

אינפי 2



תוכן העניינים

1	אינטגרלים מיידיים	1
4	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	4
6	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	6
10	אינטגרלים בשיטת ההצבה	10
13	אינטגרלים של פונקציות רציונליות	13
15	האינטגרל המסוים, אינטגרליליות לפי רימן ולפי דארבו	15
24	שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)	24
44	שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)	44
47	המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)	47
55	טורי טיילור - מקלורן	55
70	טורים עם איברים קבועים	70
84	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות	84
88	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב	88
115	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה	115
123	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים	123
130	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות	130
141	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים	141
145	נגזרת מכוונת וגרדיאנט	145
150	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים	150
152	קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים	152
154	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')	154
157	קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים	157
159	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה	159

תוכן העניינים

אינפי 2

פרק 1 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים.....1

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$):

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 -\frac{1}{x} + c & \text{(3)} & \frac{x^5}{5} + c & \text{(2)} & 4x + c & \text{(1)} \\
 \frac{4x^{11}}{11} + c & \text{(6)} & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c & \text{(5)} & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c & \text{(4)} \\
 \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c & \text{(9)} & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c & \text{(8)} & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c & \text{(7)} \\
 \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c & \text{(12)} & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c & \text{(11)} & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c & \text{(10)} \\
 -\frac{1}{(x-2)^4} + c & \text{(15)} & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c & \text{(14)} & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c & \text{(13)} \\
 & & 10\sqrt{2x+4} + c & \text{(17)} & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c & \text{(16)} \\
 -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c & \text{(19)} & & & -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c & \text{(18)} \\
 \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c & \text{(22)} & \frac{\ln|x|}{4} + c & \text{(21)} & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c & \text{(20)} \\
 x + \ln|x+2| + c & \text{(25)} & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c & \text{(24)} & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c & \text{(23)} \\
 \frac{e^{2x+2}}{2} + c & \text{(28)} & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c & \text{(27)} & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c & \text{(26)} \\
 \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c & \text{(30)} & & & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c & \text{(29)} \\
 -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c & \text{(33)} & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c & \text{(32)} & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c & \text{(31)}
 \end{array}$$

אינפי 2

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....4

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln x^3 + 1 + c$ (3) | $\ln \sin x + c$ (2) | $\ln x^2 + 1 + c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x + 1 + c$ (6) | $\ln \ln x + c$ (5) | $-\ln \cos x + c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9) | $e^{\tan x} + c$ (8) | $e^{x^2} + c$ (7) |
| $\sin(\ln x) + c$ (12) | $\sin(\sin x) + c$ (11) | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10) |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15) | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14) | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13) |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18) | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17) | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16) |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21) | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20) | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19) |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

אינפי 2

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 6

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

אינפי 2

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

10 1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

אינפי 2

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.....13

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

אינפי 2

פרק 6 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א 15
2. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות 21

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר, } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10 הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \text{ב.}$$

11 הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad \text{ב.}$$

12 תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$.

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

פתרו את המשוואה

13 ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$14 \text{ חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$15 \text{ חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

16 נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ , בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$$

(25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון

החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\arctan 6 - \arctan 3$

(6) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\frac{17}{12}$

(8) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9) $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $x = e^2$

(13) 0

(14) $\frac{\pi}{4}$

(15) $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17) 0

(18) $2 \arctan 4$

(19) 0

(20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

(21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25) $1 - \sqrt{3}$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad \text{חשבו:} \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$P = \left\{ 1 = \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{n}{2^n} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

אינפי 2

פרק 7 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

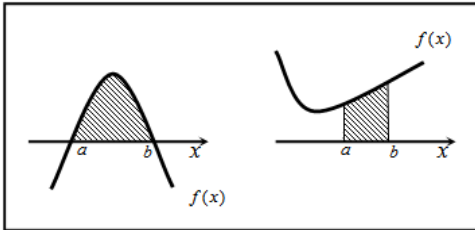
תוכן העניינים

24 1. חישוב שטחים

חישוב שטחים

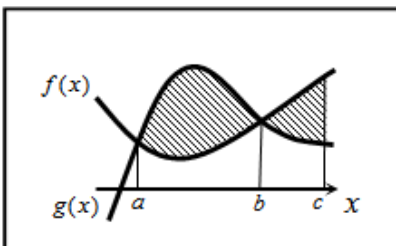
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

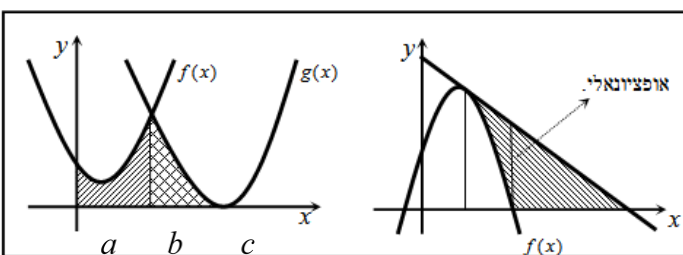


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

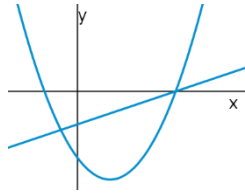
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

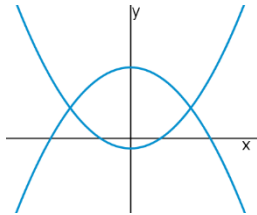


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

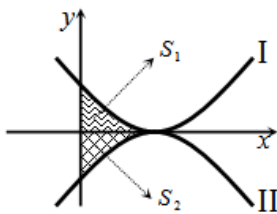
שאלות



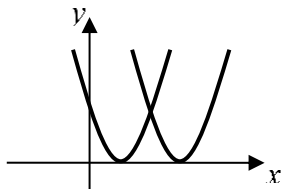
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



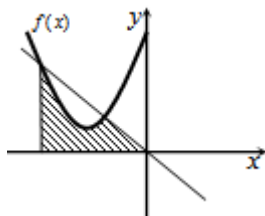
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



