אינפי 3

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם 1
2. שדות משמרים - אי תלות במסלול 6
3. משפט גרין 11
4. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים 14
5. אינטגרלים כפולים 35
6. שימושי האינטגרל הכפול 41
7. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות) 44
8. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן) 49
9. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 51
10. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות 54
11. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן) 58
12. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם 59
13. משפט הדיברגנץ (גאוס) 62
14. משפט סטוקס (גרין במרחב) 64
15. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל) 66
16. פונקציות גמא ובטא (פונקציות אוילר) 75

אינפי 3

פרק 1 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם 1
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים 5

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$; $f(x,y)=1-x^2$

2) $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$; $f(x,y)=x$

3) C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$. ; $f(x,y)=x+y$

4) C היקפו של ΔOAB : $B(1,0),\ A(0,1),\ O(0,0)$. ; $f(x,y)=x+y^2$

בשאלות **5-6** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $C:x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$; $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

6) $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$; $f(x,y,z)=x^3+3z$

7) חשבו את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשבו את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשבו:

9) $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\ ;\ \int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$

10) $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1\ ;\ \int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$

11) חשבו $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו-C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

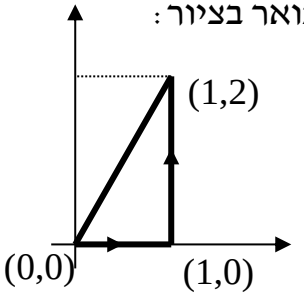
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

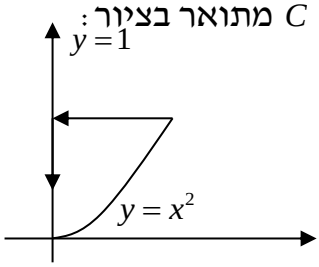
ג. הקווים הישרים מ-$(1,1)$ ל-$(1,2)$ ומשם ל-$(4,2)$.

ד. העקום $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

13) חשבו $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



14) חשבו $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,
חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ-$(0,0,0)$ ל-$(0,0,1)$, משם ל-$(0,1,1)$ ומשם ל-$(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו-$(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשבו את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ-$(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ-$(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשבו את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,
על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}\ \ (0\le t\le 1)$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0,y_0) לנק' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0,y_0,z_0) לנק' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 2 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול 6

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבעו האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצאו פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^y\mathbf{i}+ye^x\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^2\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dy$.

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+\left(x^2-4xy^3\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^y\mathbf{i}+xe^y\mathbf{j}$. מצאו את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1: x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3: (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשבו:

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $g=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\right\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$,
חשבו את $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$.

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $f=\frac{x}{x^2+y^2}$, $g=\frac{y}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)$$

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $=15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

12) א. 2π ב. -2π ג. 0

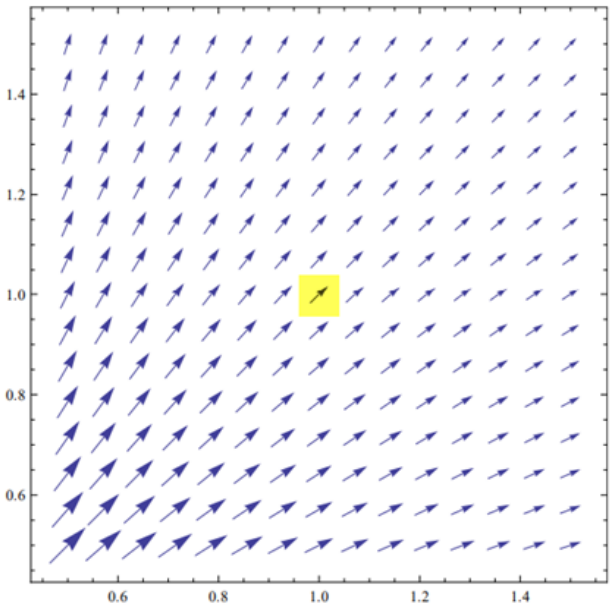
13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

