

אינפי 2 למדעי המחשב



תוכן העניינים

1	אינטגרלים מיידיים
6	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
8	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
12	אינטגרלים בשיטת ההצבה
15	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
20	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
31	האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו
55	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
77	שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)
82	המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים
90	טורים עם איברים קבועים
104	אינטגרלים לא אמיתיים
(ללא ספר)	טורי פונקציות וטורי חזקות
115	נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה
120	נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה
131	וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים
152	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב
184	סדרות
217	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות
226	טורי טיילור - מקלורן
241	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב
268	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
276	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

283	24. נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות
294	25. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
298	26. נגזרת מכוונת וגרדיאנט
303	27. פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים
317	28. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים
320	29. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
322	30. קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים
324	31. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
327	32. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
329	33. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
330	34. אינטגרלים כפולים
336	35. שימושי האינטגרל הכפול
339	36. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)
344	37. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)
346	38. אינטגרלים משולשים ושימושיהם
349	39. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות
353	40. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)
354	41. משוואות מסדר ראשון
376	42. משוואות ליניאריות מסדר שני
391	43. שימושים של משוואות דיפרנציאליות
399	44. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 1 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 1
2. מציאת פונקציה קדומה 4

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$):

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \quad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \quad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \quad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \quad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \quad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \quad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \quad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \quad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \quad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \quad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \quad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \quad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \quad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \quad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \quad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \quad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \quad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \quad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \quad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

8 נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$, ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$.

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

- 8 א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
 ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....6

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{3} \ln x^3+1 +c$ (3) | $\ln \sin x +c$ (2) | $\ln x^2+1 +c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x+1 +c$ (6) | $\ln \ln x +c$ (5) | $-\ln \cos x +c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ (9) | $e^{\tan x}+c$ (8) | $e^{x^2}+c$ (7) |
| $\sin(\ln x)+c$ (12) | $\sin(\sin x)+c$ (11) | $\sin(2x^2+1)+c$ (10) |
| $-2\cos(\sqrt{x})+c$ (15) | $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$ (14) | $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$ (13) |
| $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$ (18) | $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$ (17) | $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (16) |
| $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$ (21) | $\sqrt{2\sin x}+c$ (20) | $2\sqrt{x^2+1}+c$ (19) |
| $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (24) | $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$ (23) | $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$ (22) |

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23:

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 15
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 17
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 18

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 20
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 22
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 23
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 24
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 27

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

- | | |
|---|--|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ (2) | $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$ (1) |
| $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ (4) | $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$ (3) |
| $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ (6) | $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$ (5) |
| $\int \tan^2 x dx$ (8) | $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$ (7) |
| $\int \sin 7x \cos 5x dx$ (10) | $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$ (9) |
| $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ (12) | $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$ (11) |
| $\int \sin^2 4x dx$ (14) | $\int \cos^2 x dx$ (13) |
| $\int \sin^3 4x dx$ (16) | $\int \cos^3 x dx$ (15) |
| $\int \sin^4 4x dx$ (18) | $\int \cos^4 x dx$ (17) |
| $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$ (20) | $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ (19) |
| $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$ (22) | $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$ (21) |
| $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ (24) | $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$ (23) |

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

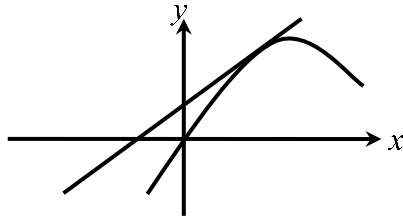
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

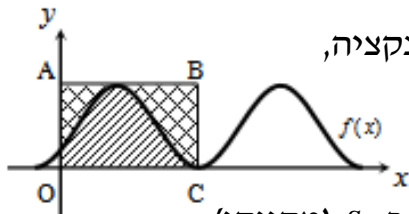


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב- C , כך שנוצר המלבן $ABCO$.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

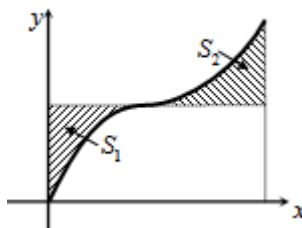
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

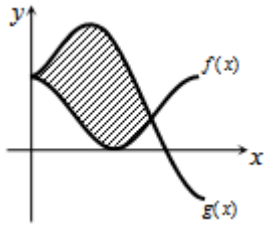
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 2\pi$,

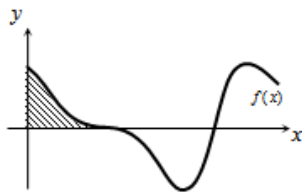
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.

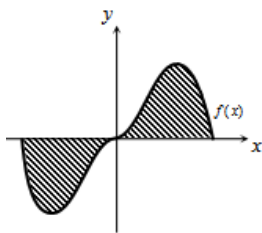




- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
 $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמשו בזהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 5 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות
 $f'(x) = 0$ בתחום $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קיצון,
 נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
 חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$.
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$
 בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש. (1)

א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$ (1)

א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול. (2)

ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

א. $(0, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ (3)

א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש. (4)

א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ (5)

$b = -2, a = 2$ (6)

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 7 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א 31
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים 37
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות 40
4. משפטי האינטגרביליות 43
5. אינטגרביליות לפי דארבו 44
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית 46

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר, } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10 הוכיחו כי :

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

11 הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

12 תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$.

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

13 ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\text{14 חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{15 חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

16 נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ , בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון

החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b g(t) dt = 0, \text{ אז } \int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\arctan 6 - \arctan 3$

(6) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\frac{17}{12}$

(8) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9) $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $x = e^2$

(13) 0

(14) $\frac{\pi}{4}$

(15) $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17) 0

(18) $2 \arctan 4$

(19) 0

(20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

(21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25) $1 - \sqrt{3}$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

- (1) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $m \leq f(x) \leq M$ לכל x בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$ לכל $x \in [0, 1]$. הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0, 1]$.

(13) תהי $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0, a]$.

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$$

הוכיחו כי

תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)| dt = 0$.

הוכיחו כי לכל x בקטע (a, b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$.

הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a, b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1, n]$.

הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b)

$$\text{וגם } f'(x) \leq M \text{ לכל } x \text{ בקטע זה, וכן } f(a) = 0, \text{ אז } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

(19) יהיו $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b], \text{ כך ש-} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$:

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

- הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a, b]$.
- מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
- מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1, 1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a, b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

$$4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינטגרביליות לפי דארבו

שאלות

- (1) נתונה $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $f(x) = x$.
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$.
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$(3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

$$(4) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ בקטע } [0,1].$$

- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה f , כך ש- $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות, אך f לא אינטגרבילית.

- (5) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P, f) = U(P, f)$. הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

- (6) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה P_n של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$.
- א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$.

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x) = x$, בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x) = x^2$, בקטע $[0,2]$.

(8) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 f = \int_0^1 f = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.} \quad \int_0^2 f = \int_0^2 f = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

שאלות

(1) תהי $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- n תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n = 6, 8, 10, 20$.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה והיו P ו- Q שתי חלוקות של הקטע, כך ש- Q עידון של P , אז $L(Q, f) \geq L(P, f)$ ו- $U(Q, f) \leq U(P, f)$. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:

$$\text{תהי } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציה חסומה, אז } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.

כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:

פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a, b]$, כך ש- $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a, b]$, ונניח כי (P_n) היא סדרה של

$$\text{חלוקות של הקטע } [a, b], \text{ כך ש-} U(P_n, f) - L(P_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכיחו ש- f אינטגרבילית.

$$\text{ג. נתון } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } f \text{ אינטגרבילית ומצאו את } \int_0^1 f(x) dx$$

(4) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

$$(5) \text{ סדרת פונקציות } f_n(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי: } f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

$$(6) \text{ תהי פונקציה } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ כך ש-} f(x) = x \text{ לכל } x \text{ רציונלי, ו-} f(x) = 0 \text{ לכל } x \text{ אי-רציונלי.}$$

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של f , והראו כי f אינה אינטגרבילית.

$$(7) \text{ תהי } f: [0,1] \rightarrow [0,1], \text{ מוגדרת באופן הבא:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{אם } x = \frac{p}{q} \neq 1, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול-} p, q \text{ אין גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 0 \text{ או } x = 1 \end{cases}$$

$$A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \right\}, N \in \mathbb{N} \text{ לכל } N, \text{ מוגדרת באופן הבא, לכל } p, q \in \mathbb{N}, q \leq N, \text{ אין גורמים משותפים.}$$

הראו שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$ ו- $\varepsilon > 0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$: \text{כך ש-} [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$, A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$\text{ו-} |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{2m-1} - x_{2m}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ג. הראו ש- f אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$,

כך שהרכבה $g \circ h$ אינה אינטגרבילית.

$$(8) \text{ תהי } f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ אינטגרבילית וכן } [c,d] \subseteq [a,b].$$

הראו ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f חסומה ב- $[c, d]$, ונתון :

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in [c, d]\}, \quad M' = \sup \{|f(x)| \mid x \in [c, d]\}$$

$$m = \inf \{f(x) \mid x \in [c, d]\}, \quad m' = \inf \{|f(x)| \mid x \in [c, d]\}$$

הוכיחו כי $M' - m' \leq M - m$.

ב. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות.

10 תהינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

ב. הוכיחו כי $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$,

אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-

11 תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (כלומר, $f(x) \geq 0$).

א. הוכיחו כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x) dx = 0$, אז $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה f אינטגרבילית ב- $[a, b]$, כאשר $\int_a^b f(x) dx = 0$,

אבל קיים $x_0 \in [a, b]$, עבורו $f(x_0) > 0$.

הערה: f לא תהיה רציפה.

12 תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c \in (0, 1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c, 1]$.

א. הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי

אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

(13) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a, b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית

$$\cdot \int_a^b (fg)(x) dx = 0, \text{ כלשהי } g, \text{ מתקיים}$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$).

(14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x, y \geq 0$.

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\} \text{ הוכיחו כי}$$

ב. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$
 הוכיחו כי

(15) [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

$$\cdot \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ הוכיחו כי}$$

רמז: $\sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

ב. תהינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

$$\cdot \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ הוכיחו כי}$$

רמז: $\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

(16) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של f במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

(17) סעיף א'

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + b^{n-2} + a^{n-1}),$$

כאשר $n \in \mathbb{Z}^+$ וכן $a, b \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ הוכיחו כי } k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n \text{ כאשר } k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

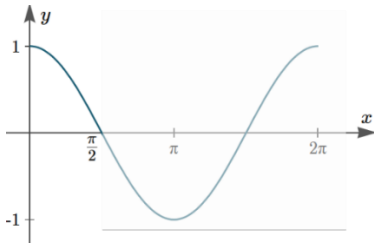
$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n.$$

$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n.$$

סעיף ב'

תהי $f(x) = x^n$ מוגדרת בתחום $[0, 1]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x) dx$.
 רמז: חלקו את הקטע $[0, 1]$ ל- m קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



(18) תהי $f(x) = \cos x$ מוגדרת ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- f אינטגרבילית

$$\text{ב-} \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ וחשבו את } \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

רמז 1: חלקו את $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ל- n קטעים שווים, והניחו כי $n \rightarrow \infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k \in \mathbb{Z}^+$ ו- $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

(19) חשבו את $\int_1^2 f(x) dx$, בעזרת החלוקה $P_n = \left\{ \overset{=1}{x_0}, x_1, \dots, x_n \overset{=2}{}, \right\}$

כאשר $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ ($0 \leq i \leq n$) וגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad \text{א. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

(20) תהיינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. הוכיחו:
 א. אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
 ב. אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$, אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

(21) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.
 הוכיחו כי \sqrt{f} אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

(22) נתונה הפונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:
 א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.
 ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.
 ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2 .
 ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f .

(23) חשבו את $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$, כאשר $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (פונקציית הערך השלם).

(24) הוכיחו כי אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$, אז αf אינטגרבילית ב- $[a, b]$, וכן $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.
 רמז: הניחו תחילה כי $\alpha \geq 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל- $\alpha < 0$.

(25) הוכיחו כי אם f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$, אז כך גם $f + g$, ובנוסף מתקיים $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
 רמז: הוכיחו כי $\int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$ וכן $\int_a^b (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$.

(26) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c > 0$, כך ש- $|f(x)| \geq c$ לכל $x \in [a, b]$. (לחלופין: f אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה)
 הוכיחו כי גם $g = \frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

(27) נניח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

- א. הוכיחו כי גם $f \cdot g$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.
 ב. הוכיחו כי אם $|g(x)| \geq c > 0$ לכל $x \in [a, b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

(28) הניחו כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ וכן ש- $a < c < b$, והוכיחו כי:

- א. אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, c]$ ו- $[c, b]$.
 ב. אם f אינטגרבילית ב- $[a, c]$ ו- $[c, b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, b]$.
 ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(29) נניח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

נגדיר $\varphi = \max\{f, g\}$ וכן $\psi = \min\{f, g\}$.

הוכיחו כי גם φ, ψ אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

רמז: $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$, $\min\{a, b\} = ?$

(30) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ של $[a, b]$ וכן $\varepsilon > 0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$ של $\{1, \dots, n\}$, באופן הבא:

$i \in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i - m_i < \varepsilon$ ו- $i \in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i - m_i \geq \varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $\tau > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל P כנ"ל $s_\varepsilon(P) < \tau$ $\Rightarrow \|P\| < \delta$.

(31) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$.

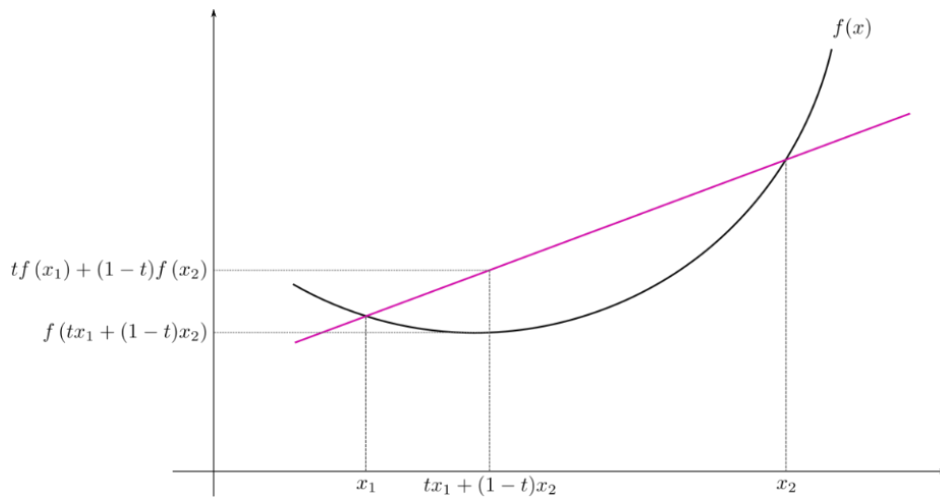
א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ל- P ,

כך ש- $S(f; P, C) = L(f, P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי f רציפה?

(32) זכרו כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a, b \in I$, ולכל $t \in [0, 1]$, מתקיים

$$f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$


א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, מתקיים אי-השוויון

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$$

[רמז: אינדוקציה על n]

ב. (אי-שוויון יַנְסֶן)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

$$f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

הוכיחו כי

(33) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכיחו כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכיחו כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

(34) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכיחו כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

(35) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

$$\int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

הוכיחו שקיים $c \in [a, b]$ ש-

(36) תהי A קבוצת כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, שהן אינטגרביליות בכל $[a, b]$,

$$\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1 : x \in \mathbb{R}$$

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x \in \mathbb{R}$.