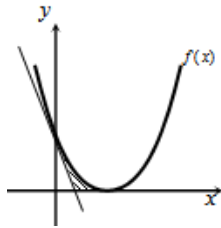
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמתואר באיור.
 א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



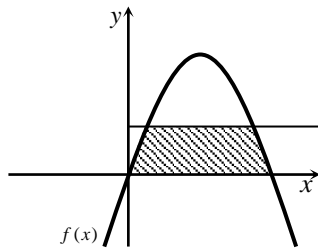
- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



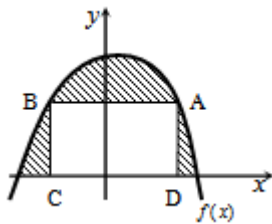
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



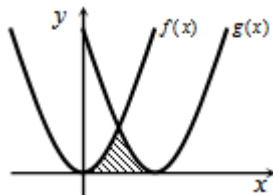
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



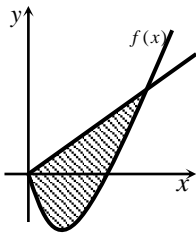
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- (8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן, היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



- (9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

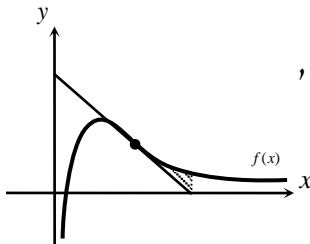
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

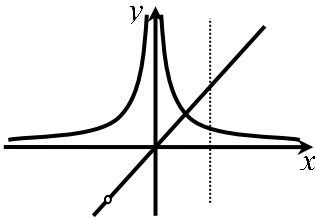
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

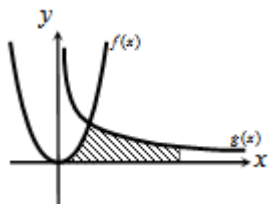


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



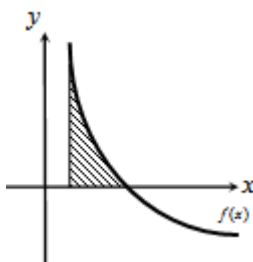
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע a), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



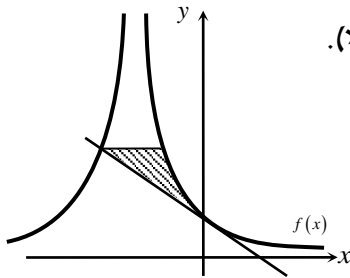
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

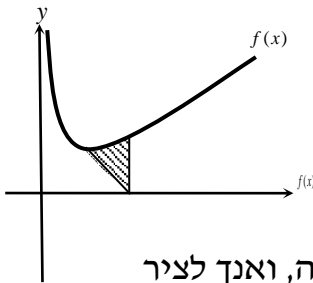
ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (פרמטר חיובי).

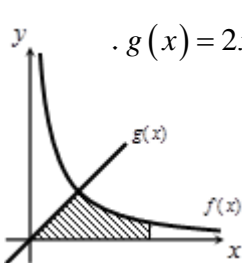
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

- מצאו את ערך הפרמטר A .
- כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.
- העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

- מצאו את נקודת המינימום שלה.
- מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x . מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

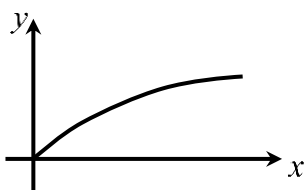


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

- מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
- חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .



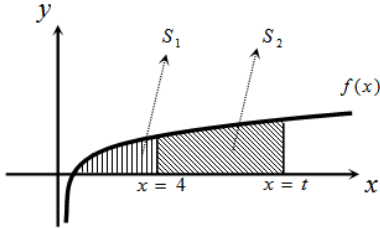
19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
מצאו את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

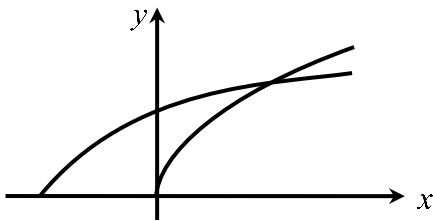
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר $(b > 0)$.



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .

(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$.

ברביע הראשון.

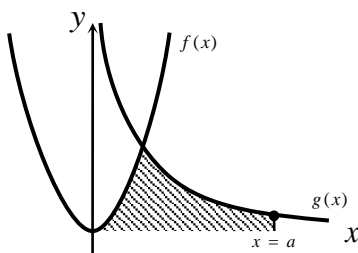
נעביר ישר $x = a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

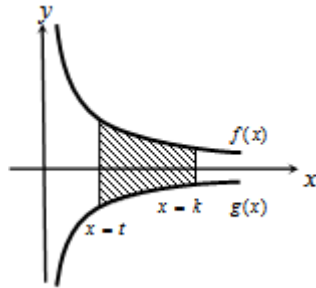
ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$.

מצאו את a .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.



נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

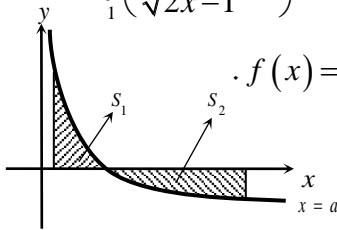
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S = 12$.

מצאו את t .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a , $(a > 1)$ יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x=1$ ו- $x=13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

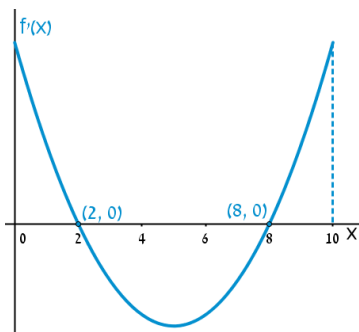
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x=1$, כלומר את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2 .

נמקו.