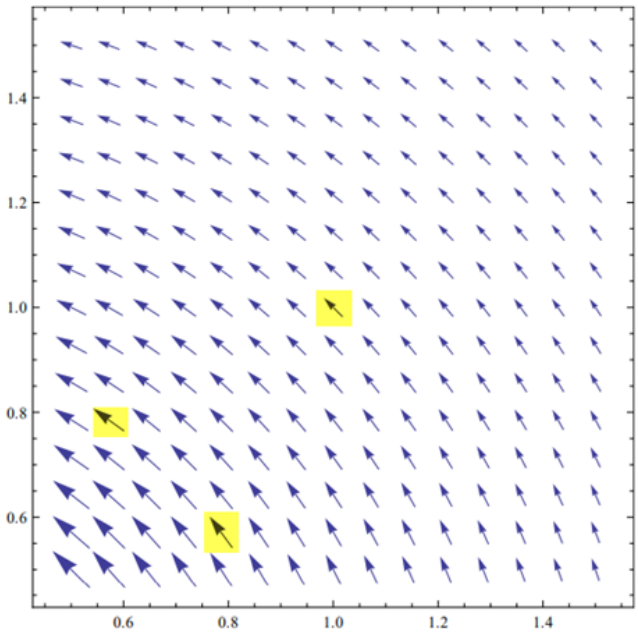
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 3 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין 11

משפט גרין

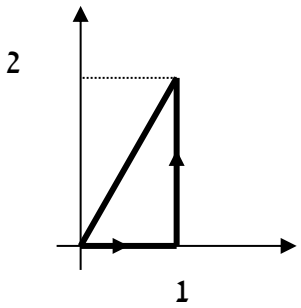
שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט גרין.

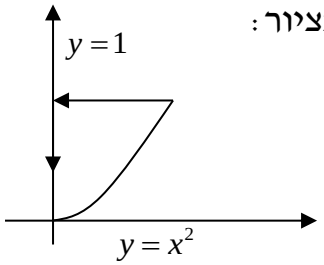
כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x-f_y\right)dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשבו את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=x^2$, $y=8-x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,
כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\geq 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$
לנקודה $(-2,0)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,
נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.

ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C\left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,
כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,
החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.

2) הערך המשותף הוא 0.8.

3) הערך המשותף הוא 8.

4) 1.5π

5) $0.5\sin 64$

6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$

7) א. הוכחה. ב. πab

8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.

9) הוכחה.

10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 4 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

1. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת..... 14
2. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב..... 16
3. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 17
4. וקטורים..... 19
5. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי..... 26

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $\left|(u+v)\times(u-v)\right|$.

5) נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.
הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים
הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של** $\mathbf{F}$ המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (f,g,h)$$

$$\text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z$$

מגדירים את **ה- curl של** $\mathbf{F}$ המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\mathbf{curlF} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f,g,h)$$

$$\mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.

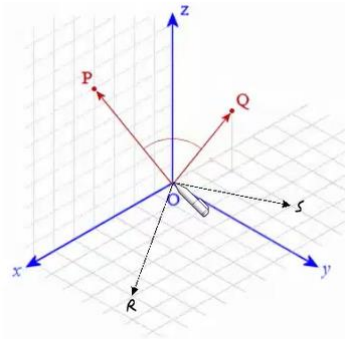
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וקטורים

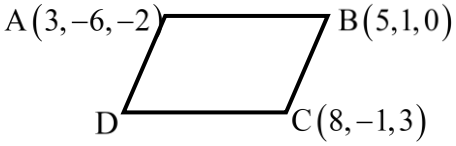
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

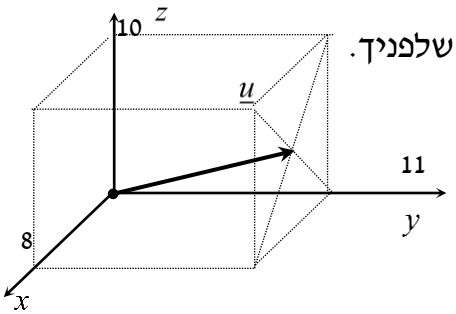
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



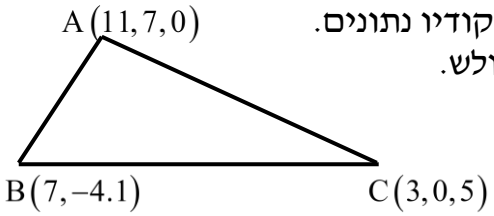
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



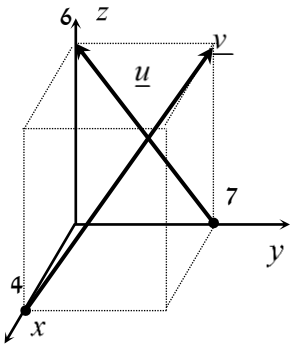
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



