0 ע"ע של המטריצה B .

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.

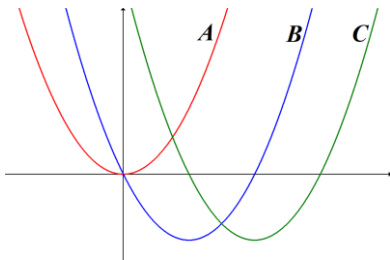
ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$.(6) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda = k \neq 0$.הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .(7) תהינה A ו- B מטריצות מסדר n המקיימות $AB = BA$.נניח כי $\text{rank} A = n - 1$ ו- v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B .(8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$.א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A .ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .ד. קבעו האם A הפיכה?ה. הוכיחו כי $(A - 10I)^2(A - 4I) = 0$. האם ייתכן ש- $A = 4I$ או $A = 10I$?(9) תהי A מטריצה מסדר 5×5 , כך ש- $\det A = 12$ וגם $\rho(I + A) = \rho(2I - A) = 3$.הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

10 נתונה מטריצה $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ (מטריצה עם שורה אחת). מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה $A^T A$ (הניחו $n > 1$).

11 תהי A מטריצה מסדר 3×3 , כך ש- $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I + A) < \rho(4I - A)$. הוכיחו ש- A לכסינה.

12 תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I - A) > \rho(5I + A)$. ידוע גם ש- $\text{span}\{(3, 1, -1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\vec{x} = 2\vec{x}$. הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A .



13 באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A, B ו- C מסדר 2. ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון. מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.

14 תהי A מטריצה ממשית מסדר 3. נתון כי $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$ וכי $\lambda = 1$ ערך עצמי של המטריצה. הוכיחו כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

15 יהיו $A, B \in M_2[\mathbb{R}]$. ידוע כי $A = AB - BA$. הוכיחו כי $A^2 = 0$.

16 תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $\text{tr}(A) \neq -1$.

א. הוכיחו כי $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{1 + \text{tr}(A)} A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

(17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .
ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

ב. $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

הערה:

הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

(18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

- א. אם $tr(A) = 3$, $tr(A^2) = 5$. מצאו את $|A|$.
ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A) = 5$ מצאו את $tr(A^2)$.
ג. אם $|A| = 5$ ואם ל- A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

(19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A| = 1$.

- א. אם $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A .
ב. ידוע כי $A^{100} = aA^2 + bA + cI$.
מצאו את a, b, c .

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.
ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

(21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t) = (t-2)^2 (t+1)^2 (t-5)^8 (t+3)^7$.

- א. מה הדרגה של A ?
ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $AP = PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A - 5I$.

(22) תהי $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את העי"ע של A על ידי α ו- β .
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha = \beta$, והוכיחו ש- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה

$$p(t) = t^4 + 2it^3 + 3t^2.$$

הוכיחו שהמטריצה $A^2 - 3A + I$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(24) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t) = t^3 - 2t + 5$.
הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^3$ יש למערכת $Ax = b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $\text{tr}(A)$.
ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A \neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t) = (t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\text{tr}(A - 2I)$.

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו ש- λ עי"ע של A אם ורק אם $A - \lambda I$ לא הפיכה.
ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t) = (t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n \geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C = A^2 + A - 2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D = A^2 - 2I$ הפיכה.

(26) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.
ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.
ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n = 0$.
ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n , ותהי $B = A - I$.
מצאו את $|B|$.

(27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים. בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(28) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$. חשבו את $|A|$.

(29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים. א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

(30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B , מסדר n . הוכיחו או הפריכו: א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B , אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

(31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k , המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A , מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

(32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 . ידוע כי v_1, v_2 הם ו"ע של A , שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda = 1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda = -1$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1, v_2 בת"ל, אז $A^{2018} = I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרף לינארי של הווקטורים v_1, v_2 .

(33) הוכיחו או הפריכו :

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.
 ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

(34) נתונות שתי מטריצות מסדר n : מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו :

- א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.
 ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.
(35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n , שעבורן v הוא ו"ע.
 א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n .
 ב. עבור $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = 2$, מצאו בסיס ל- W .

(36) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

- א. עבור $a = 3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A .
 ב. עבור איזה ערך של a , הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A ?
 ג. יהי $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$ וקטור שאינו ו"ע של A .
 הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

**(37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2 = A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.**

- א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
 ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A .
 ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.
 ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.
 ה. הוכיחו כי $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

- (38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:
- א. קיים תת מרחב $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$ של R^5 , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$.
 - ב. אם u_1, u_2 ו"ע של A , אז גם הווקטור $u_1 + u_2$ ו"ע של A .
 - ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
 - ד. אם A לכסינה מעל R , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
 - ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R .