(26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

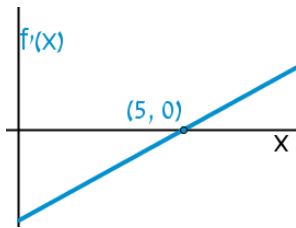
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(2) = 6$, $f(0) = -4$, $f(5) = 0$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



(27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

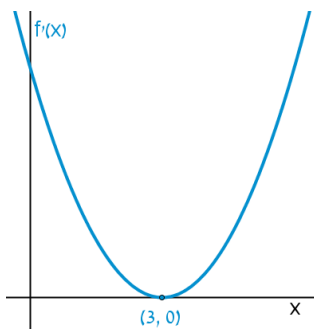
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

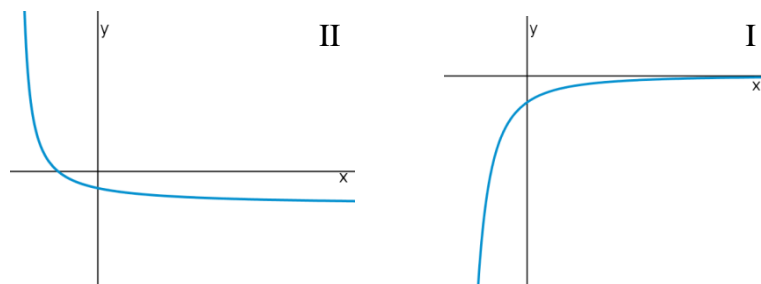
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

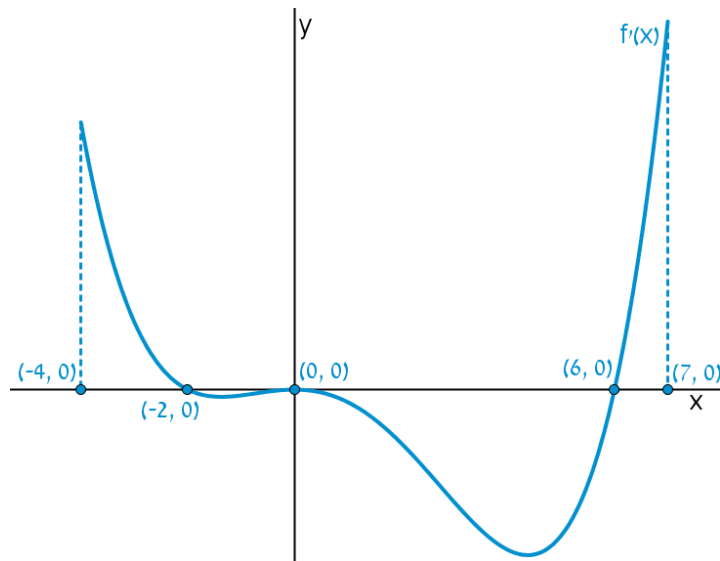


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

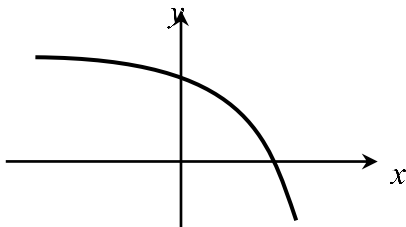


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

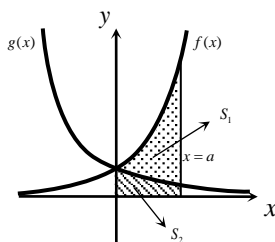
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



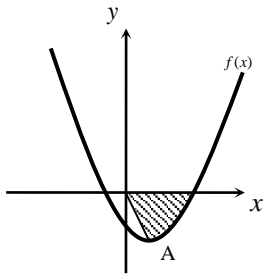
- (31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

- (33)** נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$, ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן. הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

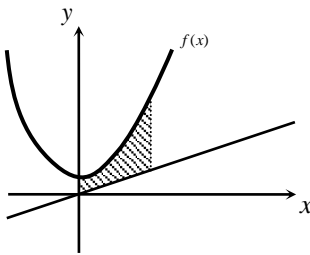


- (34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



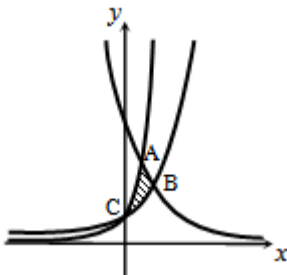
(35) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
 ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x = 1.7$.



(36) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

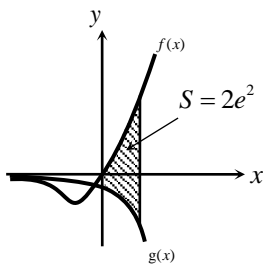
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.
 א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
 ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y = 0.1x$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y והאנך $x = 2$.



(37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
 ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



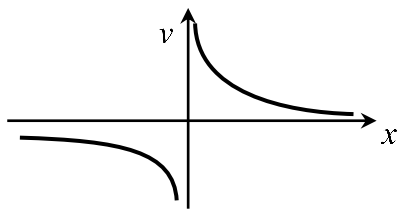
(38) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.
 ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x - 1$ ו- $g(x) = -e^x$.
 נעביר ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
 מצאו את a.

פונקציות לוגריתמיות

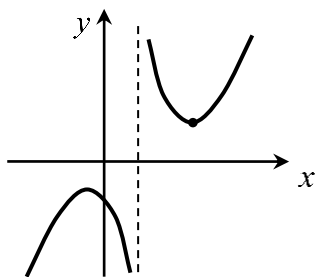
אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



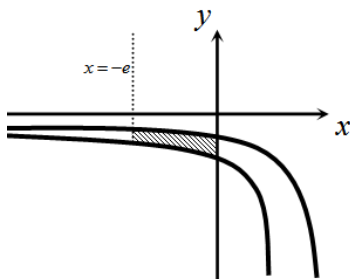
(39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.