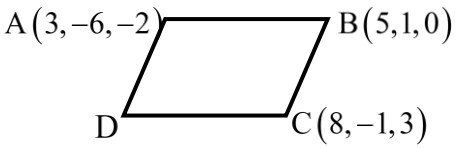
7) מצאו את x, y ו-z, אם נתון ש-$\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$,
$\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos \pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to 1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int\limits_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב-$t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d\,|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב-$t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב-$t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב-$t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה **(T)**, נורמל היחידה **(N)** והבינורמל **(B)** של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו-$r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל-$t=2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $r(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\big(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\big)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)
ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3,t-5,t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18) הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19) חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r\left(t\right)=\left(t^2,0,t\right)$.

20) וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=\left(2,-1,-10t\right)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

21) וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=\left(8\cos 4t,8\sin 4t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

22) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.

א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C.

ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.

כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a,b) ורדיוס R.

23) נתון העקום $r(t)=(4\cos t,3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\dfrac{\left|y''(x)\right|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

26) נתון העקום $y=\dfrac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

28) נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\dfrac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

30) נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\big(x(t),y(t)\big)$.

הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ \ (a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.

ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא

$$k(\theta)=\frac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

34) חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<t\le 4$ ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן ה. כן.

4) א. $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right),\ \left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6},\ \frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$
ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$
ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\ N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\ B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

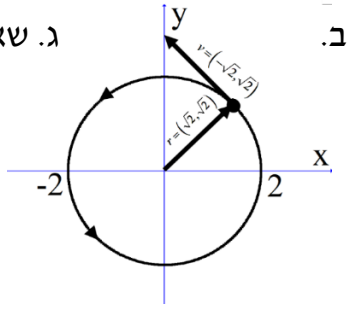
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

16) $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}_{rad}$

18) שאלת הוכחה.

19) $\kappa = \frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\rho = \frac{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$

20) $\rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$

21) $\kappa = \frac{2}{13}$, $\rho = 6.5$

22) א. $\kappa = 1/R$, $\rho = R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0, \pi, 2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) א. $\rho(x) = \frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2x^2\,|\,x\,|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2=2/9$.

28) א. $x=\frac{9}{8}$, $y=\pm 3$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2=(125/16)^2$

29) $\kappa = \frac{1}{R}$, $\rho = R$

30) א. $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+\left(y+1\right)^2=\frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

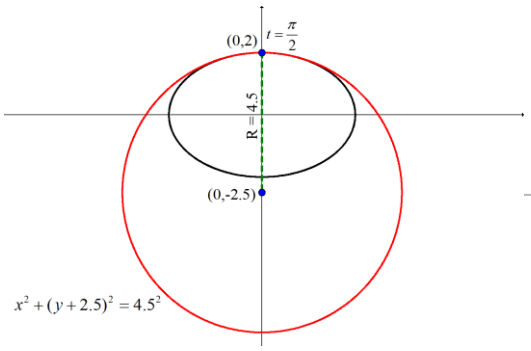
31) שאלת הוכחה.

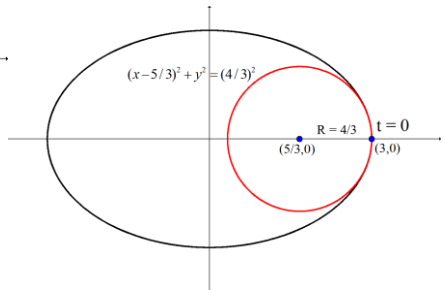
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2} \qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

32) א.

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a} \qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



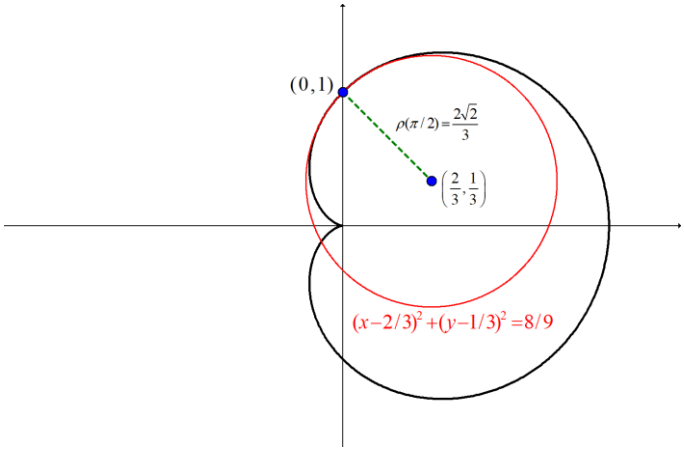


ב.