- (39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

- א. $\text{rank}(A) = 4$.
- ב. A לכסינה.
- ג. $\text{tr}(A) > 10$.
- ד. $|A| \leq 127$.
- ה. קיים וקטור עצמי v של A , כך ש- $A^2v = 2v$.

- (40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם v וקטור עצמי של A , אז v וקטור עצמי גם של A^n .
- ב. אם v וקטור עצמי של A^n , אז v וקטור עצמי גם של A .
- ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.
- ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

- (41) נתונה מטריצה A , שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x) = (x-1)^2$. הוכיחו כי המטריצה $A^2 + 4A + 3I$ הפיכה.

- (42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

- (43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A . הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

- (44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n .
 נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.
 צריך להוכיח: $A^2 = I$.

- (45) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1. הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ-0.
 ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n . הוכיחו ש-0 ע"ע של A , ושהוא הע"ע היחיד שלה.

(46) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

- א. הוכיחו ש- A לכסינה.
 ב. האם המטריצה $B = 4A^{11} - 10A + 20I$ הפיכה?
 (47) תהי $A_{n \times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2 + I = 0$.
 הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':
 א. A הפיכה.
 ב. A לא ניתנת לליכסון.
 ג. A לא סימטרית.
 ד. n זוגי.
 ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

- (48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.
 ידוע ש- λ ע"ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v .
 א. הוכיחו כי $\lambda + c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A + cI$ עם וקטור עצמי v .
 ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.
 ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.

$$(49) \text{ נתונה מטריצה } A \text{ על ידי } a_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ a & i \neq j \end{cases} \text{ כאשר } 1 \leq i, j \leq n.$$

חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A .
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

(50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n .
הוכיחו:

- א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.
ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A .

(51) תהי A מטריצה מסדר n .
הוכיחו:

- א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.
ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I - A| > 0$.

(52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

(53) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.
ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

(54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

(55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. הערך העצמי הוא 260.
- (3) א.2. $|A| = 4$
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) $D = \text{diag}(0, 0, k)$
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א. $p(\lambda) = (\lambda - 10)^2(\lambda - 4)$
- ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.
- ג. $D = \text{diag}(10, 10, 4)$ ד. כן. ה. לא.
- (9) $\text{diag}(-1, -1, 2, 2, 3)$
- (10) 0 ו- $\text{tr}(A)$.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) $\text{diag}(2, -5, -5), \text{diag}(-5, 2, -5), \text{diag}(-5, -5, 2)$
- (13) $\text{rank}(A) = 0, \text{rank}(B) = 1, \text{rank}(C) = 2$
- (14) 0, 1, -1
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. $|A| = 2$ ב. $\text{tr}(A^2) = 25$ ג. $\text{tr}(A) = 6$
- (19) א. $1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ב. $a = 0, b = 1, c = 0$
- (20) א. $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$
- (21) א. 19 ב. 11
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) $\text{diag}(1, 1, -3i, -8 + 9i)$
- (24) א. $|A| = -5$ ו- $\text{tr}(A) = 0$ ב. $\text{tr}(A - 2I) = -3$
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) ה. $|B| = (-1)^n$
- (27) $|A| = -384$

$$m_M(x) = (x-2)^2(x-7) \quad (28)$$

$$p_M(x) = (x-5)^2(x-6)(x-7) \quad \text{א.} \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

$$4+k \quad \text{ב.} \quad (31)$$

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ב.} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (36)$$

$$p(x) = x, \quad p(x) = x-1, \quad p(x) = x(x-1) \quad \text{ב.} \quad (37)$$

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

(41) שאלת הוכחה.

(42) שאלת הוכחה.

(43) שאלת הוכחה.

(44) שאלת הוכחה.

(45) שאלת הוכחה.

(46) שאלת הוכחה.

(47) שאלת הוכחה.

(48) שאלת הוכחה.

$$|A| = (b-a)^{n-1} [a(n-1) + b] \quad (49)$$

(50) שאלת הוכחה.

(51) שאלת הוכחה.

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

$$a_n = 2^{n+1} - 3^n \quad (54)$$

$$a_n = \frac{1}{3} (3 + (-1)^n + 2^{n+1}) \quad (55)$$

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

(1) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

- א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?
 ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

(2) נתון $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

(3) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר $a \in \mathbb{R}$.