- א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- A .
- ב. הוכיחו כי אם $f \in A$, אז f גזירה ב- \mathbb{R} .
(רמז: תחילה הראו ש- f רציפה).
- ג. מצאו את כל הפונקציות ב- A .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

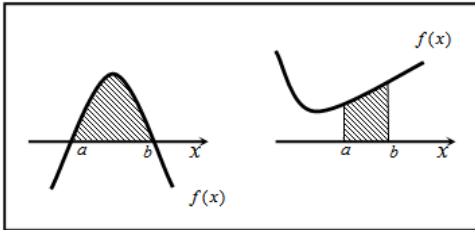
תוכן העניינים

55	1. חישוב שטחים
75	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
76	3. אורך קשת

חישוב שטחים

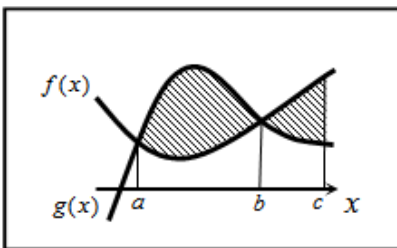
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

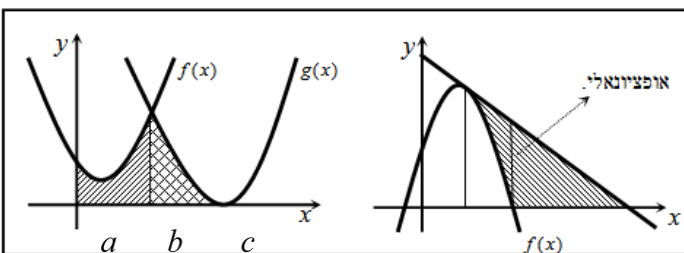


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

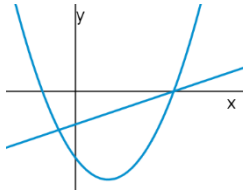
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

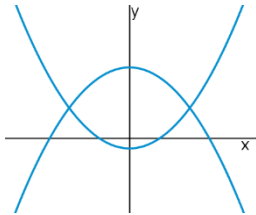


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

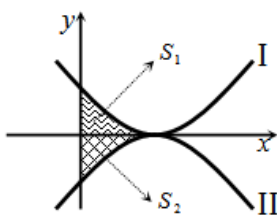
שאלות



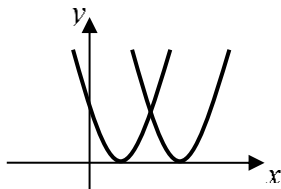
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



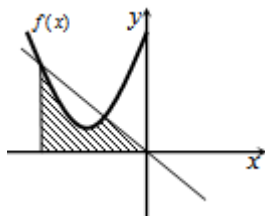
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



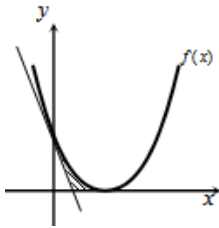
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמתואר באיור.
 א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



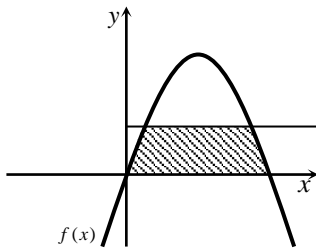
- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



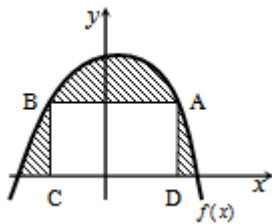
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



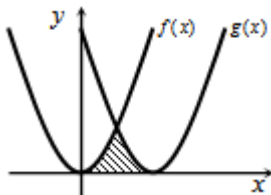
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



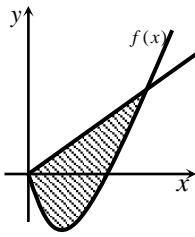
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- (8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן, היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



- (9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

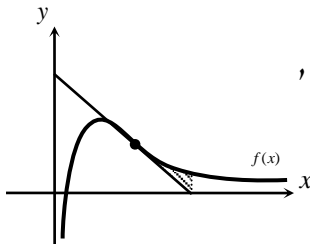
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

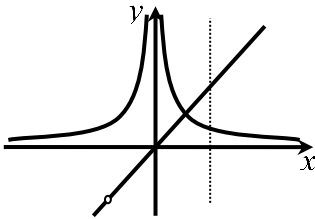
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

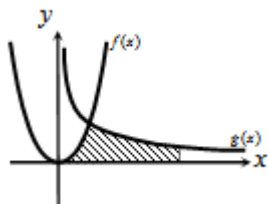


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



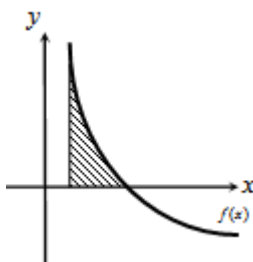
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע a), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



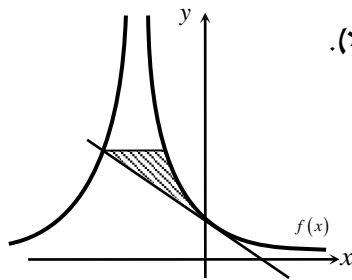
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

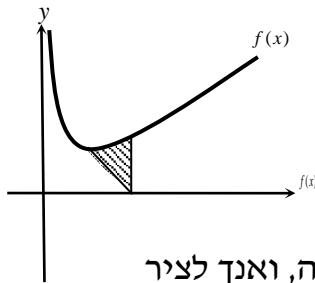
ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (פרמטר חיובי).

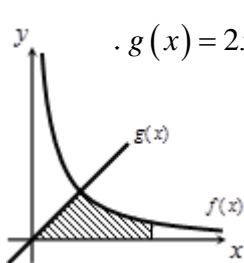
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

- א. מצאו את ערך הפרמטר A .
- ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.
- ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

- א. מצאו את נקודת המינימום שלה.
- ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2, 0)$, שעל ציר ה- x .
- מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

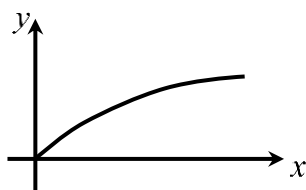


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

- א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .



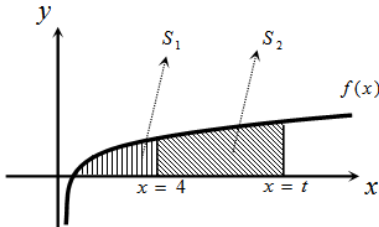
19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).
 נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
 ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
 מצאו את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

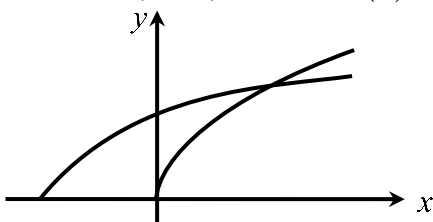
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

- ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר $(b > 0)$.



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .

(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$.

ברביע הראשון.

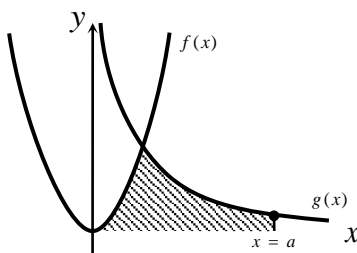
נעביר ישר $x = a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $\frac{1}{3}85$.

מצאו את a .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x = k$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

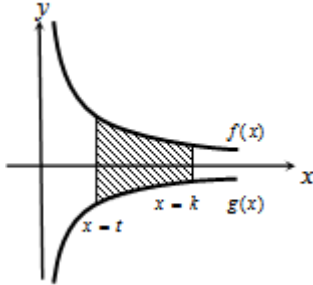
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

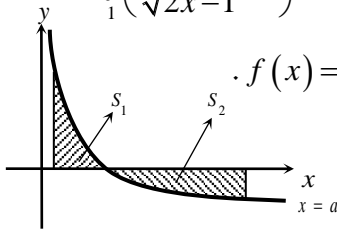
לבין הישרים $x = k$ ו- $x = t$, הוא $S = 12$.

מצאו את t .



(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a , $(a > 1)$ יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 1$ ו- $x = 13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

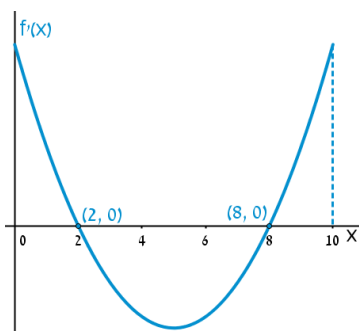
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כלומר את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2 .

נמקו.



(26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

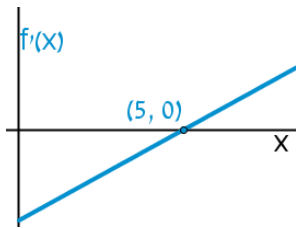
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(2) = 6$, $f(0) = -4$, $f(5) = 0$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



(27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

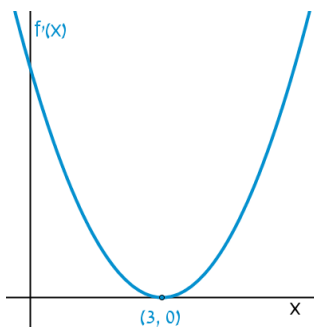
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

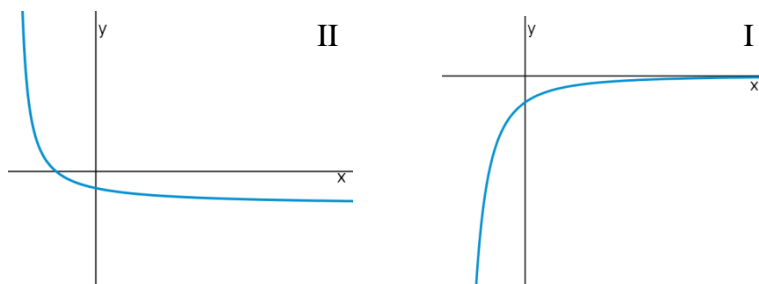
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

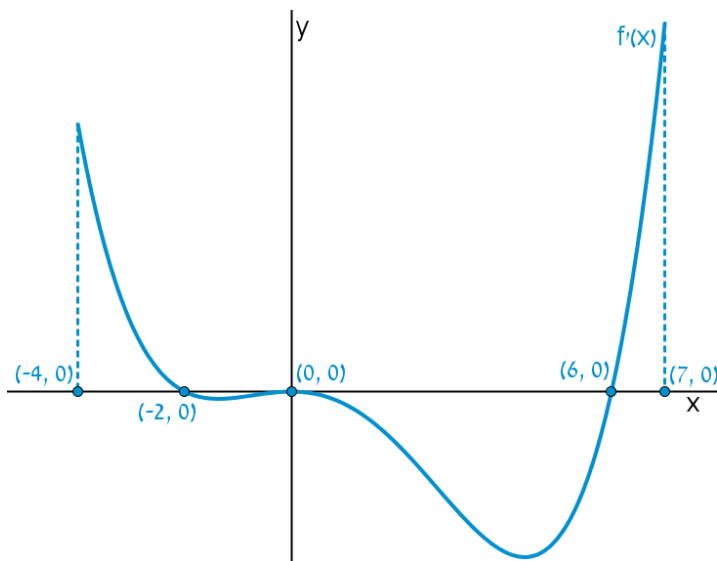


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

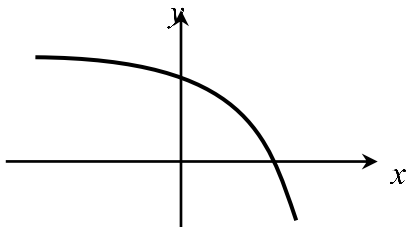


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$, לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

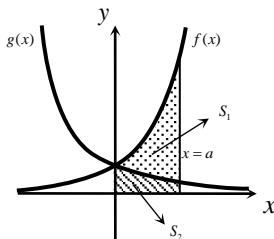
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



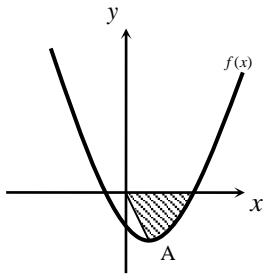
- (31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

- (33)** נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$, ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן. הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

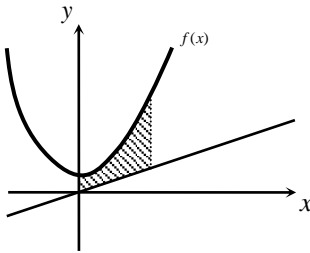


- (34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



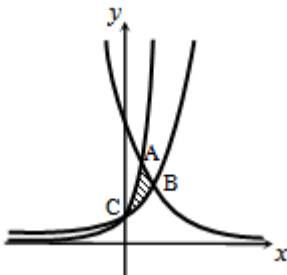
(35) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
 ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



(36) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

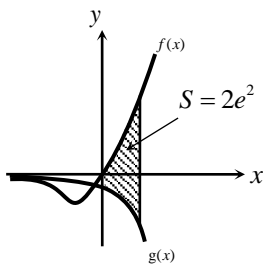
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.
 א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
 ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y = 0.1x$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x = 2$.



(37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
 ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



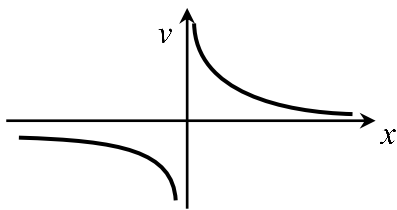
(38) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.
 ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x - 1$ ו- $g(x) = -e^x$.
 נעביר ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
 מצאו את a .

פונקציות לוגריתמיות

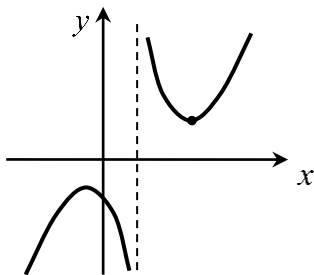
אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



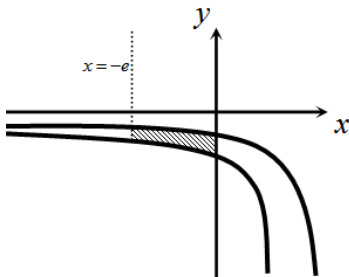
39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.

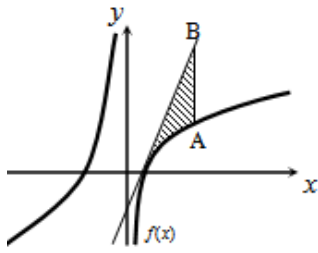


41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

$$\text{ו-} g(x) = \frac{a-1}{x-2}, \text{ בתחום } x < 0.$$

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

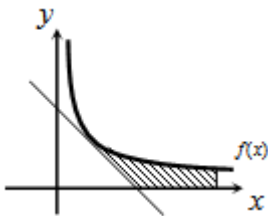


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
 א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

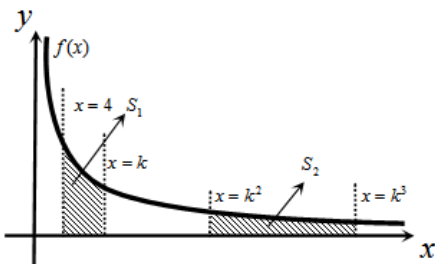
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
 א. מצאו את $f(x)$.

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



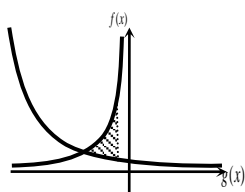
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$ ($x > 4$).

א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

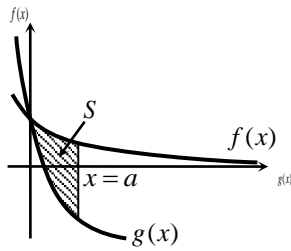
- ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשבו את ערכו.
 ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצאו את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$
 בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נעביר ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

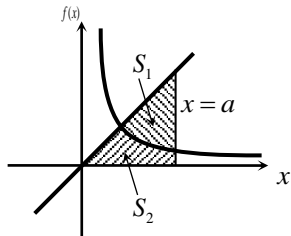
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

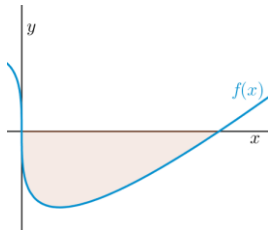
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

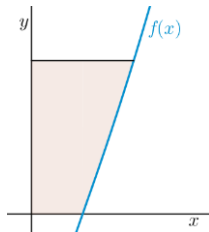
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



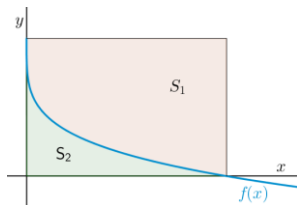
(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

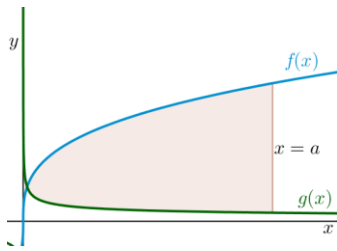
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
 חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

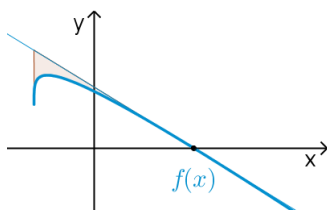
בתחום $x > 0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$ (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

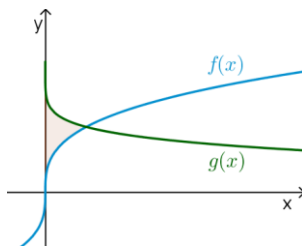
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- y .