33) שאלת הוכחה.

34) $\kappa=\rho=1$

35) ראו שרטוט:



כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 5 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים 35
2. החלפת סדר אינטגרציה 38
3. כללי ..... (ללא ספר)

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-3**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\; dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(1,1),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(-2,1),\mathrm{A}(2,1),\mathrm{O}(0,0)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $\mathrm{C}(0,1),\mathrm{B}(1,2),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים הבאים:

11) $\iint_D xy^2 dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint_D |x\,y| dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות

$y=3a, y=a,\ y=x+a,\ y=x\ (a>0)$.

15) $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2} dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$
$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4} \sin(y^2)dydx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

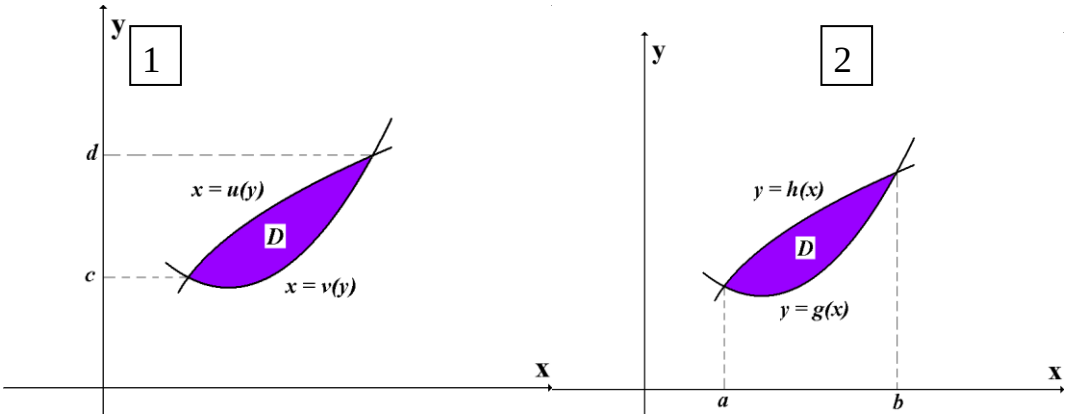
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

2

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 6 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול 41

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0),\ (0,0),\ (0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M.

13) מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$ שבמישור xy.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 7 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 44
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 46

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

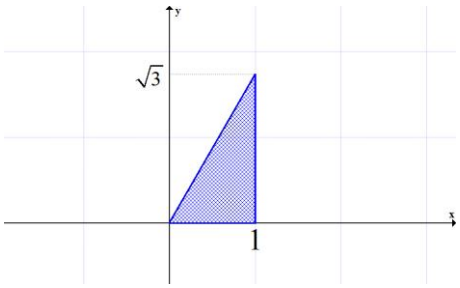
4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

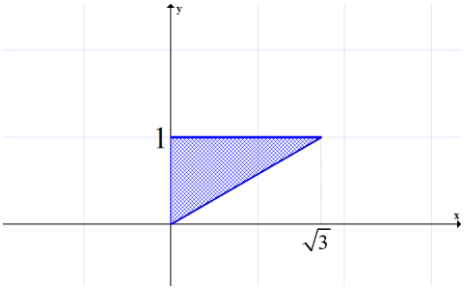
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le \pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0.5\pi\le\theta\le 1.5\pi\end{cases}$

2) א. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le 2\\-0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ or $\begin{cases}1\le r\le 2\\1.5\pi\le\theta\le 2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le \pi\end{cases}$

3) א. $\begin{matrix}1\le r\le 2\\0.25\pi\le\theta\le\arctan 2\end{matrix}$ ב. $0\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le 1.25\pi$

4) $\dfrac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le 5$

$\arctan\dfrac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi$

5) $0\le r\le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

6) א. $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\quad 0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $0\le r\le\dfrac{1}{\sin\theta}\quad \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

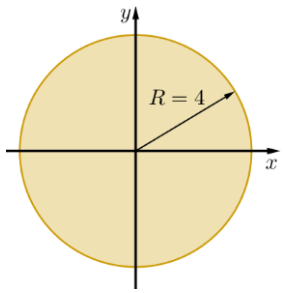
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

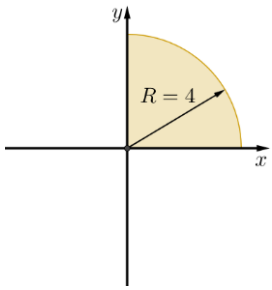
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

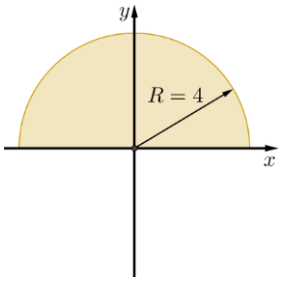
א.