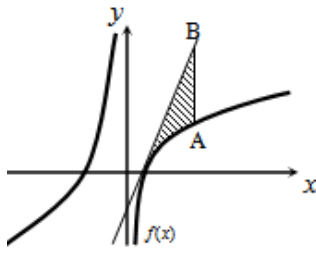


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

$$\text{ו-} g(x) = \frac{a-1}{x-2}, \text{ בתחום } x < 0.$$

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

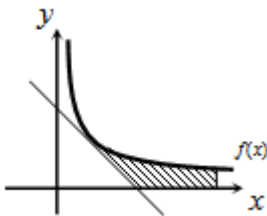


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
 א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

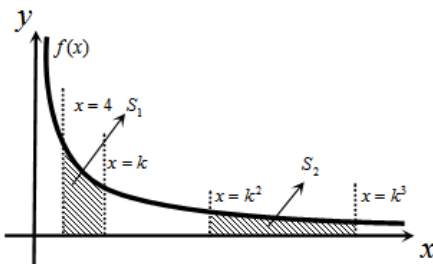
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
 א. מצאו את $f(x)$.

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



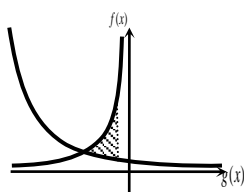
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$ (כמתואר באיור $x > 4$).

א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

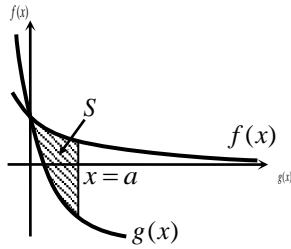
- ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשבו את ערכו.
 ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצאו את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$
 בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נעביר ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

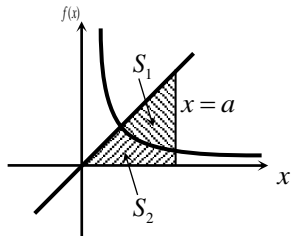
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

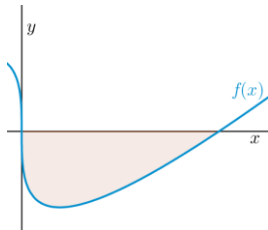
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

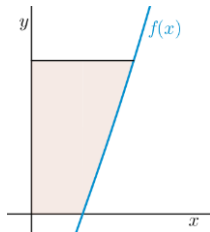
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



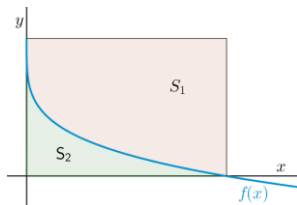
(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

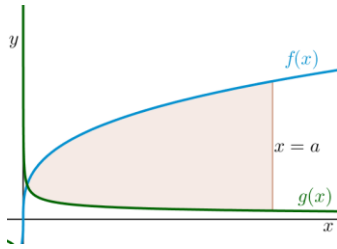
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
 חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

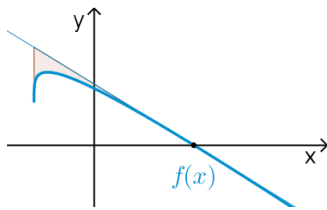
בתחום $x > 0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$ (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

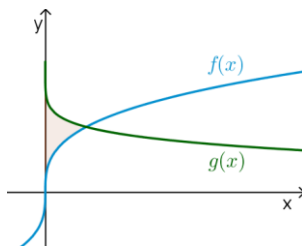
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- y .

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

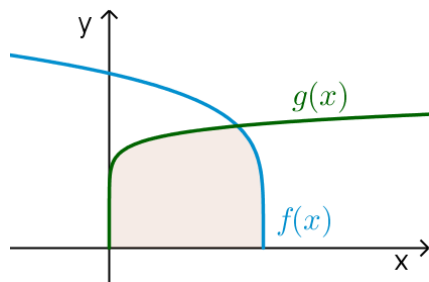
בנקודה שבה $x = 1.2$.

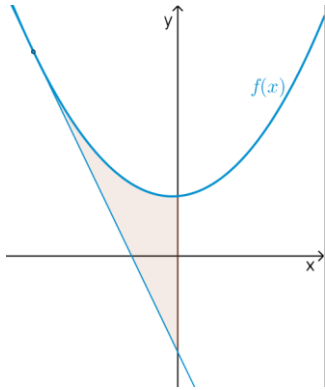
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

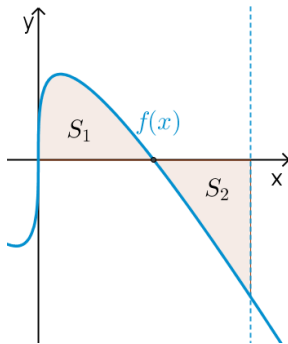
$g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
 נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור.
 מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $f(x) = I$, $g(x) = II$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$. ב. $(5,0)$. ג. i. $S_1=2$. ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$. ג. $\min(5,-2)$. ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ד. 1 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$.
- (35) א. $A(1,-e-2)$. ב. $y=-(e+2)x$. ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$. ב. 1.52.
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$. ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$. ב. $a=2$.
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$. ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$. ב. $x=2$. ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$.
- (47) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (48) א. $(0,0), (8,0)$. ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$. ב. $(2,0)$. ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

אינפי 2

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב.....44

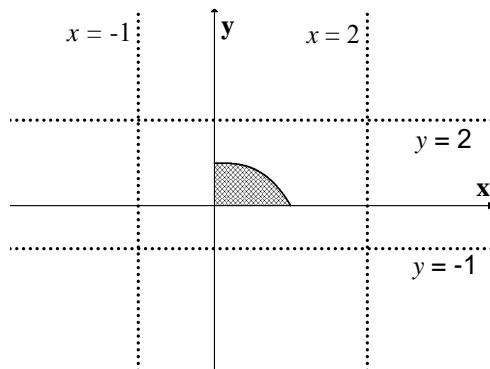
חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

- (1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

- (2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- y .
 חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

- השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
 מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:

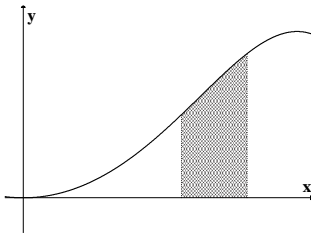


- (3) ציר ה- x .
 (4) הישר $y = -1$.
 (5) הישר $y = 2$.
 (6) ציר ה- y .
 (7) הישר $x = -1$.
 (8) הישר $x = 2$.