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

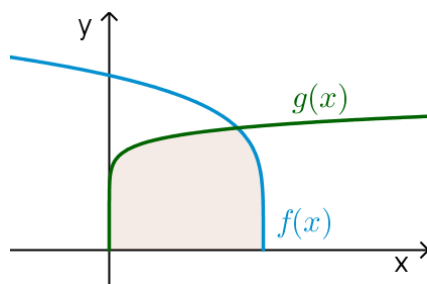
בנקודה שבה $x = 1.2$.

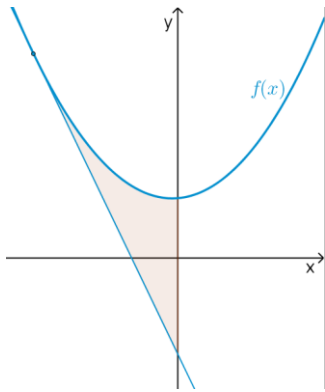
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

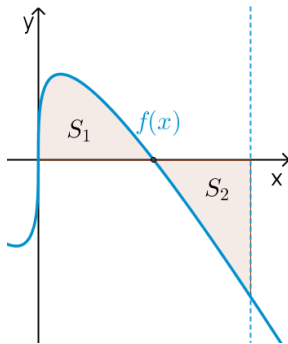
$g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור. מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $f(x) = I$, $g(x) = II$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$. ב. $(5,0)$. ג. i. $S_1=2$. ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$. ג. $\min(5,-2)$. ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$.
- (35) א. $A(1,-e-2)$. ב. $y=-(e+2)x$. ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$. ב. 1.52.
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$. ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$. ב. $a=2$.
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$. ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$. ב. $x=2$. ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$.
- (47) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (48) א. $(0,0), (8,0)$. ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$. ב. $(2,0)$. ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a = 1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad \text{(2)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad \text{(1)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad \text{(4)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad \text{(3)}$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{(6)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad \text{(5)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad \text{(8)}$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad \text{(7)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad \text{(9)}$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1097}{480} \quad \text{(3)}$$

$$21 \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad \text{(5)}$$

$$9 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad \text{(7)}$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad \text{(8)}$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad \text{(9)}$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 9 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב 77
2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב 80
3. חישוב נפח גוף כללי 81

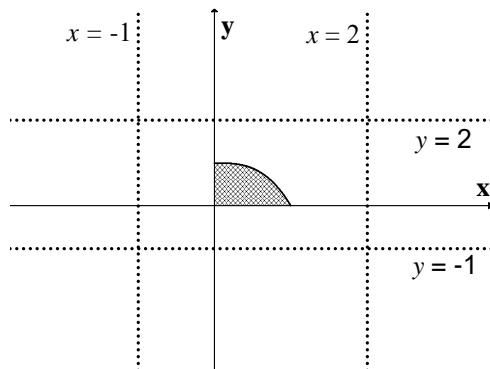
חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

(1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- x .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- y .
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:



(3) ציר ה- x .

(4) הישר $y = -1$.

(5) הישר $y = 2$.

(6) ציר ה- y .

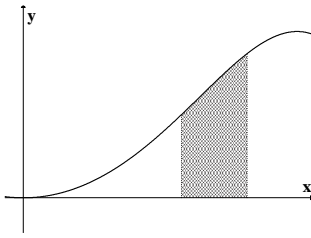
(7) הישר $x = -1$.

(8) הישר $x = 2$.

(9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

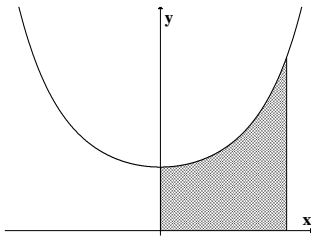
(11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$

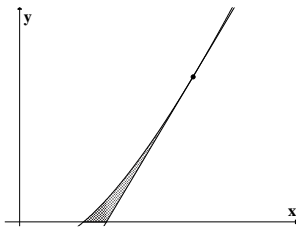
מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x ,

מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתקבל?

(15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \quad \text{ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3}\pi \quad \text{ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad (3)$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad (5)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (6)$$

$$2.1\pi \quad (7)$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad (8)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad (10)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (12)$$

$$\pi(e-1) \quad (13)$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad (14)$$

$$128\pi \quad (15)$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

- (1) הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה $x = \sqrt{9-y^2}$, עבור $-2 \leq y \leq 2$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

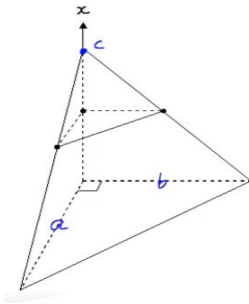
- (1) 8π
- (2) $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3) $S = 4\pi R^2$
- (4) 24π

חישוב נפח גוף כללי

שאלות

(1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .

(2) חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).



תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 10 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב 82
2. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה 85
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים 88

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

11 חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12 נתונה הפונקציה $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$, כאשר $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$.

חשבו את $g'(1)$ (הניחו כי f רציפה).

13 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $g''(x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha \neq 0$.

נגדיר $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

15 תהי f פונקציה רציפה וחיובית לכל $x \geq 0$.

הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \infty)$.

16 מצאו את $\int_e^4 f(x) dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{1}{t-1} dt + 2 \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt$.

17 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודה $x_0 = 2\pi$.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) $I'(x) = e^{-x^2}$

(4) $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5) $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6) $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) $\frac{2}{3}$

(9) $4e^{16}$

(10) 0

(11) תחום הגדרה: כל x .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.תחומי קמירות: $x > 1$, $-1 < x < -\frac{3}{7}$.תחומי קעירות: $-\frac{3}{7} < x < 1$, $x < -1$.

(12) 40

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e$

(17) $y = x - 2\pi$

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

$$(1) \text{ נתונה הפונקציה } f \text{ המוגדרת בקטע } [0, 2] \text{ כך: } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x) = f(x)$?

$$(2) \text{ נתונה הפונקציה } f \text{ המוגדרת בקטע } [-1, 1] \text{ כך: } f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x) = f(x)$?

$$(3) \text{ נגדיר } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי } f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} \text{ נגדיר } F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי}$$

הוכיחו כי $F' = f$ ב- $[-1, 1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t) dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

(4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{הוכיחו כי } \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

(5) תהי f פונקציה אינטגרבלית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(t) dt > 1$

הוכיחו שקיים x_1 , בקטע (a, b) , עבורו $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$.

(6) תהי f פונקציה רציפה ומחזורית לכל x , עם מחזור p .

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t) dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ קבועה בקטע $(0, \infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי C עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

(8) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, 1)$, כך ש- $f(c) = 3c^2$.

(9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, \pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, \pi/2)$, כך ש- $f(c) = 2 \cos 2c$.

(10) תהי $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0, \pi/4]$, כך ש- $f(c) = 2 \cos 2c \int_0^{\pi/4} f(t) dt$.

(11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(c)$.

(12) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$.

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

(13) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

- בקטע (a, b) , שעבורו מתקיים
- א. הוכיחו כי קיים c , בקטע (a, b) , כך ש- $f(c) = 0$.
- ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- f רציפה ב- $[a, b]$, ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- f אינטגרבילית ב- $[a, b]$? נמקו.

(14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{-|x|}$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$,

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ונניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 0$).

תשובות סופיות

(1) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$. ג. רציפה ולא גזירה.

ד. לא.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = 0$ לכל x בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.

ד. לא.

(7) א. $C = 0$. ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

שאלות

(1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = 1, \text{ ו-} [a, b] \text{ רציפה ב-} f$$

הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x) = 1$.

(3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ונניח כי $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

$$\text{וכי } \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

הוכיחו שקיים x , בקטע (a, b) , שעבורו $f(x) = 0$.

(4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n, n+1]$.

הוכיחו כי $f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x) dx < f(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(6) יהיו $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = g(c)$.

(7) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$.

- (8) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
 נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.
 הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$.
- (9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$ בקטע $[0, 2\pi]$.

- (10) ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
 אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$
 הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה
 לאינטגרביליות.

(11) הוכח כי $\frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$

(12) הוכח כי $\frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$

(13) הוכח כי $\frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$

- (14) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$

- (15) נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 11 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

90	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
93	2. מבחן ההתבדרות של טורים
94	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
96	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
98	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
99	6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123\dots + 0.141414\dots$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$
- (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$
- (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$
- (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$
- (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$
- (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$
- (9) מתבדר.
- (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
- (11) $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר. ד. מתבדר. ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
- (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ג.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ב.	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ א.
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ ו.	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ה.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ד.

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$(\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$.

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון $p(x)$ פולינום.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 12 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

104	1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
106	2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
107	3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
108	4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
109	5. מבחני השוואה
111	6. התכנסות בהחלט
112	7. מבחן דיריכלה
113	8. התכנסות בתנאי

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5 :

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר : ∞ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

(1) מתבדר : ∞ .

(2) מתבדר : ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

(1) מתבדר: ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתבדר. |
| (3) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) מתבדר. |
| (7) מתכנס. | (8) מתכנס. |
| (9) מתבדר. | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכיחו: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$, מתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$, מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 13 - טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 14 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 115 1. הצגה פרמטרית של עקום.
- 117 2. הנגזרת ושימושיה.
- 118 3. שימושי האינטגרל המסוים.

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה}$$

הנתונה בצורה פרמטרית .

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,

ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x + 3 \quad \text{ד. } y = -0.5x + 3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm \sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6)$$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בעקום } C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ כאשר } a, b > 0$$

* שימו לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

$$(3) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq \pi, \quad x = \cos t, \quad y = t + \sin t$$

לבין ציר ה- x .

$$(4) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = 4\cos t, \quad y = \sin^2 t$$

לבין ציר ה- x .

$$(5) \quad \text{חשבו את אורך העקום } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$(6) \quad \text{חשבו את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \text{ מהנקודה } (1, 0) \text{ לנקודה } (-1, \pi)$$

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \pi, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} x$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \frac{\pi}{2}, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} y$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \quad \text{חשבו את אורך העקום } -\pi \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$$

11) חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

8/3 (1)

πab (2)

1.5π (3)

$16/3$ (4)

8 (5)

4 (6)

(7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

$4\pi r^2$ (8)

$6\pi/5$ (9)

$6\pi\sqrt{29}$ (10)

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$ (11)

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 15 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 120 1. קואורדינטות קוטביות.
- 122 2. הנגזרת ושימושיה.
- 123 3. שימושי האינטגרל המסוים.

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4 \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$(6) \quad 6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8\sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2\sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

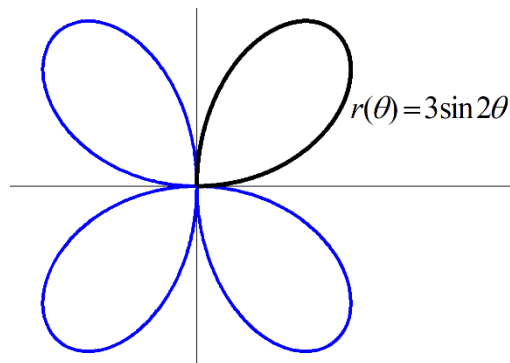
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- (1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1 + 2\cos\theta)$.
- (2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 6 + 4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y .
- (3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- (5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- (8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.
- (9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצאו את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- (11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

(12) העקום $r = 4 + 4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוסו } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוסו } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוסו } \sqrt{a^2 + b^2}$$

קרדיוודות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיוודות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$$

גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a < b)$$

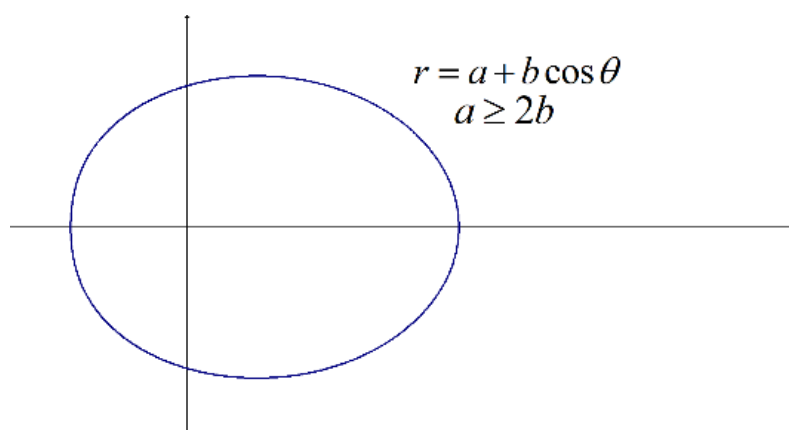
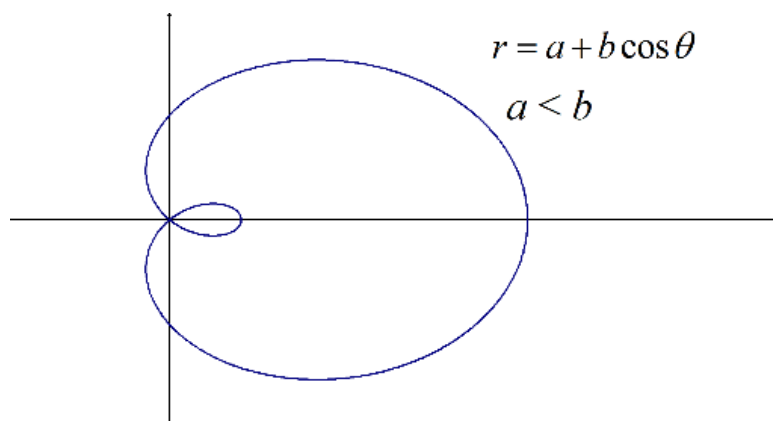
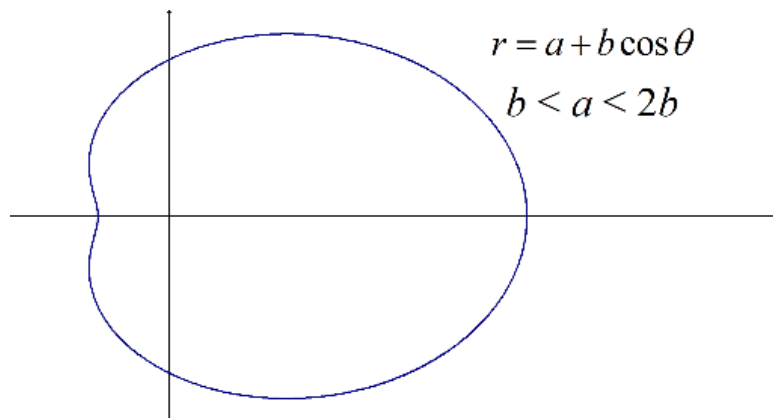
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a > b)$$