- א. מצאו את כל ערכי a , כך ש- A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
 ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(4) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, כאשר $m \in \mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m , המטריצה A לכסינה?
 כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(5) נתון $A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

- א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?
 עבור ערך ה- k שמצאת בסעיף א:
 ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.
 ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- בלבד.
 ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

$$(7) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{R}.$$

- א. מצאו את כל הערכים של a , עבורם A לכסינה.
 ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל- A .

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}.$$

- א. עבור כל ערך של a , מצאו את הערכים העצמיים של A .
 ב. עבור אילו ערכי a , המטריצה A לכסינה?
 בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה הבאה מעל } \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix},$$

- כאשר a, b, c מספרים ממשיים המקיימים $a - b + c = -1$.
 א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.
 ב. נתון כי $a = b > 1$.
 הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.
 ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + a < 0$.
 הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

- (10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a, b , כך שהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ לכסינה.}$$

$$(11) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

א. עבור אילו ערכי a, b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש- A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש- A דומה לה.

$$(12) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix} \text{ , כאשר } a, b \in \mathbb{R}$$

מצאו את כל הערכים של a ו- b , כך ש- A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(13) \text{ נתונה מטריצה ממשית } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ , כאשר } a \text{ פרמטר ממשי.}$$

ידוע ש- $\lambda = -2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a ?

ב. האם המטריצה לכסינה?

$$(14) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ , כאשר } a \in \mathbb{R}$$

האם קיימים ערכי a , כך ש- A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a , רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

$$(15) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ a & -a & a \end{pmatrix} \text{ , מעל } \mathbb{R}$$

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $k \neq 4$. ב. $D = \text{diag}(4, k, k)$
- (2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k .
- (3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = \text{diag}(1, -a^2, a^2)$
- (4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = \text{diag}(m-1, m-1, m+2)$
- (5) א. $k=3$. ב. ר"א $= 1$. ר"ג $= 1$. ג. $D = \text{diag}(2, -3, -5)$
- (6) א. $a=3, b=-4$ או $a=1, b=0$. ב. המטריצה לא לכסינה.
- (7) א. A לכסינה עבור כל a . ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = \text{diag}(a, 1, 2)$.
- (8) א. אם $a \neq 0, 2, -1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2, 2a, a+2$.
 אם $a=0$, הע"ע הם 0 ו-2.
 אם $a=-1$, הע"ע הם 1 ו-2.
 אם $a=2$, יש ע"ע אחד והוא 4.
 ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2, -1$.
 במקרה זה היא דומה למטריצה $D = \text{diag}(a^2, 2a, a+2)$.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) אם $a=b=0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b=0$, אז A לכסינה.
- (11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:
 כאשר $a \neq 0, 1$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(1, 0, a)$
 או כאשר $a=0$ וגם $b=0$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(0, 0, 1)$
 או כאשר $a=1$ וגם $b=-\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(0, 1, 1)$
- (12) A לכסינה אם ורק אם:
 1. $b \neq 2, 3$ ואז $D = \text{diag}(3, 2, 2, b)$
 או 2. $b=2$ וגם $a=0$ ואז $D = \text{diag}(3, 2, 2, 2)$
 או 3. $b=3$ וגם $a=0$ ואז $D = \text{diag}(3, 3, 2, 2)$
- (13) א. $a=3$. ב. כן.
- (14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a=0$ ודומה ל- $D = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$.
 מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = \text{diag}(a, -a, ai, -ai)$.
- (15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a=0$. ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a .

דמיון מטריצות

שאלות

(1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A| = |B|$

ב. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP = B$, אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b , כך שהמטריצה A דומה למטריצה B ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C . הוכיחו כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B , אז B דומה ל- A .

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

ד. אם A דומה ל- B ושתייהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1} .

ה. אם A דומה ל- B , אז A^k דומה ל- B^k , לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B , אז A^T דומה ל- B^T .

ח. אם A דומה ל- B , אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B , אז $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$.

הערה – $\text{Nullity}(A) =$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

(6) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א. $\text{rank}(A)$

ב. $\dim \text{Ker}(A)$

ג. $\text{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$.

הערה $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

(9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. A ו- B שתי מטריצות הדומות למטריצה C .
 הוכיחו כי A דומה ל- B .

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

(11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) נתונות שתי מטריצות $A, B \in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי A ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

B דומה ל- A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A .

(13) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של a ו- b המטריצות A ו- B דומות?

(14) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ כאשר $a \in \mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = B$.

(15) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

(16) תהיינה A, B מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = k$, כאשר

k מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו- B .

ב. הוכיחו ש- A ו- B דומות.

(17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t) = (t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I + A) = 1$.

- א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2 .
 ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4 - 10A + 9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $(A^4 - 10A + 9I)\underline{x} = \underline{0}$.