- (9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

- (10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

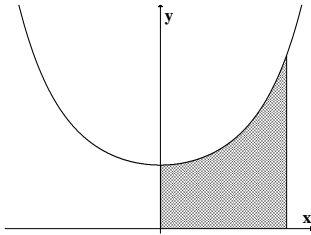
- (11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$

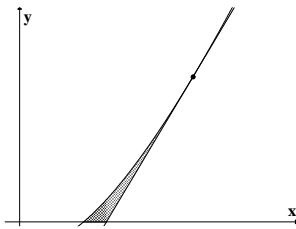
מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x ,

מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתקבל?

(15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א.} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א.} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad (3)$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad (5)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (6)$$

$$2.1\pi \quad (7)$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad (8)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad (10)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (12)$$

$$\pi(e-1) \quad (13)$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad (14)$$

$$128\pi \quad (15)$$

אינפי 2

פרק 9 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב 47
2. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים 50
3. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה 52

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

11 חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12 נתונה הפונקציה $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$, כאשר $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$.

חשבו את $g'(1)$ (הניחו כי f רציפה).

13 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $g''(x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha \neq 0$.

נגדיר $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

15 תהי f פונקציה רציפה וחיובית לכל $x \geq 0$.

הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \infty)$.

16 מצאו את $\int_e^4 f(x) dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{1}{t-1} dt + 2 \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt$.

17 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודה $x_0 = 2\pi$.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) $I'(x) = e^{-x^2}$

(4) $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5) $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6) $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) $\frac{2}{3}$

(9) $4e^{16}$

(10) 0

(11) תחום הגדרה: כל x .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .

נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.

תחומי קמירות: $x > 1, -1 < x < -\frac{3}{7}$.

תחומי קעירות: $-\frac{3}{7} < x < 1, x < -1$.

(12) 40

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e$

(17) $y = x - 2\pi$

משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

שאלות

- (1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

(2) תהי f רציפה ב- $[a, b]$, ו- $\int_a^b f(x) dx = 1$.

הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x) = 1$.

- (3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ונניח כי $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

וכי $\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$.

הוכיחו שקיים x , בקטע (a, b) , שעבורו $f(x) = 0$.

- (4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

- (5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n, n+1]$.

הוכיחו כי $f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x) dx < f(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

- (6) יהיו $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = g(c)$.

- (7) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$.

(8) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$.

(9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(10) ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

(11) הוכח כי $\frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$.

(12) הוכח כי $\frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$.

(13) הוכח כי $\frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$.

(14) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

(15) נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה } f \text{ המוגדרת בקטע } [0, 2] \text{ כך:}$$

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x) = f(x)$?

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה } f \text{ המוגדרת בקטע } [-1, 1] \text{ כך:}$$

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x) = f(x)$?

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר } f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי}$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר } F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי}$$

הוכיחו כי $F' = f$ ב- $[-1, 1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t) dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

(4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{הוכיחו כי } \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

(5) תהי f פונקציה אינטגרבלית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(t) dt > 1$.

הוכיחו שקיים $x_1 \in (a, b)$, בקטע (a, b) , עבורו $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$.

(6) תהי f פונקציה רציפה ומחזורית לכל x , עם מחזור p .

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t) dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ קבועה בקטע $(0, \infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי C עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

(8) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, 1)$, כך ש- $f(c) = 3c^2$.

(9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, \pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, \pi/2)$, כך ש- $f(c) = 2 \cos 2c$.

(10) תהי $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0, \pi/4]$, כך ש- $f(c) = 2 \cos 2c \int_0^{\pi/4} f(t) dt$.

(11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(c)$.

(12) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$.

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

(13) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

בקטע (a, b) , שעבורו מתקיים

א. הוכיחו כי קיים c , בקטע (a, b) , כך ש- $f(c) = 0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- f רציפה ב- $[a, b]$,

ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- f אינטגרבילית ב- $[a, b]$? נמקו.

(14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{-|x|}$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$,

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ונניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 0$).

תשובות סופיות

(1) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$. ג. רציפה ולא גזירה.

ד. לא.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = 0$ לכל x בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.

ד. לא.

(7) א. $C = 0$. ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2

פרק 10 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 55 1. טור טיילור וטור מקלורן
- 57 2. טור טיילור סביב $X=X_0$
- 58 3. חישוב סכום של טור
- 59 4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
- 60 5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
- 62 6. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
- 68 7. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
- 69 8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס. מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$.

(6) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x^4 - x^4}{(x - \sin x)^4}$.

(7) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)^3 - (\sin x^3)^2}{\ln(1 + x^{10})}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

$$216 \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (7)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1)\cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4)\ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[3]{9/100} \quad (11)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4} \cong 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$, עבור $|x| < 0.1$?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

(6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

(7) נתונה $f(x) = \sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0 \leq x \leq 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x \geq 0$ מתקיים $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

(8) נתונה $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3,

עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1 < x$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$.

(9) נתונה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $|x| \leq 0.5$, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את \sqrt{e} ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

עבור $0 \leq x \leq 1$, $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שעבורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.
- ה. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

12 תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

13 תהי $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.