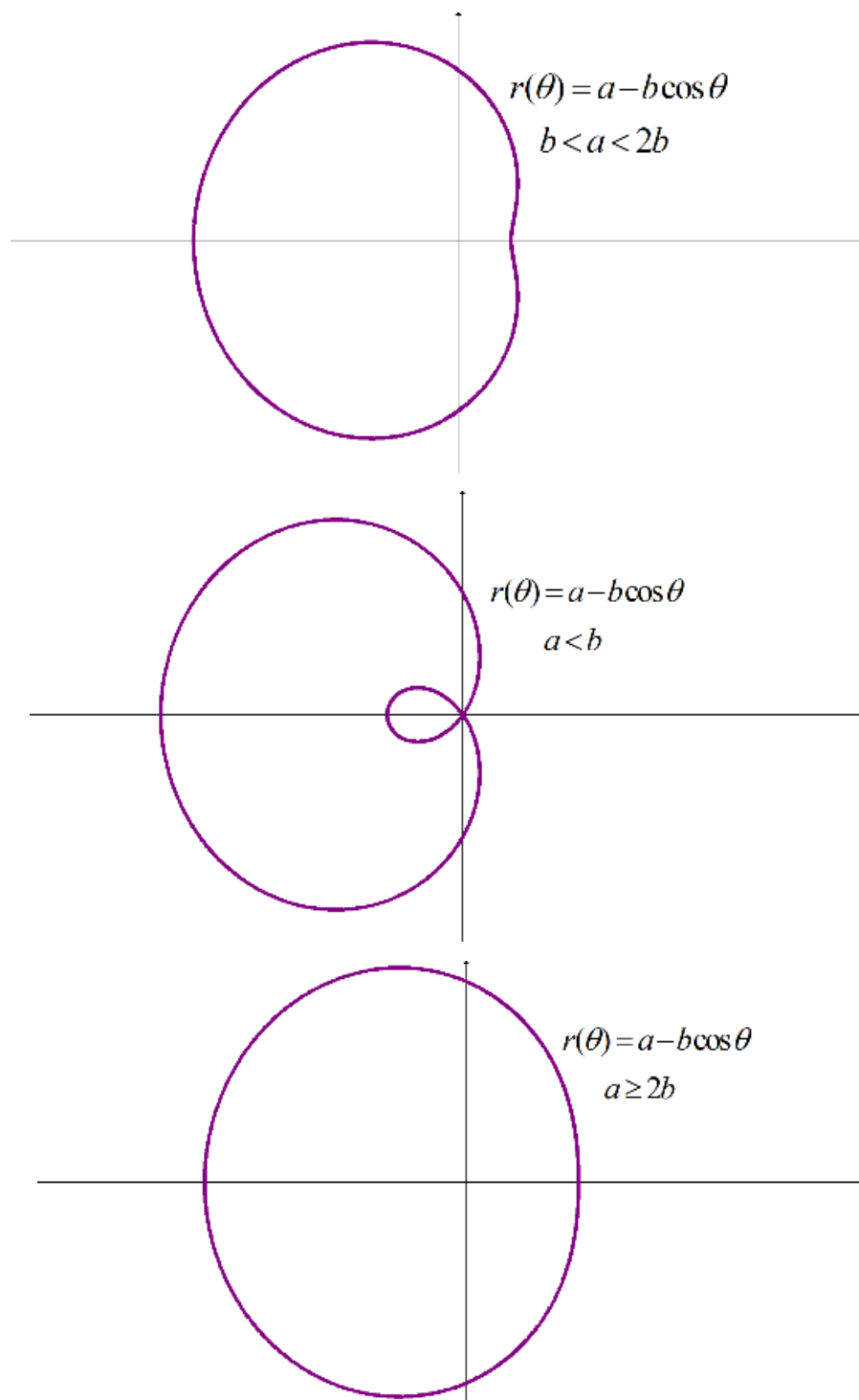
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

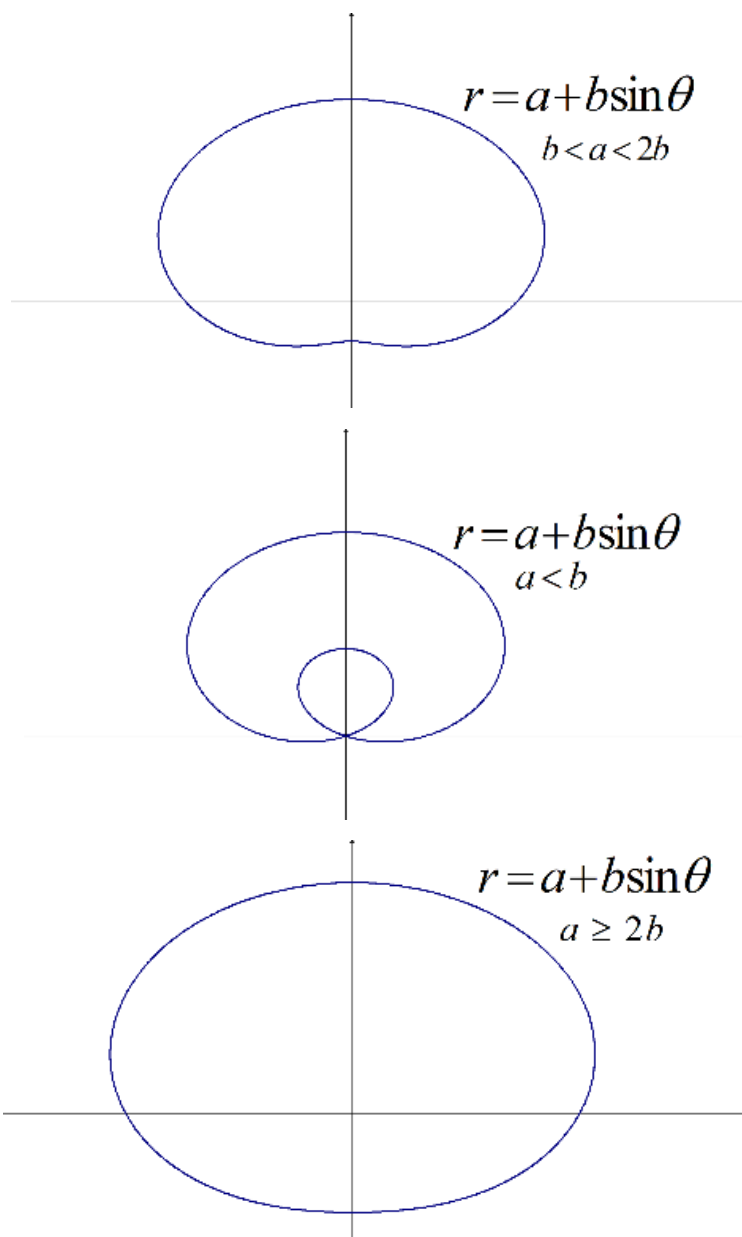
$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

למינסקטות ביתר פירוט

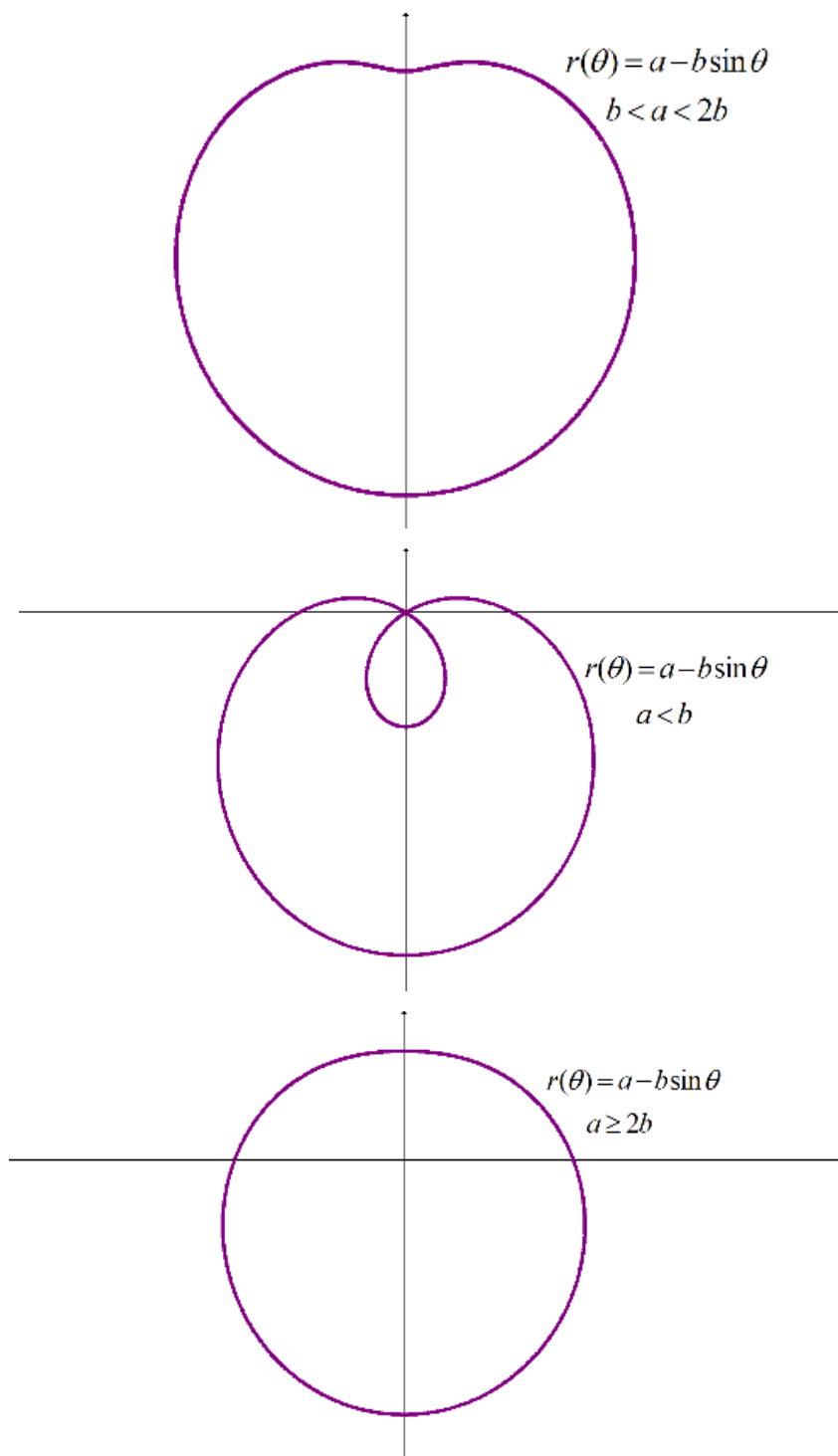
 הגרף של $r = a + b \cos \theta$:


הגרף של $r = a - b \cos \theta$

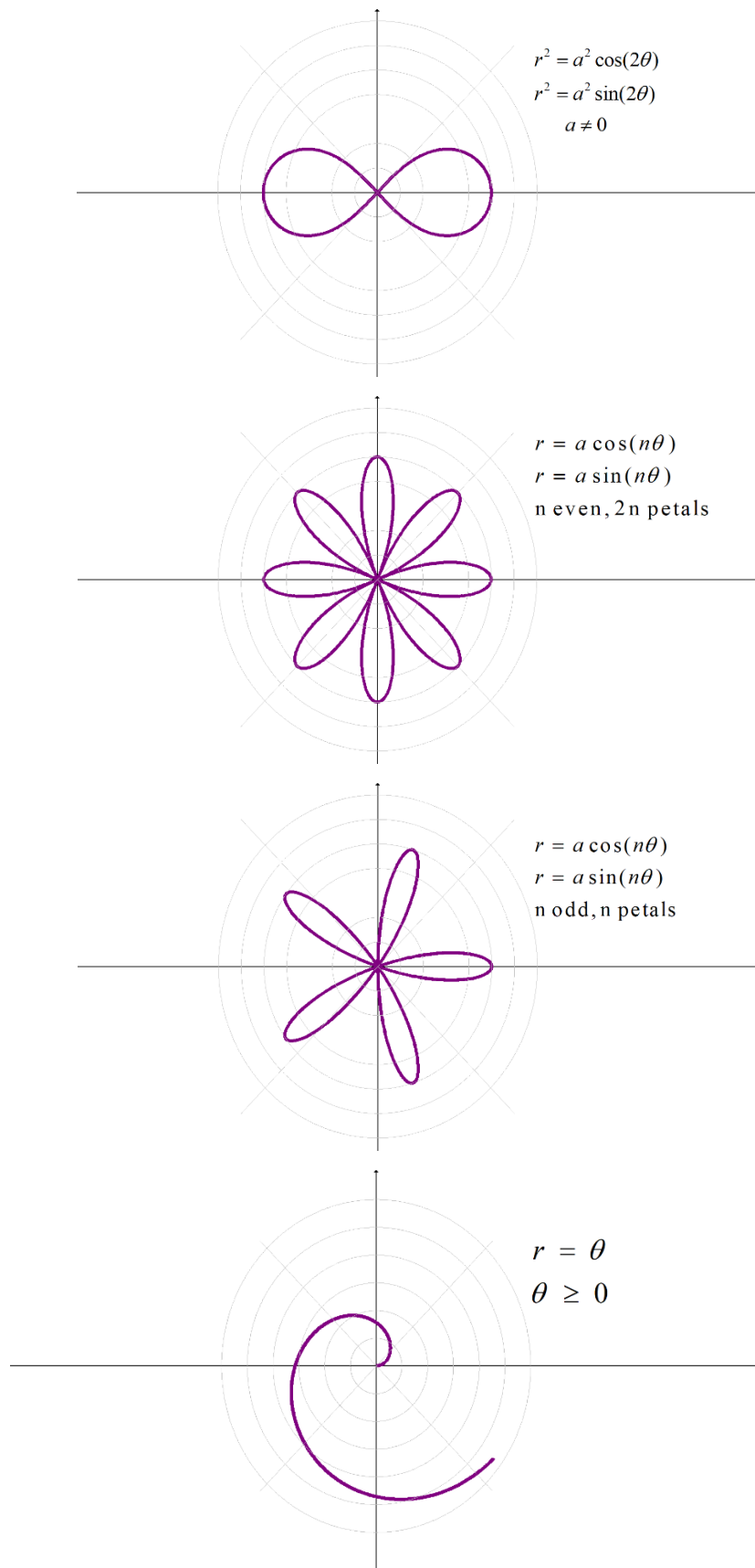


הגרף של $r = a + b \sin \theta$ 

הגרף של $r = a - b \sin \theta$



גרפים נפוצים נוספים



אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 16 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

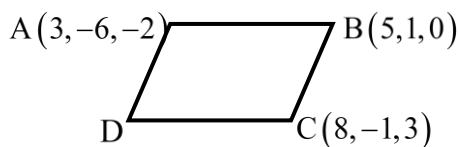
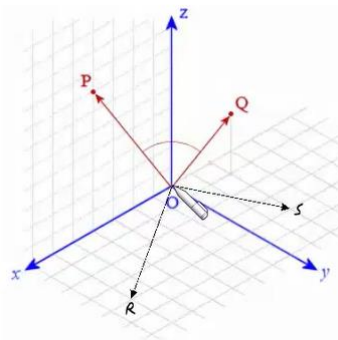
131	1. וקטורים
138	2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת
140	3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב
141	4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי
150	5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור

וקטורים

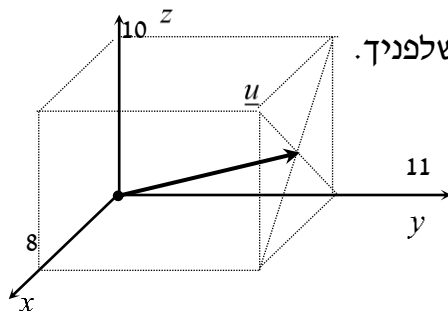
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך \underline{u} . סימונים מקובלים נוספים הם: \vec{u} , \vec{u} .
את גודל הווקטור \underline{u} נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

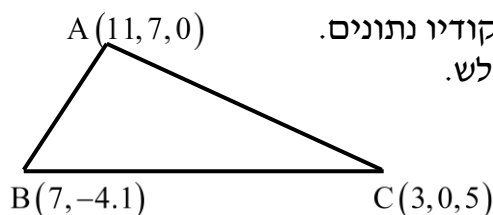
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט.



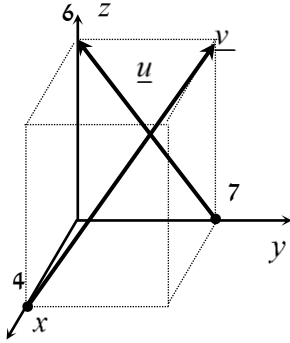
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overline{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

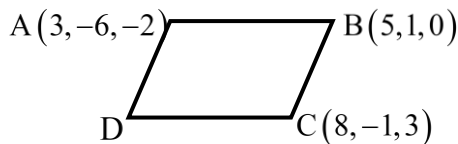
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי $\overline{AB} = \overline{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overline{AD} = \overline{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו :

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$, ויש למצוא את הווקטורים :

(17) $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18) $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19) $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
 $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$, $D(4, 3, -1)$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :
 $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצאו וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,
 ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

(26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(27) הוכיחו :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$. אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k . יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 . מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$. הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

$$(1) \quad \text{נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשבו: $(u \times v) \times w$.

$$(2) \quad \text{חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$. u \times v = 0, \quad u \cdot w = 0, \quad |u| \neq 0$$

הוכיחו כי $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.

$$. u \perp v, \quad |u| = 1, \quad |v| = 4$$

חשבו $|(u+v) \times (u-v)|$.

$$(5) \quad \text{נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשבו:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) חשבו את נפח:

$$\text{א. המקבילון שקדקודיו } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$\text{ב. הפירמידה שקדקודה } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה } A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c . הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$, שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב. הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

10 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשבו:

א. $u \cdot (w \times v)$ ב. $(v \times w) \cdot u$ ג. $w \cdot (u \times v)$ ד. $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

א. -3 ב. -3 ג. -3 (5)

א. 6 ב. 1 (6)

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4 (10)

אין לו נוסחה. (11)

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

(1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

(2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) $\sqrt{26}$

(3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$

כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)

$$\text{הווקטורית } r(t) = (t, t^2, t^3).$$

(2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad (\text{במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$

בסעיפים א-ג, חשבו:

$$\text{א. } \lim_{t \rightarrow 1} r(t)$$

$$\text{ב. } r'(t)$$

$$\text{ג. } \int_0^1 r(t) dt$$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה : $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$

א. חשבו : $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t = 0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t = 0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$

ב- $t = 0.5\pi$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$

חשבו את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r .