(18) נתון כי $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- A דומה ל- B ו- C דומה ל- D . הוכיחו או הפריכו:

- א. $A+C$ דומה ל- $B+D$.
 ב. AC דומה ל- BD .

(19) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.
 ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו: אם A דומה ל- B אז $A - kI$ דומה ל- $B - kI$.
 ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(21) נתון כי A ו- B מטריצות דומות.

הוכיחו של- A ו- B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4.

- נתון שהפולינום $q(t) = t^4 - 7t^2 + 10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A . מצאו את הפולינום האופייני של A .
 א. הוכיחו ש- A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.
 ב. מצאו את $\text{tr}(A^2)$.

(23) נתונות שתי מטריצות $A, B \in M_n(R)$.

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2 .

ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) לא.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) $x=0$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) $a=0$ ו- $b=-2$

(14) כן, עבור $a=\pm 2$

(15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

(16) א. $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.

(17) א. $p(x) = (x-1)(x-16)^2$ ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

(18) שאלת הוכחה.

(19) שאלת הוכחה.

(20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. $D = \text{diag}(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$ ב. $\text{tr}(A^2) = 14$

(23) שאלת הוכחה.

אלגברה א

פרק 10 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

1. שדה השאריות מודולו p 160

שדות – שדה השאריות מודולו p

$$(1) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות}$$

- א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.
 ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.
 ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.
 ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

$$(2) \quad \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת מעל } \mathbb{Z}_5$$

$$(5) \quad \begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת מעל } \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(6) \quad \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(7) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_3.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(10) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , המטריצה הפיכה.

$$(11) \quad \text{נתונה הקבוצה הבאה מעל } \mathbb{Z}_7:$$

$$\{(k, 1, 1, 1, 1), (1, k, 1, 1, 1), (1, 1, k, 1, 1), (1, 1, 1, k, 1), (1, 1, 1, 1, k)\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

$$(12) \quad \text{במרחב } (Z_5)^4, \text{ מעל השדה } Z_5, \text{ נגדיר שני תתי-מרחבים, } U \text{ ו- } W:$$

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$$

$$W = \text{sp}\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים U ו- W , $U \cap W$, $U + W$, U, W .
מה מספר האיברים בכל מרחב?

13 הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T : M_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$,

המקיימת את התנאים הבאים :

1. $\{0\} \neq \text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T)$

2. $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$

3. $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14 נתונה העתקה ליניארית $T : P_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$

המוגדרת על ידי $T(p(x)) = (x + \bar{3})p(x) + p(\bar{0})(x^3 + \bar{2})$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T ,

מהבסיס $E_1 = \{\bar{1}, x, x^2\}$ לבסיס $E_2 = \{\bar{1}, x, x^2, x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Im}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Ker}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

$$(1, 2) \quad \text{ד.} \quad (2, 1), (4, 0), (0, 2), (3, 3) \quad \text{ג.} \quad (1, 6) \quad \text{ב.} \quad (1, -1) \quad \text{א.} \quad (1) \quad \text{1}$$

$$(0, 3, 0) \quad (2)$$

$$(1, 2, 1) \quad (3)$$

$$(0, 3, 0) \quad (4)$$

$$(1, -3, 2, 2) \quad (5)$$

$$\text{פתרון יחיד : } k=0, k=2, k=1 \text{ , 9 פתרונות : } k=1 \quad (6)$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

$$\text{פתרון יחיד : } k=0, k=2, k=4, k=5, k=6 \text{ , 5 פתרונות : } k=3 \text{ , אין פתרון : } k=1 \quad (7)$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$k=0, k=2, k=4 \quad (10)$$

$$\text{עבור } k=1, k=3 \text{ , הווקטורים תלויים ליניארית,} \quad (11)$$

ועבור $k=0, k=2, k=4, k=5, k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

$$B_U = \{(4, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0)\} \text{ , מספר האיברים : } 25 \quad (12)$$

$$B_W = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2)\} \text{ , מספר האיברים : } 25$$

$$B_{U+W} = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 4, 0)\} \text{ , מספר האיברים : } 125$$

$$B_{U \cap W} = \{(2, 4, 2, 1)\} \text{ , מספר האיברים : } 5$$

$$(13) \text{ ההעתקה הבאה :}$$

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$; 25, B_{\text{Im}T} = \{x + x^3, x^2 + 2x^3\}, \quad \dim \text{Im}T = 2 \quad \text{ב.} \quad [T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$; 5, B_{\text{Ker}T} = \{9 - 3x + x^2\}, \quad \dim \text{Ker}T = 1 \quad \text{ג.}$$