14 תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי $|f'(x)| \leq M$ לכל $0 < x$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

15 תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$,

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$

הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

(17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

(18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

- (1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$
- חישוב: $\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$. שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$
- ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$
- (2) א. נוסחה: $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$
- ב. שאלת הוכחה.
- (3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \sqrt{(c+4)^8}}x^3$
- חישוב: $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$
- ב. שאלת הוכחה.
- (4) נוסחה: $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$
- חישוב: $\sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$
- (5) $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$
- (6) א. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!}$. ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$
- (7) א. ב. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25 .
- (8) א. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.
- ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.
- (9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.
- ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.
- (10) א. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n$. ב. $\sqrt{e} = 1.6487$
- ג. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$. ד. $\frac{3}{(n+1)!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \quad \text{ד. } \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.} \quad p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

אינפי 2

פרק 11 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

70	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
73	2. מבחן ההתבדרות של טורים
74	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
76	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
78	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
79	6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123\dots + 0.141414\dots$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
 (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
 (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
 (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
 (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
 (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
 (9) מתבדר.
- (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
 (11) $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
 ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
- (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad \text{ג.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ו.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad \text{ה.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ד.}$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן זיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n}, \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}} \quad (\theta \neq 2\pi k)$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון $p(x)$ פולינום.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

אינפי 2

פרק 12 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

84	1. טורי חזקות.
86	2. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

- | | |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2) | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1) |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4) | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3) |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6) | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5) |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8) | $x = 1, R = 0$ (7) |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10) | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9) |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12) | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11) |
| $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13) |
| $(x < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16) | $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15) |
| $(x < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $(x < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad (8) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1} \quad (9) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$?

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2) \qquad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4) \qquad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6) \qquad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8) \qquad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{א. } (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13) \qquad \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

אינפי 2

פרק 13 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

88	1. קווים ותחומים במישור
92	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית
98	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)
103	4. משטחים במרחב
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית
105	6. גופים במרחב
108	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות
112	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.
 ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
 ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2$, $t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t$, $\pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (קבוע k).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות. מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות. מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2, -3)$ לנקודה $B(-1, 0)$. כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

$$(8) \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .-\pi \leq t \leq 2\pi$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{א. } 0 \leq t \leq 2\pi \\ \text{ב. } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז } (0, 0) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז } (8, 4) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases} \quad \cdot \uparrow$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{שמאלית}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ימנית}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{וענף שמאלי}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ענף ימני}$$

$$1. \tau \quad C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ג.}$$

8 (8)

6π√29 (9)

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

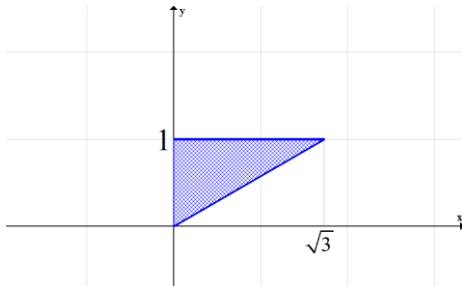
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

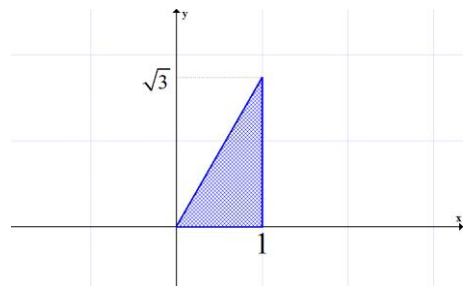
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. (1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. (5)}$$

$$6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ א. (6)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ו. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה. } \begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ד.}$$

$$r = 6 \sin \theta, 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב. } r = 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ א. (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ד. } \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ד.}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב. } 1 \leq r \leq 2 \text{ א. (11)}$$

$$0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \text{ (12)}$$

$$\arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad (14)$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$:

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$:

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
- החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
- א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
- נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z = -x, z = x$.
ג. $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$ $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$. ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2+z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

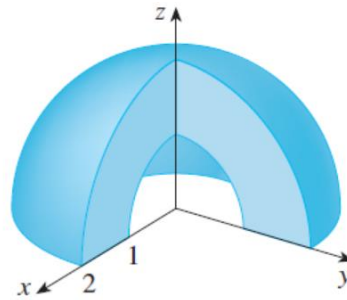
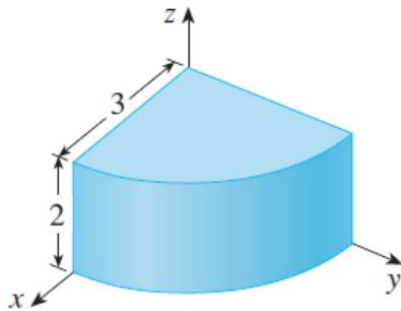
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטטו את D , החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z = 3$

ב. $z = 4x^2 + 4y^2$

ג. $x^2 + y^2 = 4$

- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

ב. $2x + 3y + 4z = 1$

ג. $x^2 = 16 - z^2$

ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r = 3$

ב. $z = r^2$

ג. $z = r$

ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$

ה. $r = 4 \sin \theta$

ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

- 4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

- 5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- 6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- 7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- 8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

תשובות סופיות

1 א. מערכת גלילית: $z = 3$. מערכת כדורית: $r = \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2$. מערכת כדורית: $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2$. מערכת כדורית: $r = \frac{2}{\sin \phi}$. שם המשטח: גליל.