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t , אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$.

$$(10) \text{ נתון } r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,

$$\text{הוכיחו כי } r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

$$(11) \text{ חלקיק נע לאורך עקום מרחבי } x = t^3 + 2t, y = -3e^{-2t}, z = 2 \sin 5t$$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשבו את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

$$(12) \text{ נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן } \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

$$(13) \text{ חלקיק נע על העקומה } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$$

א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .

ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

$$(14) \text{ מהירות } v(t) \text{ של חלקיק נתונה על ידי } v(t) = (2, -1, -10t)$$

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

$$(15) \text{ תאוצה } a(t) \text{ של חלקיק, נתונה על ידי } a(t) = (18 \cos 3t, -18 \sin 3t, 0)$$

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

16 וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = (2t^2 - 5t + 3, t - 5, t^2 - 3)$. עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t) = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$. הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18 הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19 חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r(t) = (t^2, 0, t)$.

20 וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t = 1$.

21 וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t) = (8 \cos 4t, 8 \sin 4t, 0)$. ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0) = (0, 2, 4)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t = \frac{\pi}{4}$.

22 העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוס R .
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C .
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a, b) ורדיוס R .

23 נתון העקום $r(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$. באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

$$(24) \text{ נתון העקום } r(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$$

הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

$$(25) \text{ נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה } y = f(x)$$

$$\text{הראו שהעקמומיות היא } \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(26) \text{ נתון העקום } y = \frac{1}{x}$$

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי. מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

$$(27) \text{ מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום } x^4 + y^4 = 2 \text{ בנקודה } (1,1)$$

הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת. מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

$$(28) \text{ נתונה הפרבולה } y^2 = 8x$$

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

$$(29) \text{ העקום } C \text{ הוא מעגל שמרכזו בנקודה } (a,b) \text{ ורדיוס } R$$

מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

$$(30) \text{ נתון העקום } x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$$

$$\text{בנקודה בה } \theta = \pi/6$$

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t) = (x(t), y(t))$.

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

הראו שהעקמומיות היא

(32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ב- $t = 0$

וב- $t = \pi/2$.

ב. הציבו $a = 3$, $b = 2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

(33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r = f(\theta)$ היא

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

(34) חשבו את העקמומיות של $r = 2 \sin \theta$ עבור $\theta = \pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

(35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r = 1 + \cos \theta$ עבור $\theta = \pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.} \quad (2)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4) \quad \text{ג.}$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \quad \text{ה.}$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

א. שאלת הוכחה. (8)

$$24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק}, \quad x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

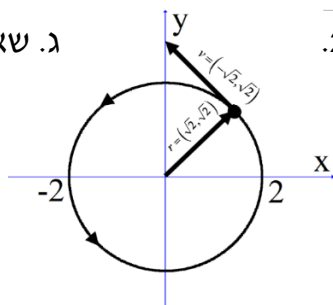
$$76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישור}$$

א. שאלת הוכחה. (10)

$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

ג. שאלת הוכחה.



$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$

$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

$$v_{\min} = v(1) = \sqrt{6} \quad (16)$$

$$(17) \text{ א. } \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right) \quad \text{ב. } \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(18) שאלת הוכחה.

$$(19) \quad \kappa = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$(20) \quad \rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$$

$$(21) \quad \kappa = \frac{2}{13}, \quad \rho = 6.5$$

(22) א. $\rho = R, \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל-ב. שאלת הוכחה. $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$.(23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0, \pi, 2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות**מינימלית** עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלהרדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$(26) \text{ א. } \rho(x) = \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 |x|}$$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה (1,1) ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

$$\text{ג. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

(27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2 + (y-2/3)^2 = 2/9$.

$$(28) \text{ א. } y = \pm 3, x = \frac{9}{8} \quad \text{ב. } (x-59/8)^2 + (y+27/16)^2 = (125/16)^2$$

$$(29) \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \rho = R$$

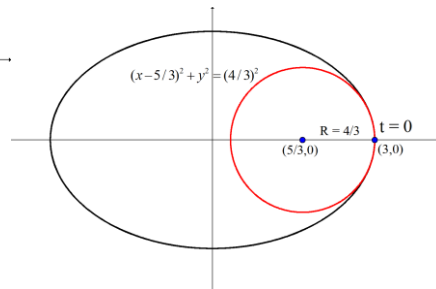
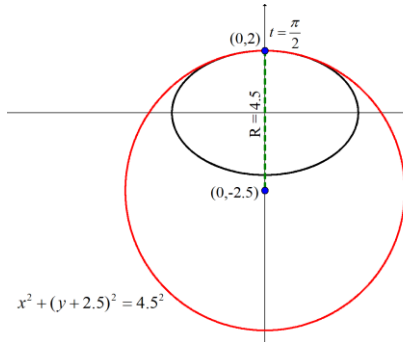
$$(30) \text{ א. } \rho = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ב. } x^2 + (y+1)^2 = \frac{27}{16} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

(31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \quad \kappa(\pi/2) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

(32) א.

$$\rho(0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(\pi/2) = \frac{a^2}{b}$$

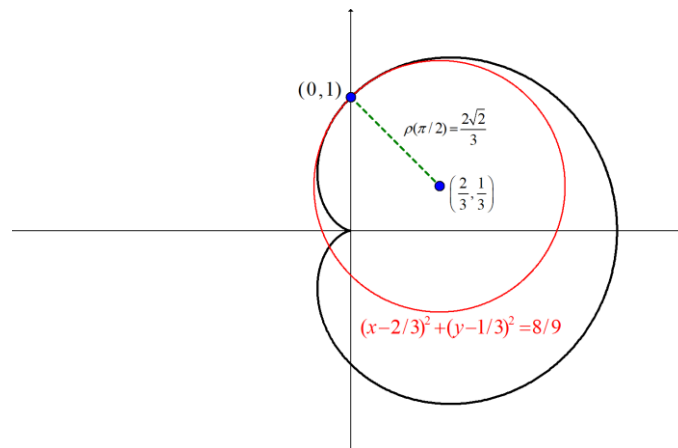


ב.

(33) שאלת הוכחה.

(34) $\kappa = \rho = 1$

(35) ראו שרטוט:



גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(3) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$.

(4) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו כי $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכיחו כי $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של \mathbf{F} המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של \mathbf{F} המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 17 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

152	1. הצגה פרמטרית של ישר
155	2. מצב הדדי בין ישרים
157	3. הצגה פרמטרית של מישור
158	4. משוואת מישור
159	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
160	6. מישורים המקבילים לצירים
161	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
162	8. מצב הדדי בין מישורים
163	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
164	11. זווית בין שני ישרים
165	12. זווית בין ישר ומישור
166	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
167	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
168	16. מרחק בין נקודה לישר
169	17. מרחק בין נקודה למישור
170	18. מרחק בין ישרים מקבילים
171	19. מרחק בין ישר למישור
172	20. מרחק בין מישורים מקבילים
173	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
174	23. היטלים ונקודות סימטריה
175	24. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

- (1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?
- (2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?
- (3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$ ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.
- (6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ ומאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.
- (7) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$. כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .
 - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$. כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.
- (9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- z .
- (10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

11) ישר עובר בנקודה $(1, -1, 4)$ וכיוונו $(4, 10, 2)$.
 מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב. $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד. $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1, -1, 2)$ ו- $B(4, 0, 1)$.
 תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב. $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג. $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד. $\ell: x-1 = y+10, z = 4$

ה. $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10) $(7, -5, 0)$

(11) ה

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1) \quad \text{א. (12)}$$

$$\ell : \begin{cases} x - 3y = 4 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z \quad \text{ג.}$$

$$\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10) \quad \text{ב.} \quad \underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10) \quad \text{א. (13)}$$

$$(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0) \quad \text{ד.} \quad \underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1) \quad \text{ג.}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1) \quad \text{ה.}$$

מצב ההדדי בין ישרים

שאלות

- (1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $l_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $l_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $l_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $l_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $l_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $l_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $l_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצאו את ערכו של הפרמטר k , שבעבורו הישרים:
 $l_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $l_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
 א. מקבילים.
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
 הראו כי לכל ערך של k , הישרים l_{AB} ו- l_{CD} מצטלבים.

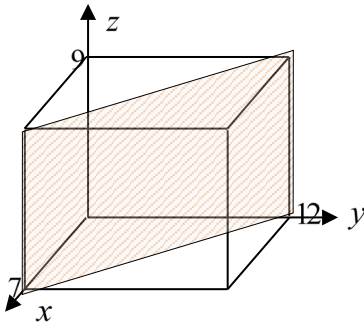
תשובות סופיות

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים, $(1, 5, 0)$.
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים, $(1, 8, -1)$.
- (7) א. $k = 2$ ב. $k = -2$.
- (8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

- (1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$.
- (2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$,
 ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.
- (3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$.
 הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$
 ומכיל את ציר ה- x .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.
- (6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
 מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2) $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3) $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6) $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

משוואת מישור

שאלות

- (1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$:
 א. $D(5, 7, 1)$
 ב. $E(2, -1, 1)$
- (2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.
- (3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$. מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.
- (4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

- (1) א. על המישור. ב. לא על המישור.
- (2) $k = 3$
- (3) $(3, 0, 0)$, $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, -9)$
- (4) $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$. כתבו הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצאו את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (4) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, 0, 5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.
- הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד, ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
 - מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
- ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
- ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2) $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3) $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4) $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$. 2. $-2x + 3y + z - 1 = 0$
- ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$. ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

(1) נתונה משוואת המישור $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$
 לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
 ו- $x+3y+2z-6=0$.
 מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

(1) $k = 3$

(2) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
 מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

- (1) הישר חותך, $(1, -1, 3)$.
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4) $a = 1$, $b = -7$

מצב החדדי בין מישורים

שאלות

(1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0, \pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

(2) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

- (1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.
- (6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

- (1) $\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$
- (2) $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
- (3) $\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$
- (4) $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
- (5) $\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$
- (6) $\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$

זווית בין שני ישרים

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.
- א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$. מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

(1) א. 78.521° ב. 90°

(2) 63.37° . הישרים מצטלבים.

(3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°

(4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

זווית בין ישר ומישור

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$
 מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
 וקדקוד הפירמידה הוא $S(3, 1, -2)$.
 מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

- (1) 18.87°
 (2) 44.83°
 (3) 14.9°

זווית בין שני מישורים

שאלות

(1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים : $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$
 $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם :
 $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$
 מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

(1) 90°

(2) 87.539°

(3) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

- (1) נתונות הנקודות $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13-k)$. מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

- (1) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

- (1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\underline{x} = t(2, 0, -7)$.
- (2) נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשבו את שטח המשולש ABC .
- (3) על הישר $\underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

- (1) $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3) $B(5, 4, -6)$ או $B(5, -4, 2)$.

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

- (1) מצאו את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.
- (2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.
- (3) נתונים ישר ומישור $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$, $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$. מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

- (1) $2\frac{1}{2}$
- (2) $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$ או $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3) $(1, -9, 5)$ או $(4, 5, 1)$

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

(1) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת המישור $4x - z + 6 = 0$.
- א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
 ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$.
- א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.
 ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. $k = 2, 4$

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$. מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$. מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$, $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$, $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$, $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$
 מצאו את ערכי הפרמטרים k, q, p , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

- (1) $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2) $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3) $k = 2, q = -2, p = 18, -12$
- (4) $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

- (1) נתונים שני ישרים, $l_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $l_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $l_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $l_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.
- (3) מצאו את מרחק הישר $l : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות

- (1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3) $\sqrt{2}$ יח"א.

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

- (1) נתונה נקודה $A(1, -1, 3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$.
- א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.
 ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל- A ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה $A(0, 0, 1)$ ונתון מישור $7x + 7y - z = 8$.
- א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.
 ב. מצאו את הנקודה C , הסימטרית ל- A , ביחס למישור.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1, 3, 2)$ ביחס למישורי הצירים.
 ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x, y, z)$ ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0, 2, 4)$, $B(-2, 6, -2)$, $C(2, -4, 8)$, $D(10, 2, 0)$.
 מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC .

תשובות סופיות

- (1) א. $B(0, 1.5, -1.5)$ ב. $C(-1, 4, -6)$
- (2) א. $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א. $B_{xy}(1, 3, -2)$, $C_{xz}(1, -3, 2)$, $D_{yz}(-1, 3, 2)$
 ב. $B_{xy}(x, y, -z)$, $C_{xz}(x, -y, z)$, $D_{yz}(-x, y, z)$
- (4) $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C . הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .
 - מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .
- (2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
 מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור, שמרכזו O(1,1,2).
 מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$.
 מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
 מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$.
 ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
 מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
 (הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)
- (10) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
 המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר
 $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$.
 מצאו את משוואת המישור π_3 .

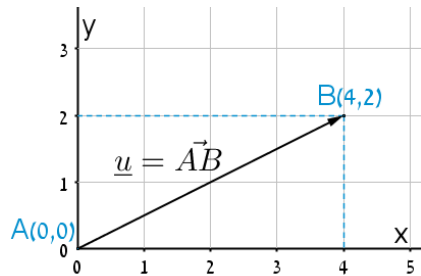
תשובות סופיות

- (1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07. ג. מתלכדים. ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$. הזווית היא: 47.6° .
- (3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל. ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78° .
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° . ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.
- (5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7) $(0, 0, 4)$ או $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8) $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10) $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$ או $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$

סיכום כללי

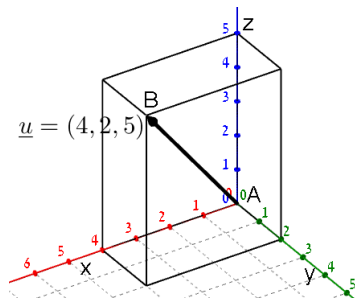
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הוקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הוקטור: $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(4,2,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- β תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור \underline{a} נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור \underline{u} נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

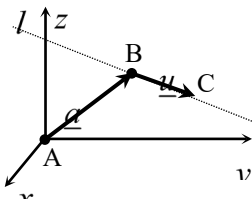
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$.

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- \underline{x} הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l .

דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$.

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.