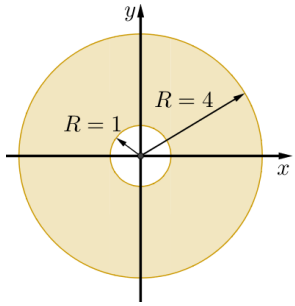
ב.



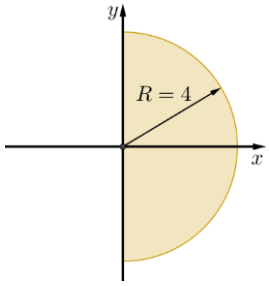
ג.



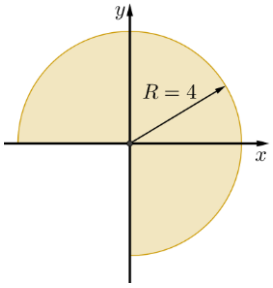
ד.



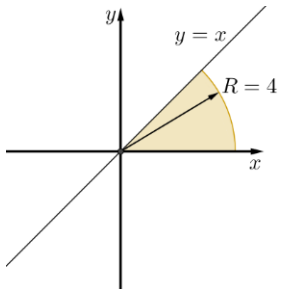
ה.



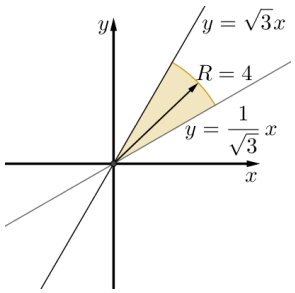
ו.



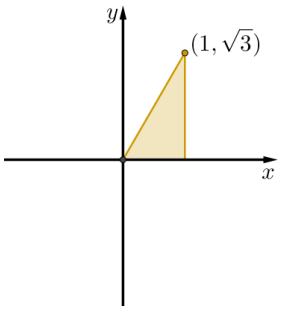
ז.



ח.



ט.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{\pi}{8}$ 5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2 7) 2π 8) 36 9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi \ln\frac{e}{2}$ 11) $\pi(4-\pi)$ 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$ 15) $-\frac{4}{5}$ 16) $\pi \ln\frac{4}{e}$ 17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 8 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול 49

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0.5x,\ y=x$.

3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0),\ B(2,0),\ C(1,1)$.

4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3),\ B(1,-3),\ C(3,-1),\ D(1,5)$.

5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ xy^2=2,\ xy^2=1$.

7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 9 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 51

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$

2) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

3) $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}$, $\iiint_B xyz^2dV$

4) $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\,,\,0\le y\le \sqrt{x}\,,0\le z\le 1+x+y\right\}$, $\iiint_B 6xydV$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}dxdydz$

6) $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}dydxdz$

7) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}dxdydz$

8) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}dydzdx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

11) $(x\geq 0)\ \ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

12) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\ M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 10 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות 54

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

1) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2}21xy^2dzdydx$

2) $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dzdydx$

3) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

4) $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12) חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13) הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14) חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15) ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} rdzdrd\theta$

ב. $V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi drd\phi d\theta$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} rdzdrd\theta$

ב. $V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi drd\phi d\theta$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$

ג. $V=\int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 11 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים 58

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבו את $\iiint_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$.

2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשבו את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשבו את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=z,\quad y=2z,\quad y=4x,\quad y=4x-12,\quad y=z^2,\quad y=4z^2$.

5) חשבו את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר G הוא כדור
שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 12 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 59
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 61
3. הצגה פרמטרית של משטח ..... (ללא ספר)

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$,
מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$,
המקיים $0\le v\le\frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשבו את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R.

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$,
וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשבו את **מסת** היריעה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$
2) $\frac{8\pi}{3}$
3) 27
4) 12π
5) -16π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 13 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ 62

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט הדיברגנץ.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G divF dV$,
והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשבו את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשבו את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=0,\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16,\ 0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את **השטף** דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$$;\ \mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G divFdV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 14 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס 64

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,
והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $y=2,\ 2x+z=6$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$;
ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$,
וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשבו את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) חשבו את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$;

ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C f dx+g dy+h dz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.