2 א. מערכת גלילית: $r^2 + z^2 = 9$. מערכת כדורית: $r = 3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. מערכת כדורית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z = r$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y = x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

6 א. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\} \quad \text{א. (7)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{א. (8)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ג.}$$

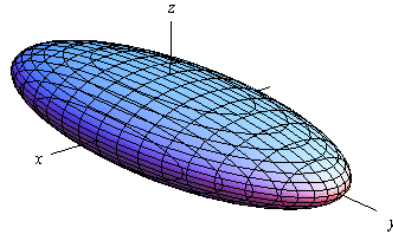
$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\} \quad \text{ד.}$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

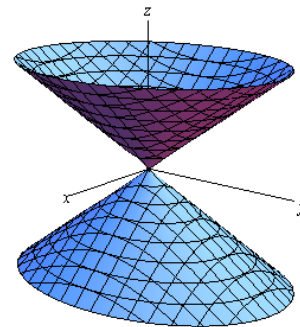
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

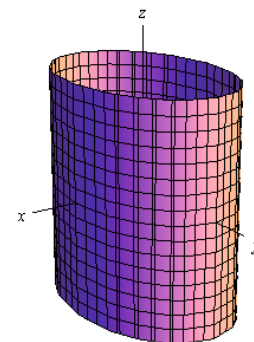
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

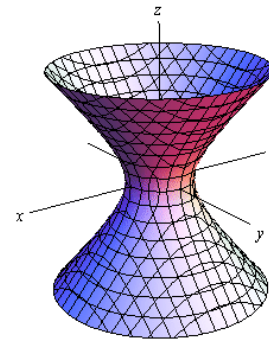


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

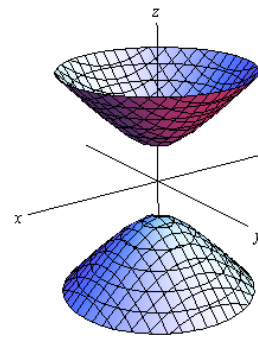


היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.



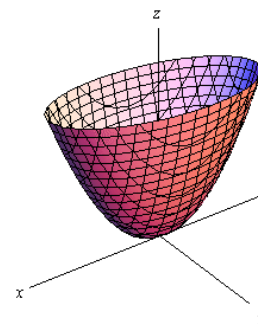
פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

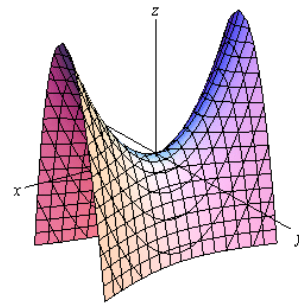
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



פרבולואיד היפרבולי



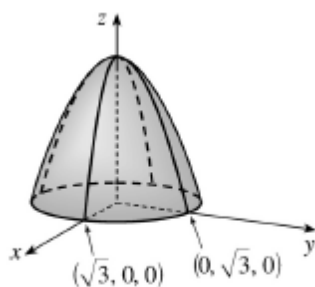
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

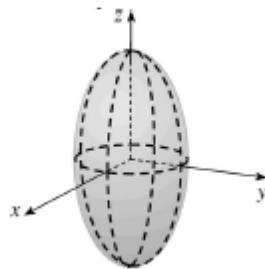
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

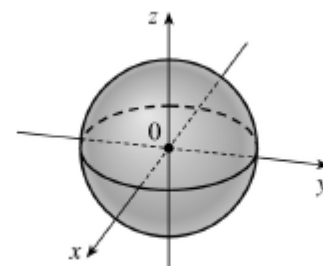
דוגמאות שונות



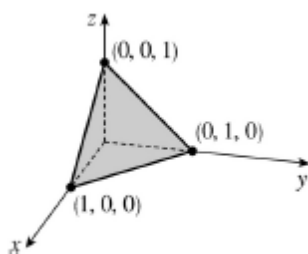
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



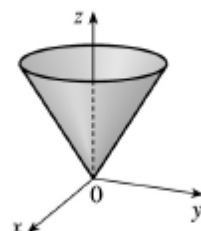
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



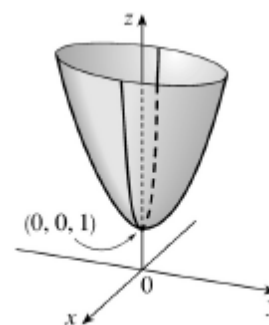
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

אינפי 2

פרק 14 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 115
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 117
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 119
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 120

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: Gool.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
 א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

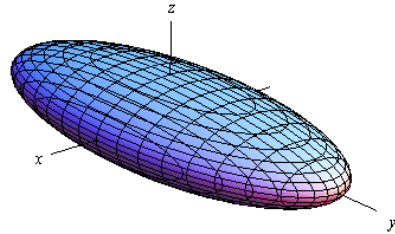
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
 ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
 עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
 עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
 עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
 עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

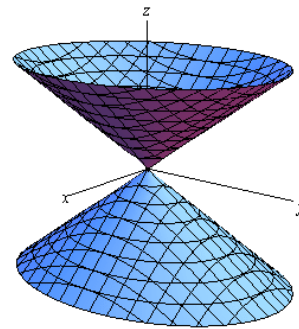
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

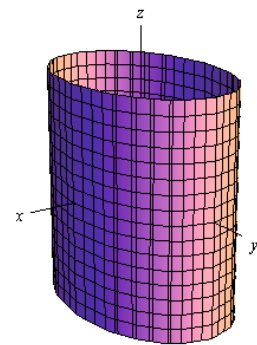
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

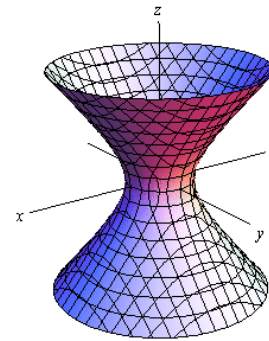


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

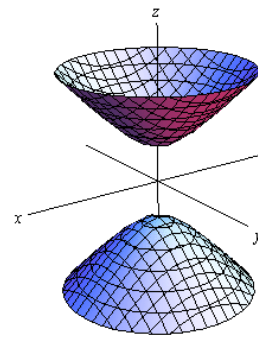
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

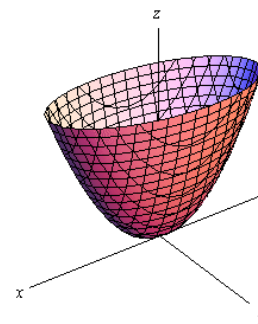
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

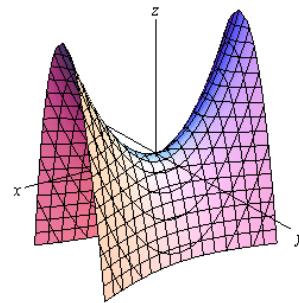
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