***הערות:**

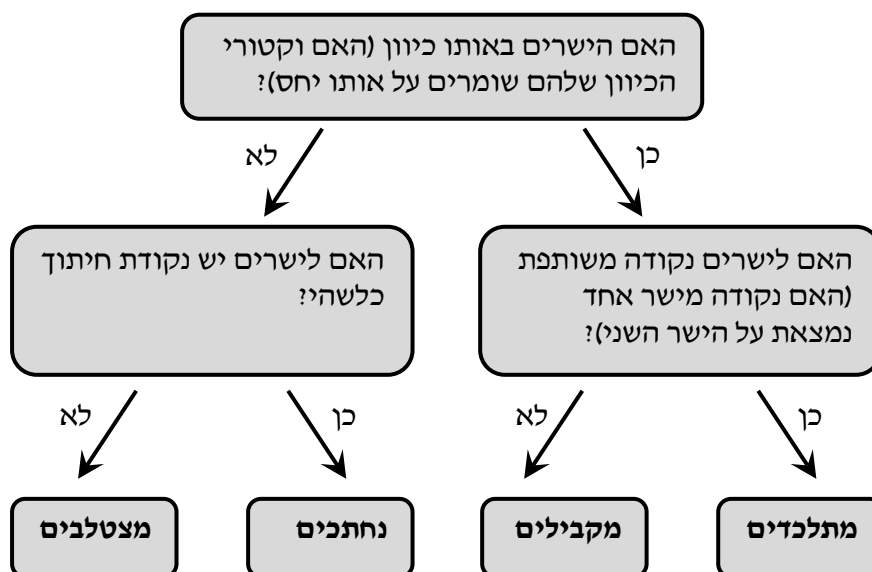
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור \underline{x} המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור \underline{a} ומוצאו של הווקטור \underline{u} .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור \underline{u} (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור \underline{a} .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

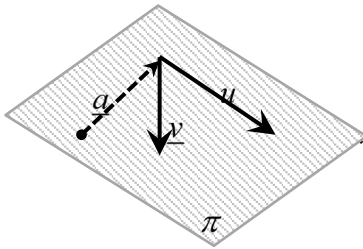
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור \underline{a} הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} הם וקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- \underline{x} הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

משוואת מישור

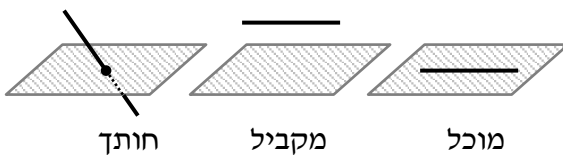
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים \underline{u} , \underline{v} תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$.
- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב ע"י: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
 - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
 - ב. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 18 - סדרות

תוכן העניינים

184	1. היכרות עם סדרות
186	2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות
187	3. חישוב גבול לפי אוילר
190	4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ
191	5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש
193	6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית
195	7. חישוב גבול לפי ההגדרה
198	8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה
200	9. הגדרת הגבול לפי היינה
205	10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס
207	11. משפט שטולץ
209	12. מבחן קושי להתכנסות סדרות
	13. שאלות הוכח או הפרך

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right) \quad (20) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad * \text{ רמז לשאלה 24}$$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|---|------------------------|
| 4 (2) | 0 (1) |
| 0 (4) | ∞ (3) |
| 1 (6) | -5 (5) |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8) | 1.5 (7) |
| 4 (10) | 0.25 (9) |
| $\ln 3$ (12) | 2 (11) |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13) |
| $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ (14) | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16) | 2.5 (15) |
| 0.5 (18) | 0.5 (17) |
| 4 (20) | $\frac{a-b}{2}$ (19) |
| $\frac{1}{3}$ (22) | 0.5 (21) |
| 1 (24) | ∞ (23) |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 10-1 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

(12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$

$$(13) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

$$(14) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$

$$(15) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k}\sqrt{n}}$$

$$(16) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$$

$$(17) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$(18) \text{ תהי } (a_n) \text{ סדרה חיובית, המקיימת } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ הוכיחו כי}$$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- 4 (1)
 0 (2)
 0 (3)
 0.75 (4)
 3 (5)
 $\frac{3}{4}$ (6)
 0 (7)
 16 (8)
 0 (9)
 1 (10)
 שאלת הוכחה. (11)
 שאלת הוכחה. (12)
 9 (13)
 1 (14)
 $\frac{1}{2}$ (15)
 $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ (16)
 1 (17)
 שאלת הוכחה. (18)

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \text{ יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
 הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- \sqrt{a} .

$$(5) \text{ יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6)$, לכל n .

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \text{ יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, לכל n .

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$(7) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

$$(8) \quad \text{תהי סדרה המוגדרת על ידי } a_1 = 0.5 \text{ ו- } a_{n+1} = \sin(a_n^2) \text{ לכל } n \geq 1.$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא \sqrt{a} .

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \quad \text{ב.1. } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

(8) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

הוכיחו לפי ההגדרה, כי:

$$\text{א. } (a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$\text{ב. } (a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$ שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ שואפת לאינסוף.

(17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

(18) הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

(1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב. $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג. $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

(2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב. $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג. $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי:

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

(7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n = (-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n = (-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ מתבדרת.

9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$ מתבדרת.

10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ לא קיים גבול.

11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2} \right]$ מתבדרת.

12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{10} - \left[\frac{n}{10} \right]$ מתבדרת.

13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$ מתבדרת.

14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ מתבדרת.

15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$ לא שואפת ל- ∞ .

(18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$ לא שואפת ל- ∞ .

(19) נתונה הסדרה $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$.

הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- ∞ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$.

(20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$ לא שואפת ל- ∞ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

(1) הוכיחו כי :

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| א. $\sin(2n\pi) = 0$ | ב. $\cos(2n\pi) = 1$ |
| ג. $\sin((2n+0.5)\pi) = 1$ | ד. $\cos((2n+0.5)\pi) = 0$ |
| ה. $\sin((2n+1)\pi) = 0$ | ו. $\cos((2n+1)\pi) = -1$ |
| ז. $\sin((2n+1.5)\pi) = -1$ | ח. $\cos((2n+1.5)\pi) = 0$ |
| ט. $\sin(n\pi) = 0$ | י. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ |
| יא. $\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n$ | יב. $\cos((n+0.5)\pi) = 0$ |

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי היינה :

- | | |
|--|---|
| (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{ x-4 }$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{[10x]}}$ |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x])$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]}$ |
- (10) נתון כי $f(x) = 2^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}$.

א. הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n , כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים.(11) הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])$ אינו קיים לפי היינה.רמז: הוכיחו ראשית כי לכל n טבעי מתקיים $[n^2 - 1] = n - 1$.

תשובות סופיות10) ב. $\sqrt{2}$ לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

$$\text{(5) חשבו את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}.$$

$$(7) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}.$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 0 \ (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}.$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(11) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(12) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(13) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(14) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right).$$

מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- (15) נתונה סדרה a_n , ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$. הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n .

1. a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \rightarrow L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n , $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$, הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$.

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\liminf a_n = \limsup a_n$.

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \lim a_n + \lim b_n$$

$$ב. \lim(a_n + b_n) \geq \lim a_n + \lim b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\lim(a_n + b_n) < \lim a_n + \lim b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $L > 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

26 תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

$$(27) \text{ תהי } (a_n) = (n - \sqrt{n} \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$$

- א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ג. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
 ד. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.
 ה. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$.
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?
 ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 ט. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.
 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, -1$.
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0 .
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

$$(1) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבוע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L \neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n > 0$ לכל n .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{p+1}$

(4) $\frac{k}{3}$

(5) $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

(1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

(3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

(4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n , כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

(6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$, לכל n , כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

(7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$

ג. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

$$(9) \quad \text{נגדיר סדרה } x_n \text{ על ידי } x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$(10) \quad \text{סדרה } x_n \text{ מקיימת } x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n} \text{ לכל } n \text{ טבעי, ו- } 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$\text{הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל } n \text{ טבעי מתקיים } \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$$

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכיחו או הפריכו

הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים :

- א. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X .
- ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X .
- ג. לכל n , פרט למספר סופי של n -ים, מתקיימת הטענה X .

שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

- (1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

(12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל n , אז $k < 1$.

(13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

(14) הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

(15) אם לכל n מתקיים: $a_n \in (0, 1)$, $a_{n+1} < a_n^2$ אז הסדרה a_n מתכנסת.

(16) הסדרה $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

(17) אם לכל n מתקיים: $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$, אז הסדרה $x_n \in (0, 1)$ מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם הסדרה $(x_n + \frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.
 ב. אם הסדרה $(x_n^2 + \frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

(20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת $x_{n+1} \neq x_n$ לכל n .
 הוכיחו או הפריכו :

- א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.
 ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ו- $a < b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n < b_n$.
 ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n \leq b_n$, אז $a \leq b$.

(22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

- א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n = 0$.
 ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \geq 0$.
 ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \neq 0$.
 ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n > 0$.

(23) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n \leq k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.
 ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n < k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.

(24) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$, לכל n .

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(25) הוכיחו או הפריכו :

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$

(26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n) , שעבורן: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n \rightarrow 2$, $b_n \rightarrow 0$ או $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 2$.

ב. $a_n b_n \rightarrow 0$.

(27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

(28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

(29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(30) נתונה הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל $x \geq 0$ מתקיים $\ln(1+x) \leq x$.

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$.

31 אם כמעט כל איברי (a_n) ו- (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

32 אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33 א. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

ב. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

34 א. אם, כמעט לכל n , $b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$.

35 א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N > 0$, כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$ לכל $n > N$.

36 אם (a_n) ו- (b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37 א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

38 א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$.

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

39) א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי n , כך ש- $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ד. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

40) א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

41) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < \frac{1}{3}$.

42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$.

ב. אם קיים קבוע $c > 0$, כך ש- $b_n \geq c$ כמעט לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ לא קיים.

44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) = \infty$.

46) נתונה סדרה חיובית (a_n) .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא: כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית (a_n) , וידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

(48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < a_n$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.

(49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.
- כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.
- אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

(50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם $|a_n| > 0$ לכל n , אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם לכל n מתקיים $|a_n| \geq n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 19 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

217	1. סדרות פונקציות
220	2. טורי פונקציות
222	3. טורי חזקות
224	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) $x > 0$

(2) $x \neq 5$

(3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$

(4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5) $x > 0$

(6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

- | | |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2) | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1) |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4) | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3) |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6) | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5) |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8) | $x = 1, R = 0$ (7) |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10) | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9) |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12) | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11) |
| $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13) |
| $(x < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16) | $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15) |
| $(x < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $(x < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad (8) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1} \quad (9) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$?

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

(12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

(13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2) \qquad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4) \qquad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6) \qquad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8) \qquad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{א. } (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13) \qquad \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 20 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 226 1. טור טיילור וטור מקלורן
- 228 2. טור טיילור סביב $X=X_0$
- 229 3. חישוב סכום של טור
- 230 4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
- 231 5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
- 233 6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
- 234 7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
- 240 8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות: לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס. מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$.

(6) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x^4 - x^4}{(x - \sin x)^4}$.

(7) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)^3 - (\sin x^3)^2}{\ln(1 + x^{10})}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

$$216 \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (7)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1) \cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[3]{9/100} \quad (11)$$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4} \cong 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$, עבור $|x| < 0.1$?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

(6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

(7) נתונה $f(x) = \sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0 \leq x \leq 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x \geq 0$ מתקיים $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

(8) נתונה $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1 < x$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$.

(9) נתונה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $|x| \leq 0.5$, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את \sqrt{e} ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

עבור $0 \leq x \leq 1$, $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שעבורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.
- ה. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

12 תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

13 תהי $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.

14 תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי $|f'(x)| \leq M$ לכל $0 < x$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

15 תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$,

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$

הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

(17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

(18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

- 1 א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$ (1)
 חישוב: $\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.
 ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$.
- 2 א. נוסחה: $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$ (2)
 ב. שאלת הוכחה.
- 3 א. נוסחה: $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \cdot \sqrt{(c+4)^8}}x^3$ (3)
 חישוב: $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.
 ב. שאלת הוכחה.
- 4 נוסחה: $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$ (4)
 חישוב: $\sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.
- 5 $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$ (5)
- 6 א. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!}$ (6)
 ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$.
- 7 א. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ ב. שגיאה הקטנה מ-0.25. (7)
 א. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$ (8)
 ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.
- 9 א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$ (9)
 ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.
- 10 א. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e} = 1.6487$ (10)
 ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \quad \text{ד. } \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$. בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 21 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

241	1. קווים ותחומים במישור.....
245	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית.....
251	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית).....
256	4. משטחים במרחב.....
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית.....
258	6. גופים במרחב.....
261	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות.....
265	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה.....

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.
 ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
 ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2$, $t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t$, $\pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (קבוע k).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2, -3)$ לנקודה $B(-1, 0)$.
- כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

$$(8) \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .-\pi \leq t \leq 2\pi$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{א. } 0 \leq t \leq 2\pi \\ \text{ב. } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז } (0, 0) \text{ . רדיוס : 5.}$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז } (8, 4) \text{ . רדיוס : 5.}$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases} \quad .\tau$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{שמאלית}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ימנית}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{וענף שמאלי}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ענף ימני}$$

$$1. \tau \quad C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ג.}$$

8 (8)

6π√29 (9)

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

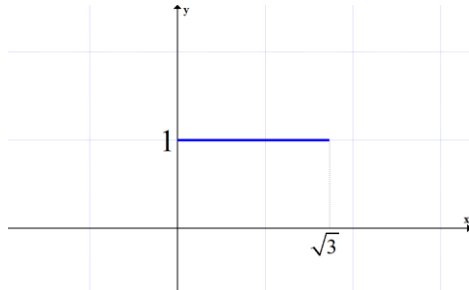
ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

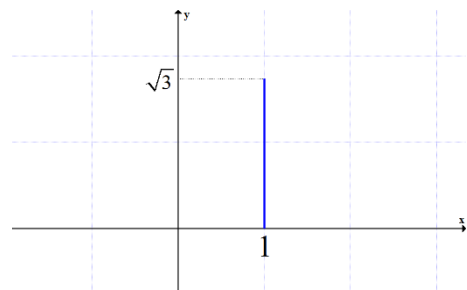
ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

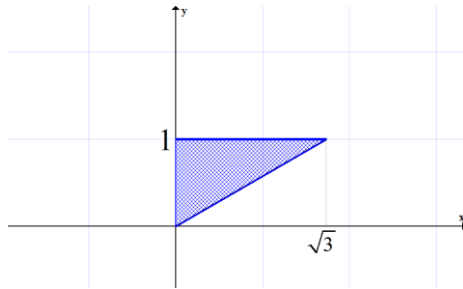
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

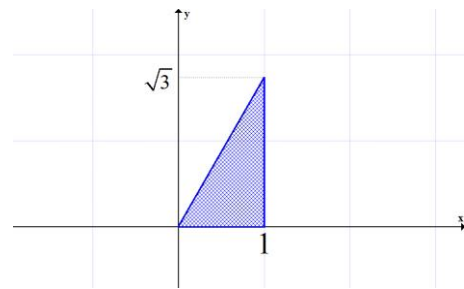
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. (1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. (5)}$$

$$6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ א. (6)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ו. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה. } \begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ד.}$$

$$r = 6 \sin \theta, 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב. } r = 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ א. (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ד. } \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ד.}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב. } 1 \leq r \leq 2 \text{ א. (11)}$$

$$0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \text{ (12)}$$

$$\arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad (14)$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$:

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$:

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
- החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
- א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
- נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z = -x, z = x$.
ג. $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$ $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$. ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

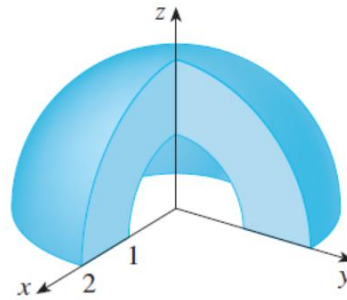
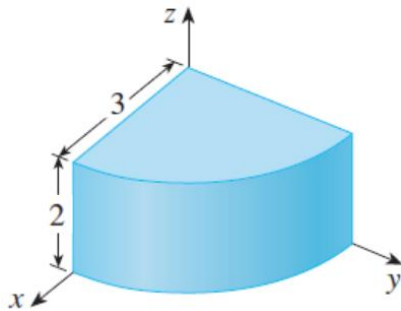
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטטו את D , החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים (xz)),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z = 3$

ב. $z = 4x^2 + 4y^2$

ג. $x^2 + y^2 = 4$

- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

ב. $2x + 3y + 4z = 1$

ג. $x^2 = 16 - z^2$

ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r = 3$

ב. $z = r^2$

ג. $z = r$

ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$

ה. $r = 4 \sin \theta$

ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

- 4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

- 5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- 6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- 7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- 8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

תשובות סופיות

1 א. מערכת גלילית: $z = 3$. מערכת כדורית: $r = \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2$. מערכת כדורית: $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2$. מערכת כדורית: $r = \frac{2}{\sin \phi}$. שם המשטח: גליל.