2) הערך המשותף הוא -16π.

3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

4) -90

5) -1

6) 0

7) 12π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 15 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 66
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 68
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 69
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 71
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 73

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4-x}{\ln x}dx$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m-x^n}{\ln x}dx$ $(m,n>0)$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx$.

5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi}\ln\left(1+\alpha\cos x\right)dx=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$, עבור $|\alpha|<1$.

6) חשבו $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$, עבור $\alpha\neq\pm1$.

7) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

8) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx$ $(p>0,\ m\in\mathbb{N})$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2}dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx=\begin{cases}0 & |\alpha|<1\\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1\end{cases}$

7) $\frac{\pi+2}{8}$

8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b, a > 1$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2-(a-\sin x)^2\right]dx = 2\pi(b^2-a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

<u>הערה חשובה</u>

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך.

בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל.

בררו עם מתרגל\ת ו\או מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא.

במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.

בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכיחו שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty}x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \geq k > 0$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (2n)}\frac{\pi}{2}$$

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\int_0^\infty x^{10}e^{-x^2}dx$

ג. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$. $(\alpha>0)$

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $.1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (n-1)\cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

2) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

3) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4) הוכיחו כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

5) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}\quad(\alpha,r>0)$

ב. $\int_0^\infty\left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\quad(\alpha,r>0)$

ג. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\quad(\alpha>0)$

6) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשבו את $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינפי 3

פרק 16 - פונקציות גמא ובטא (פונקציות אוילר)

תוכן העניינים

1. פונקציית גמא 75
2. פונקציית בטא 77

פונקציית גמא

שאלות

1) הוכיחו:

א. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, לכל $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\Gamma(n+1)=n!$, לכל $n\in\mathbb{N}$.

2) חשבו, ללא מחשבון, כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $\dfrac{82\Gamma(41)}{\Gamma(43)}$

ב. $\dfrac{\Gamma(2.5)}{4\Gamma(0.5)}$

ג. $\dfrac{\Gamma(2.25)}{\Gamma(4.25)}$

ד. $\dfrac{\Gamma(-2.5)}{\Gamma(0.5)}$

3) הוכיחו כי $\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$.

4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$

ב. $\int_0^\infty x^5e^{-2x}dx$

5) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$

ב. $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\infty} 4^{-10x^2}\,dx$

ב. $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,dx$

7) הוכיחו כי $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו- $-1<m\in\mathbb{R}$.

8) הוכיחו כי $\Gamma(0)$ אינו מוגדר.

תשובות סופיות

1) שאלות הוכחה.

2) א. $\frac{1}{21}$ ב. $\frac{3}{16}$ ג. $\frac{16}{107}$ ד. $-\frac{8}{15}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. 6 ב. $\frac{5!}{2^6}$

5) א. $\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{1.5}}$

6) א. $\sqrt{\frac{\pi}{40\ln 4}}$ ב. $\sqrt{\pi}$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציית בטא

שאלות

1) הוכיחו:

א. $B(m,n)=B(n,m)$

ב. $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2m-1}(\cos x)^{2n-1}dx=\frac{1}{2}B(m,n)$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, כאשר $m,n>0$.

ב. הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}xdx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$, כאשר $m,n>0$.

3) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 x^4(1-x)^3dx$

ב. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$

ג. $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$

4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi/2}\sin^6 xdx$

ב. $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^5 xdx$

ג. $\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$

5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi/2}\sin^p xdx=\int_0^{\pi/2}\cos^p xdx$ שווה ל-

א. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot p}\frac{\pi}{2}$, אם p שלם חיובי זוגי.

ב. $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(p-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p}$, אם $p>1$ שלם חיובי אי-זוגי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

ג. $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$

7) נתון $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

א. הוכיחו כי $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, כאשר $0 < p < 1$.

ב. חשבו $\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4}$.

8) חשבו $\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3} dx$.

9) הוכיחו כי $\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{2\pi}}$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\frac{1}{280}$ ב. $\frac{64\sqrt{2}}{15}$ ג. $\frac{\pi a^6}{32}$

4) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{8}{315}$ ג. $\frac{3\pi}{8}$

5) שאלות הוכחה.

6) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{2}{15}$ ג. $\frac{35\pi}{64}$

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

8) $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

9) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©