פרבולואיד היפרבולי



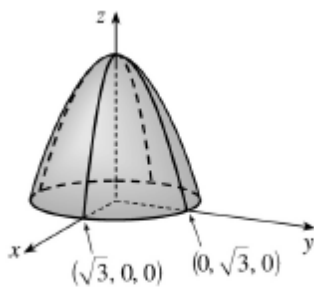
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

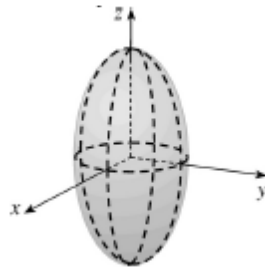
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

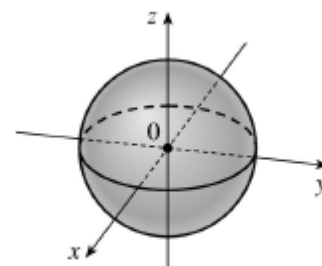
דוגמאות שונות



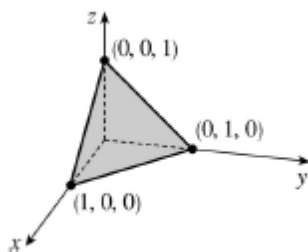
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



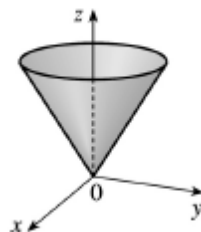
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



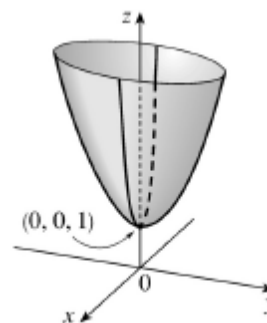
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

אינפי 2

פרק 15 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

- 123 1. גבול של פונקציה של שני משתנים
- 126 2. רציפות של פונקציה של שני משתנים
- 129 3. נוסחאות – גבולות

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$.

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$.

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$.

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף. (5)

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר m קבוע.

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$ לכל y ,

וגם $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$ לכל x ,

אז $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$.

9 פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$, לכל (x, y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12 הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

אינפי 2

פרק 16 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

130	1. נגזרות חלקיות לפי הגדרה.
132	2. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
134	3. נגזרות חלקיות מסדר שני
138	4. דיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשבו אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{yxxy}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1 (א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.)

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

3 $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

4 א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

$$5 \quad \text{א.} \quad f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6 א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \text{ נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{ הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \text{ נתון}$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

שאלת הוכחה. (11)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18) נתון $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשבו $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$.

הערת סימון

$f = f(x, y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (18)$$

16

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } m, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

אינפי 2

פרק 17 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 141

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשבו: z_u , z_v .

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשבו: z_t , z_m , z_k .

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכיחו: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון: $z = f(xy)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
 הוכיחו: $z_x + z_y = 0$

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
 הוכיחו: $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון: $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
 הוכיחו: $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

(9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

(10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

(11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

(12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

(13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1, \pi)$, אם ידוע ש- $g'(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

(14) נתון: $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $u = f(x, y)$

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

15 נתון $z = h(u, v)$, ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. הוכיחו כי:

א. u, v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ וכן $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

ב. $h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$.

16 נתון: $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$.

17 פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$. הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$.

ב. $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$.

18 נתונה הפונקציה $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. נתון $x = 2t, y = t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x = 2t, y = t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

אינפי 2

פרק 18 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 145

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
 מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9 מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$, בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

- א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .
- ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

- מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13 נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

- א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.

ג. האם קיים וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשבו את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4 \text{ לכל } x$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y) \text{, בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

(18) נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

(19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור \vec{v} , היוצר זווית α

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

(20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה \hat{u} ?

ב. מצאו וקטור יחידה \hat{u} , המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

(1) במישור \mathbb{R}^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{או} \quad \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, או $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

(2) יש המסמנים וקטור \vec{u} גם \underline{u} או \mathbf{u} .

(3) וקטור יחידה יסומן \hat{u} .

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$. ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

אינפי 2

פרק 19 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 150

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13** נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- 14** מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1** $(-0.5, 1)$ אוכל; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2** $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכל.
- 3** $(0, 0)$ אוכל; $(1, 1)$ מינימום.
- 4** $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכל.
- 5** $(0, 2)$ מקסימום.
- 6** $(4, 4)$ מקסימום.
- 7** $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8** אין נקודות קריטיות.
- 9** $z = 4$, $z = 3$
- 10** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- 12** $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי \$288.
- 13** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכל; $-2 < a < 2$ מינימום.
- 14** $a = -6$, $b = 4$

אינפי 2

פרק 20 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים.....152

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
 * לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \quad (7)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \quad (8)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \quad (9)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \quad (10)$$

(11) $h(x) = ax^2 + bx + c$, הדגימו עבור $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$.

(12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$,

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$.

תשובות סופיות

(1) (t, t) לכל t ממשי, מקסימום.

(2) $(0, 0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1, 2)$ אוסף.

(4) אין קיצון. $(1, 2)$ אוסף.

(5) מינימום $(0.5, 1, 1)$.

(6) 0.375

(7) $y = 0.88x + 0.3$

(8) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(9) $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

(10) $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(11) $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

אינפי 2

פרק 21 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....154

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12 \text{ , כאשר } x, y > 0 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \text{ , כאשר } x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12 \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \text{ , מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0 \text{ , הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$, והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$. לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$. דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) , המביא למינימום את העלות. נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$. תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$7 / \sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad \text{(14)}$$

אינפי 2

פרק 22 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 157

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצאו על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצאו נקודה על המישור $-2x - 2y + z = 0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$, הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

אינפי 2

פרק 23 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 159

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.