2 א. מערכת גלילית: $r^2 + z^2 = 9$. מערכת כדורית: $r = 3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. מערכת כדורית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z = r$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y = x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

6 א. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\} \quad \text{א. (7)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{א. (8)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ג.}$$

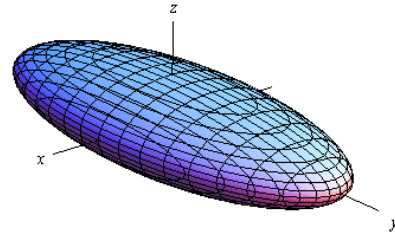
$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\} \quad \text{ד.}$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

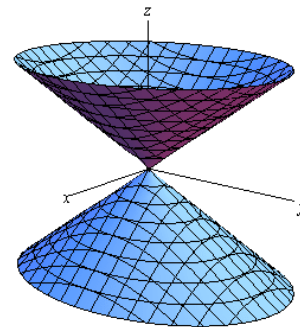
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

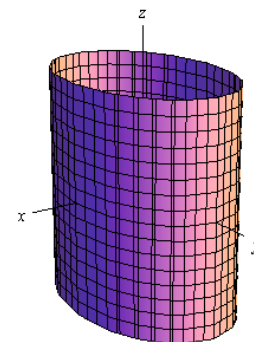
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

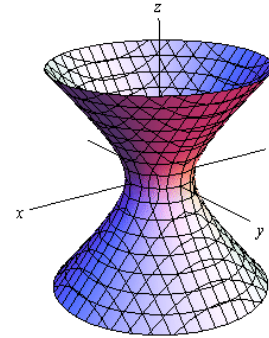


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

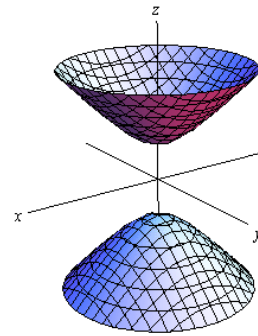
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

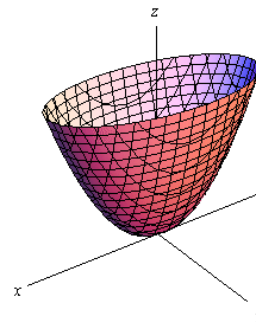
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

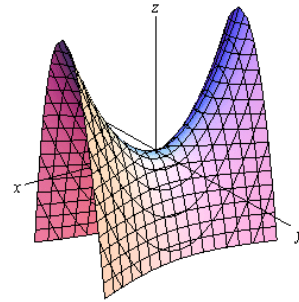
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



פרבולואיד היפרבולי



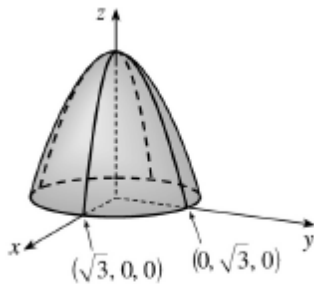
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

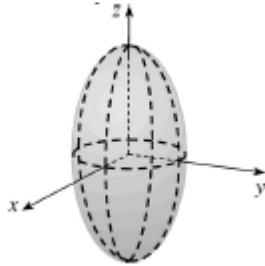
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

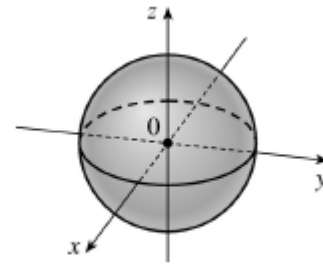
דוגמאות שונות



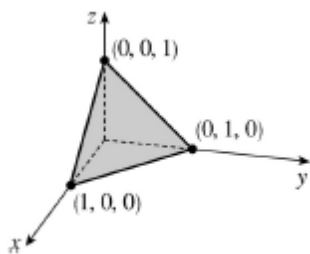
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



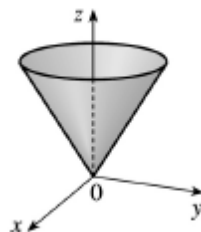
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



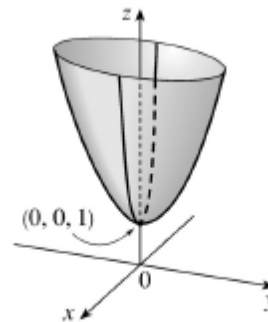
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 22 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 268
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 270
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 272
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 273

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + 4y}} + \frac{1}{\sqrt{x - 4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: Gool.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
 א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

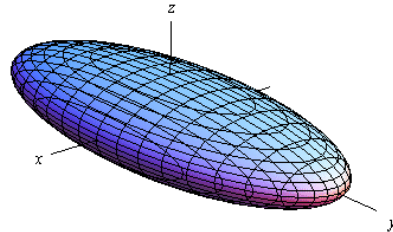
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
 ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
 עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
 עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
 עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
 עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

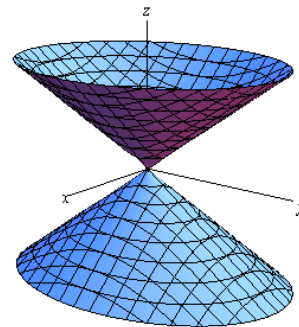
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

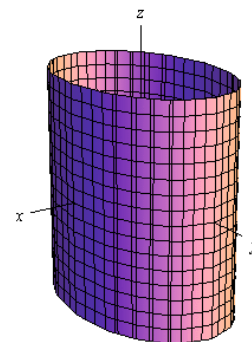
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

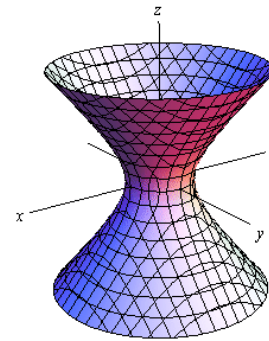


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

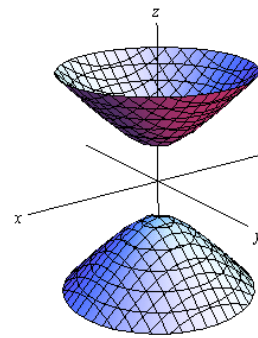


היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.



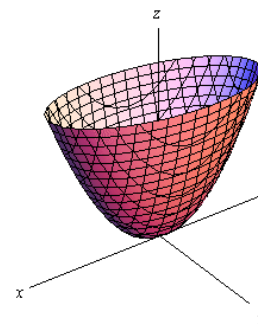
פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

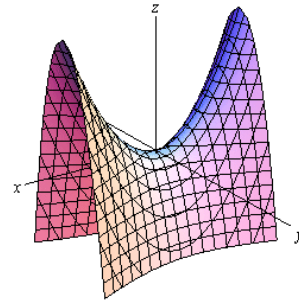
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



פרבולואיד היפרבולי



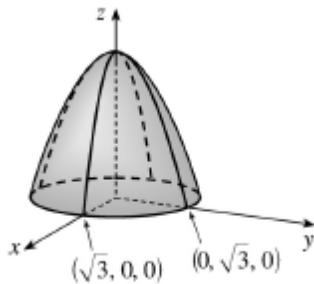
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

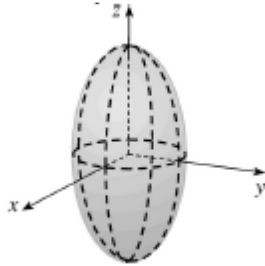
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

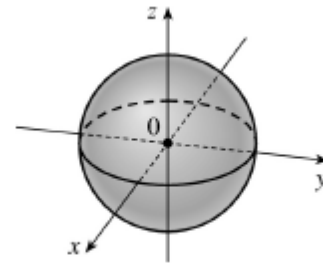
דוגמאות שונות



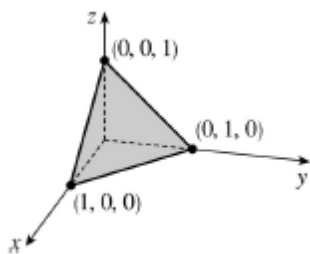
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



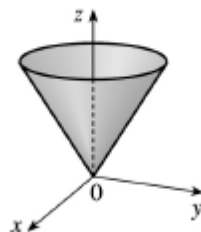
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



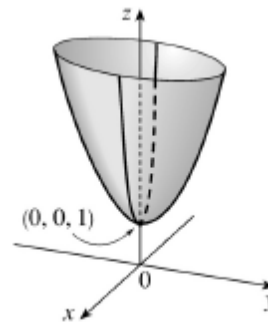
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 23 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

276	1. גבול של פונקציה של שני משתנים
279	2. רציפות של פונקציה של שני משתנים
282	3. נוסחאות – גבולות

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$.

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$.

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$.

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף. (5)

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר m קבוע.

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$ לכל y ,

וגם $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$ לכל x ,

אז $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$.

9 פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$, לכל (x, y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12 הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 24 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

283	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
285	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
289	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה
291	4. דיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \text{ נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{ הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \text{ נתון}$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

שאלת הוכחה. (11)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18) נתון $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשבו $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$.

הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשבו אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{yxxy}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1 (א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.)

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

3 $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

4 (א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.)

5 (א. $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. ב. לא רציפות.)

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6 (א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$)

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \text{ בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R, \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 25 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 294

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשבו: z_u , z_v .

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשבו: z_t , z_m , z_k .

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכיחו: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון: $z = f(xy)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
 הוכיחו: $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
 הוכיחו: $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון: $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
 הוכיחו: $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

$$(9) \text{ נתון: } z = y \cdot f(x^2 - y^2)$$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

$$(10) \text{ נתון: } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

$$(11) \text{ נתון: } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

$$(12) \text{ נתון: } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

$$(13) \text{ נתון: } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

הוכיחו:

$$א. u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$$

$$ב. u_{xy} = u_{yx}$$

$$ג. \text{ חשבו את } u_{xy}(1, \pi), \text{ אם ידוע ש-} g'(0) = 1, f'(0) = 2$$

$$(14) \text{ נתון: } u = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$א. \text{ הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$ב. \text{ הוכיחו: } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$ג. \text{ הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

15 נתון $z = h(u, v)$, ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. הוכיחו כי:

א. u, v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ וכן $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

ב. $h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$.

16 נתון: $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$.

17 פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$. הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$.

ב. $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$.

18 נתונה הפונקציה $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. נתון $x = 2t, y = t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x = 2t, y = t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 26 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 298

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
 מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9 מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

- א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .
- ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

- מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13 נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

- א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.

ג. האם קיים וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשבו את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4.$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

18 נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

19 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור \vec{v} , היוצר זווית α

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20 נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה \hat{u} ?

ב. מצאו וקטור יחידה \hat{u} , המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

1 במישור \mathbb{R}^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ או $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

2 יש המסמנים וקטור \vec{u} גם \underline{u} או \mathbf{u} .

3 וקטור יחידה יסומן \hat{u} .

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$.
- ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 27 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

303	1. פונקציות סתומות - הפן הטכני
306	2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי
313	3. שימושים גיאומטריים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$
 חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$
 חשבו את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$
 הוכיחו כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$
 מצאו $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
 א. $z_{xx}(2,1)$
 ב. $z_{xy}(2,1)$
 ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכיחו כי:

$$א. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$ב. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (11)$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- ב. חשבו את $f'(2)$.
- ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

(2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$.
- ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x = 4$.
- ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.
- ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

- א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.
- ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?
- ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x, y)$ מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

- 5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשבו את y' עבור נקודות אלה.
 - מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- 6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשבו את y'' עבור נקודות אלה.
- 7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשו זאת בשתי דרכים:
 - על ידי תיאור גרפי של העקום.
 - על ידי חישוב.
- 8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.
- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x .

9 נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10 נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$.

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11 נתונה המשוואה $y^3 + 6x \sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0, -2)$.

- הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.
- פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12 ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.
- נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y , $x = g(y)$.
- חשבו את $g'(1)$.

13 נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14 בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x, z)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1, 2)$.

15 נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 2, 0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$.

16 נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x, z)$,

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x, y)$,

בנקודה $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$, שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x, y)$?

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור $w = w(x, y)$.

18 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- (2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.
- (3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.
- (4) א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- (5) א. כל נקודה (x, y) שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות (0,0), (2,2).
 ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$. ג. כלום! ד. לא.
- (6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$, (0,0).
 ב. $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- (7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R, 0)$, $(-R, 0)$.
 ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- (8) א. $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = 3$. ב. כן, $(-0.5, -0.5)$, (0,0). ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- (9) א. כל נקודה (x, y) שעל $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה (1,1).
 ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$. ג. כלום! ד. לא קיימת.
- (10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה (1,1).
 ה. $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ ($x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1)$). ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$. ג. $g'(1) = -2$.
- (12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1) = -2$.
- (13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- (15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- (16) הנקודה היא $(0, 0, 0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_x(0, 0, 0.5\pi) = -1$, $y_z(0, 0, 0.5\pi) = 0$.

ב. לא מתקיימים.

$$(17) \quad \frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \text{א.}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} \quad \text{ד.}$$

$$\text{ג.} \quad w_x(2,2) = -3, \quad w_y(2,2) = 3$$

$$\text{ב.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(18) \quad \text{א.} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$$

שימושים גאומטריים

שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).
 מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x = -2$, $y = 1$?
- (2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
 וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$,
 המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.
- (4) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
 מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C, בהתאמה.
 נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
 הוכיחו $OA + OB + OC = a$.
 (למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
 הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$.
 בנקודה Q.
 מצאו את הנקודה Q.
- (6) הראו שהמשטח $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
 המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.
- (7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$,
 בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,

ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואת העקום. הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$.

9) נתונות שתי עקומות

$$C_1: x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, \quad y = -s, \quad z = s - 1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + t$$

10) נתונות שלוש עקומות

$$C_2: x = s^2, \quad y = -s, \quad z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, \quad y = u, \quad z = u^2 - 1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,

כאשר $(a, b, c) = \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, על ידי $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לוקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

עבור $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (9)$$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad \text{ב.} \quad (0, 0, 0) \quad \text{א. כל נקודה, למעט} \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14)$$

כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1, עם רדיוס 1,

$$. x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{שנוסחתו:}$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 28 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים 317
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי 319

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y)\ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

- (1) חשבו בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- (3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10\text{ cm}$, $b = 24\text{ cm}$. חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב-4 mm ואת הצלע b יקצרו ב-1 mm.
- (5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

- (1) $\cong -0.01$
- (2) $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 29 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 320

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13** נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

- 14** מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1** $(-0.5, 1)$ אוכלף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2** $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכלף.
- 3** $(0, 0)$ אוכלף; $(1, 1)$ מינימום.
- 4** $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכלף.
- 5** $(0, 2)$ מקסימום.
- 6** $(4, 4)$ מקסימום.
- 7** $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8** אין נקודות קריטיות.
- 9** $z = 4$, $z = 3$
- 10** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- 12** $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי \$288.
- 13** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכלף; $-2 < a < 2$ מינימום.
- 14** $a = -6$, $b = 4$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 30 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים..... 322

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
 * לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \quad (7)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \quad (8)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \quad (9)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \quad (10)$$

(11) $h(x) = ax^2 + bx + c$, הדגימו עבור $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$.

(12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$,

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$.

תשובות סופיות

(1) (t, t) לכל t ממשי, מקסימום.

(2) $(0, 0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1, 2)$ אוסף.

(4) אין קיצון. $(1, 2)$ אוסף.

(5) מינימום. $(0.5, 1.1)$.

(6) 0.375

(7) $y = 0.88x + 0.3$

(8) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(9) $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

(10) $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(11) $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 31 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ..... 324

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12 \text{ , כאשר } x, y > 0 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \text{ , כאשר } x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12 \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \text{ , מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0 \text{ , הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$, והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$. לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$. דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) , המביא למינימום את העלות. נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$. תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (14)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 32 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 327

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצאו על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצאו נקודה על המישור $-2x - 2y + z = 0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$, הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 33 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 329

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 34 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

- 330 1. אינטגרלים כפולים
- 333 2. החלפת סדר אינטגרציה

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x, y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2,2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{40}$ (2)

$\frac{a^3}{3}\pi$ (3)

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$
 (4)

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$
 (5)

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$
 (6)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$
 (7)

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$
 (8)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$
 (9)

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx +$$
 (10)

$$+ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$\frac{32}{21}$ (11)

$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$ (12)

$\frac{a^4}{2}$ (13)

$14a^4$ (14)

0 (15)

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז : שנו את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{-x^2} y dx dy \quad (9)$$

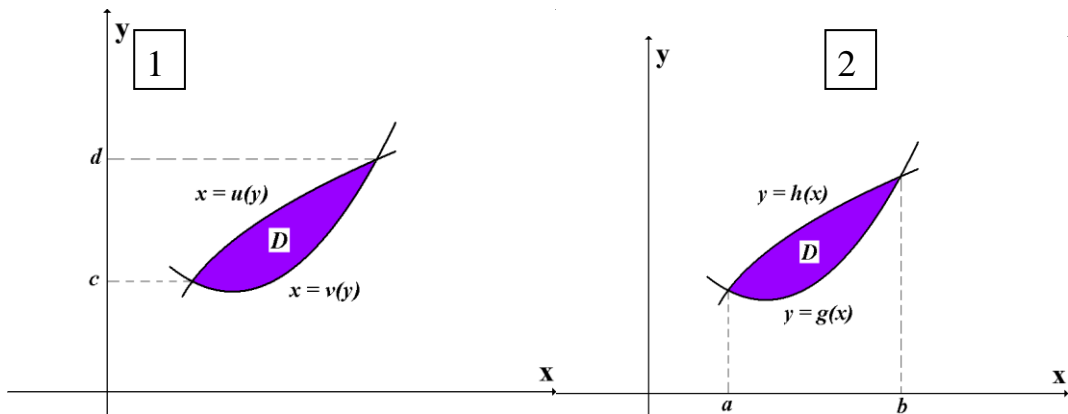
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dx dy$ ו- $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 35 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול..... 336

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשבו את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

11 ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$,

יש פונקציית צפיפות $\delta(x, y) = xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12 ללוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13 מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

$$\frac{64}{3} \quad (1)$$

$$a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) \quad (2)$$

$$32 \quad (3)$$

$$\frac{64}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (5)$$

$$\frac{88}{105} \quad (6)$$

$$\frac{17}{6} \quad (7)$$

$$16\frac{1}{5} \quad (8)$$

$$\frac{8}{3} \quad (9)$$

$$36 \quad (10)$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \text{ ב.} \quad \frac{1}{24} \text{ א.} \quad (11)$$

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{12} \quad (12)$$

$$\frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) \quad (13)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 36 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 339
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 341

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

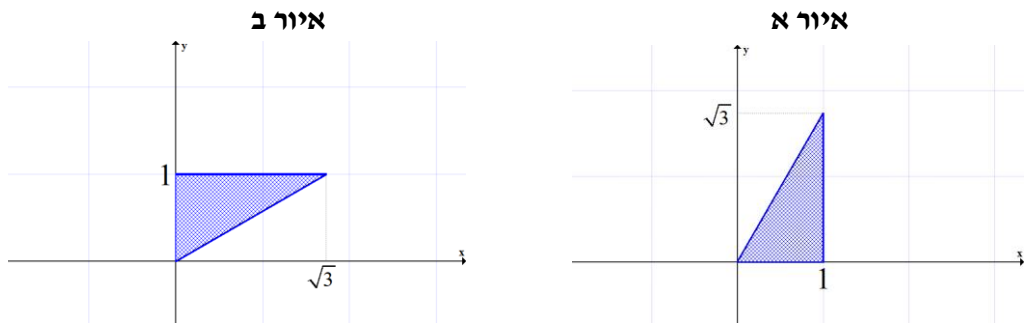
א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2}\}$

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.



תשובות סופיות

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{array} \right. \text{ג.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right. \text{ב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. \text{א. (1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{array} \right. \text{or} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{array} \right. \text{ג.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{array} \right. \text{ב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. \text{א. (2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right. \text{ד.}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב.} \quad 1 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \text{ א. (3)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב.} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ א. (6)}$$

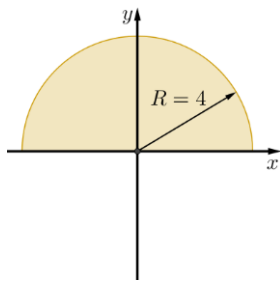
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

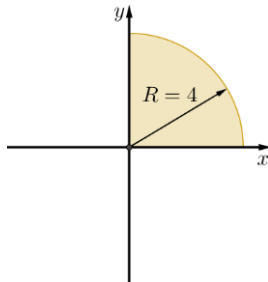
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

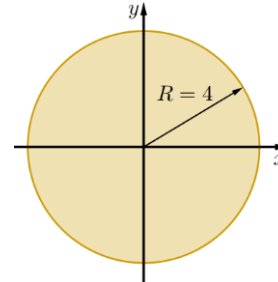
ג.



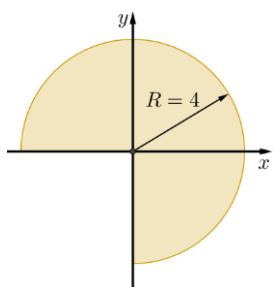
ב.



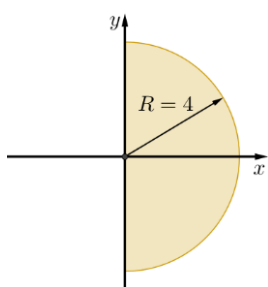
א.



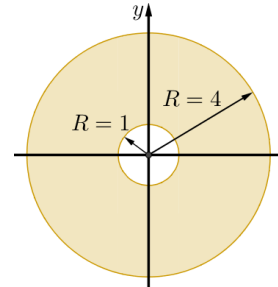
ו.



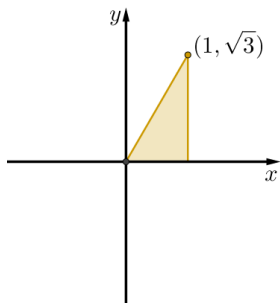
ה.



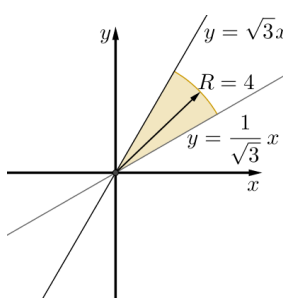
ד.



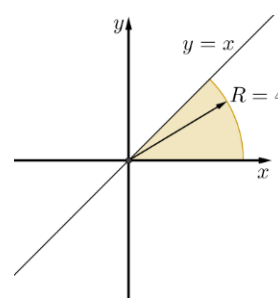
ט.



ח.



ז.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (3) א. πa^2 ב. 2π ג. 36 ד. $\frac{4}{3}$ ה. $\frac{4}{3}$
- (4) א. $\pi \ln \frac{e}{2}$ ב. $\pi(4-\pi)$ ג. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ ד. $\frac{\pi(e-1)}{4e}$ ה. $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (5) א. $\frac{\pi}{2} + 1$ ב. $-\frac{4}{5}$ ג. $\pi \ln \frac{4}{e}$ ד. π ה. π
- (6) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 37 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול..... 344

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 38 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 346

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-4 :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשבו את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים :

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$. סביב ציר ה- z . בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M .

תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ (2)

$\frac{27}{4}$ (3)

$\frac{65}{28}$ (4)

$2 \sin 4$ (5)

$3e - 6$ (6)

4 (7)

$\frac{\sin^2 4}{2}$ (8)

$\frac{5}{6}$ (9)

$\frac{88}{100}$ (10)

$\frac{17}{6}$ (11)

$16\frac{1}{5}$ (12)

$\frac{8}{3}$ (13)

36 (14)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi kh^2 r^2$ (15)

$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$ (16)

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 39 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות..... 349

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גלילות וכדוריות

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \text{ מלמעלה.}$$

חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ מלמעלה, ועל ידי החרוט } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ מלמטה.}$$

(7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

ומלמטה על ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גלילות.

(8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy , החסום על ידי הפרבולואיד

$$z = x^2 + y^2 \text{ והגליל } x^2 + y^2 = a^2.$$

(9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z = x^2 + y^2$ ובין $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 2$ ומלמטה על ידי $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. פתרו בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 1$ ומלמטה על ידי $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. פתרו בשתי דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12 חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ורדיוסו 1. א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות. ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13 הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ומחוץ לגליל $x^2 + y^2 = 1$. בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14 חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15 ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos \phi} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

4 (1)

$\frac{\pi}{3}$ (2)

$\frac{24\pi - 32}{9}$ (3)

$\frac{32\pi}{5}$ (4)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107/488), V = \frac{122}{3}\pi$ (5)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$ (6)

$\frac{64\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$ (7)

$\frac{\pi}{2}a^4$ (8)

$\frac{5}{6}\pi$ (9)

$\frac{8\pi}{3}$ (10)

$\frac{5}{3}\pi$ (11)

$\frac{5}{12}\pi$ (12)

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \quad \text{א. (13)}$$

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \quad \text{ג.} \quad V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 r dz dr d\theta$$

$\frac{7}{6}\pi$ (14)

$\frac{2\pi}{3}$ (15)

$\frac{\pi}{8}$ (16)

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 40 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים 353

החלפת משתנים באינטגרלים משולשיים (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$.xy=4, \quad xy=2, \quad z=y+1, \quad z=y, \quad x=3, \quad x=1$$

(2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשבו את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשבו את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים:

$$.y=4z^2, \quad y=z^2, \quad y=4x-12, \quad y=4x, \quad y=2z, \quad y=z$$

(5) חשבו את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$, כאשר G הוא כדור

שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 41 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	(ללא ספר)
2. הפרדת משתנים	354
3. משוואה הומוגנית	356
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$	358
5. משוואה מדויקת	359
6. גורם אינטגרציה	361
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	364
8. משוואת ברנולי	366
9. משוואת ריקטי	367
10. הצבות שונות ומשונות	368
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד	369
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון	372
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה	374

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4}\ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4}\left[-(2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y + 2}{x - 1}\right| + (-2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y + 2}{x - 1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y + 1}{x - 2} + \left(\frac{y + 1}{x - 2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

(1) הראו שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

(4) $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$

(5) $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$

(6) $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$

(7) $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

(8) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

(9) $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

$$(12) \quad (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה}$$

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

$$(13) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

$$(14) \quad (x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$. כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

$$(15) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

$$(16) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[-5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[-\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואות ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואות ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

הצבות שונות ומשוונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); \quad y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, \quad y(0) = 1 \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

$$(1) \text{ נתונה הבעיה } y(2) = -1, y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$$

א. הוכיחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

$$(2) \text{ נתונה הבעיה } y(0) = 0, y' = \sqrt[3]{y} + 4$$

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

$$(3) \text{ פתרו את הבעיה } y(4) = 0, y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$$

$$(4) \text{ נתונה הבעיה } y(0) = 4, y' = (y-1)(x^2 + y)^5$$

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

$$(5) \text{ נתונה המד"ר } ydx = (2x + y^3)dy$$

א. הראו שעבור $x = x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך (x_0, y_0) .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \rightarrow \infty$.

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad ? (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר. ג. שאלת הוכחה.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3) $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0, y_0) , שעבורה $y_0 \neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- (6) א. $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$. ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א. $[-0.08, 0.08]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- (9) א. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5, 0.5]$ ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

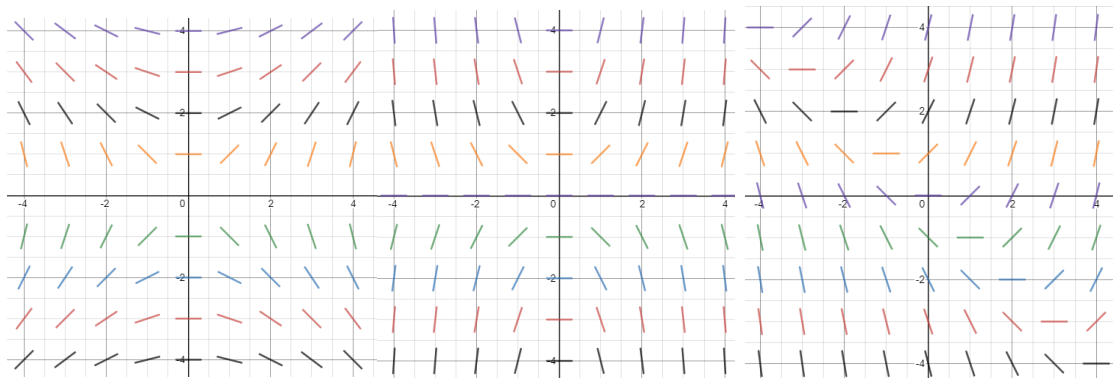
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

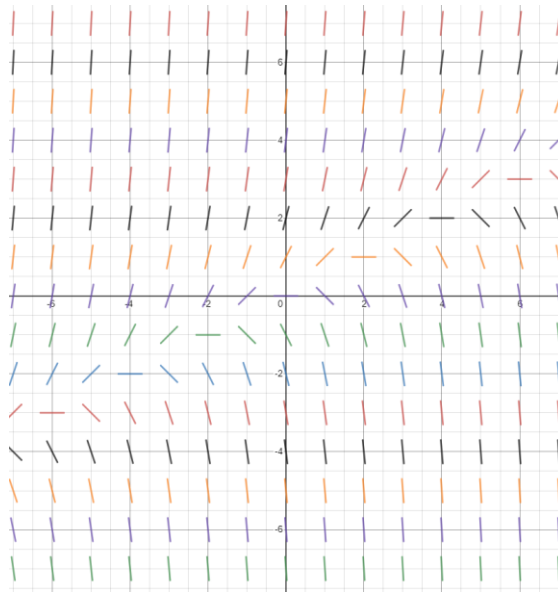
מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 42 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה. 376
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים. 378
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל". 380
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם". 382
5. וריאציית פרמטרים. 384
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר). 385
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל. 385
8. הוורונסקיאן ושימושו. 386
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני. 388
10. השיטה האופרטורית. 389

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי $y_1 = 4$ ו- $y_2 = \sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{\frac{-|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה ליניארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

(1) פתרו $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$, כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$.

(2) פתרו $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר ליניארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

- (1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$ הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?
- (2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ בקטע $(-4, \infty)$.
 חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
 דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ בקטע $(-\frac{1}{2}, \infty)$.
 האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$ בקטע $[-4, 4]$.
 א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
 ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
 ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
 ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
 האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
 הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x > 0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

- 6 נתון כי $y_1(x), y_2(x)$ הם פתרונות של המד"ר $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$, בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
 הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$, אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

- 1 לא.
 2 $W = -2x$
 3 כן.
 4 א. $W = 0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.
 5 א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$
 6 שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y'' - 4y = 12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי $y_1(x) = 0$ ו- $y_2(x) = x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהפונקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

(1) א. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$ ב. $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 43 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

391	1. בעיות גדילה ודעיכה.....
393	2. בעיות בגיאומטריה אנליטית.....
395	3. עקומות אורתוגונליות.....
396	4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום.....
397	5. בעיות שונות.....

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- *הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ש. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות גיאומטריות

שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

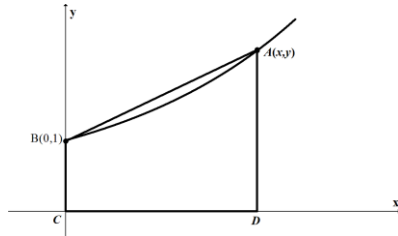
(2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y .
מצאו את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.

בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציר. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

מצאו את משוואת העקום.

(9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
 ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM , מהראשית O ל- M , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN (כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y). ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4 :

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$,
 בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45°
 עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

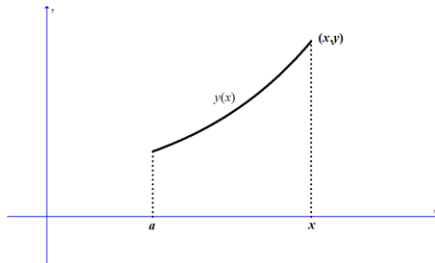
$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

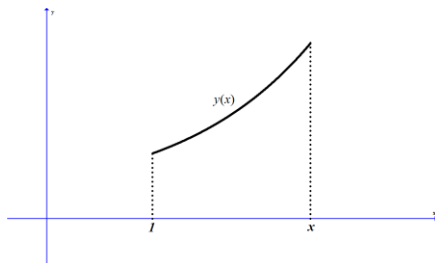
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

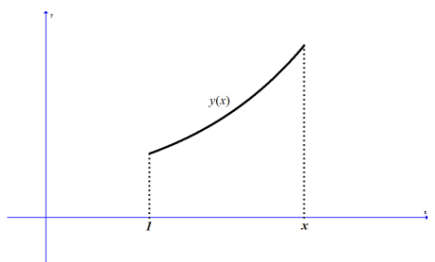
שאלות



- (1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$. מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



- (3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k} x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

בעיות שונות

שאלות

- (1) בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחרור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 ג. מצאו את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
- נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
- א. רשמו מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
 מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$.
 פתרו את המד"ר.
 תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
 א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R , מתחיל לצאת אוויר.
 קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
 הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$. ב. 1.13 שעות.
- (4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$. ב. $h = (2-t)^2$; $t = \sqrt{2} + 2$.
- (5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

אינפי 2 למדעי המחשב

פרק 44 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 399
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 401
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 402
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 404
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 406

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

שאלת הוכחה. (5)

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ עבור } b > a > 0.$$

$$(2) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx \text{ עבור } b, a > 1.$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2) \text{ לכל } a \text{ ו- } b.$$

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

$$(4) \text{ בהינתן הנוסחה } \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } \alpha > 1,$$

$$\text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

תשובות סופיות

$$(1) \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

$$(2) \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך. בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל. בררו עם מתרגלות וואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

שאלות

$$(1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx \text{ , כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0 < a \leq \alpha$.

$$(2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx \text{ , כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

$$(3) \text{ הוכיחו שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$(4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

$$(5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

$$(6) \quad \text{נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) 2}$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n \in \mathbb{N}$

ב. $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha > 0$)

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א. $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ עבור $b > a \geq k > 0$.

(2) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ עבור $b > a \geq k > 0$.

(3) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

(4) הוכיחו כי עבור $b > a > 0$ ו- $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

(5) הוכיחו:

א. $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$

ב. $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{a}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$

ג. $(\alpha > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$

(6) הוכיחו:

א. $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשבו את $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln \frac{b}{a}$

(2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3) π

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

(8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$