# אינפי 2 למדעי המחשב

# תוכן העניינים


1. הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות ..... 1
2. חישוב נגזרת של פונקציה ..... 14
3. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי ..... 27
4. כלל לופיטל ..... 38
5. חקירת פונקציה ..... 45
6. חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות ..... 74
7. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 78
8. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) ..... 83
9. משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב ..... 103
10. משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז׳, קושי ודרבו ..... 109
11. טורי טיילור - מקלורן ..... 126
12. סדרות ..... 141
13. אינטגרלים מיידיים ..... 174
14. אינטגרלים בשיטת ״הנגזרת כבר בפנים״ ..... 179
15. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 181
16. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 185
17. אינטגרלים של פונקציות רציונליות ..... 188
18. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות ..... 193
19. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו ..... 204
20. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) ..... 228
21. שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת) ..... 250
22. המשפט היסודי של החדו״א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים ..... 255
23. אינטגרלים לא אמיתיים ..... 263

# תוכן העניינים


24. מבוא לטופולוגיה ..... 274
25. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים ..... 277
26. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב ..... 298
27. טורים עם איברים קבועים ..... 330
28. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות ..... 344
29. טורי טיילור-מקלורן ..... 353
30. קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב ..... 368
31. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה ..... 395
32. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים ..... 403
33. נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות ..... 410
34. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 421
35. נגזרת מכוונת וגרדיאנט ..... 425
36. פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים ..... 430
37. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם ..... 444
38. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 447
39. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים ..... 449
40. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז׳) ..... 451
41. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים ..... 454
42. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 456
43. אינטגרלים כפולים ..... 457
44. שימושי האינטגרל הכפול ..... 463
45. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות) ..... 466
46. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן) ..... 471
47. אינטגרלים משולשים ושימושיהם ..... 473
48. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות ..... 476
49. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן) ..... 480
50. העתקות ליניאריות ..... 481
51. חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות ..... 491

52. האלגוריתם של אוקלידס ..... (ללא ספר)
53. מטריצות והעתקות לינאריות ..... 493

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 1 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה ..... 1
2. נגזרות חד צדדיות ..... 9

# הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

**שימו לב**

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

## שאלות*

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

**1)** $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

**4)** $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

**7)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

**8)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

**9)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

**11)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ($n$ טבעי).

א. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ($n$ טבעי).

א. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

**13)** חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

**14)** נתון כי $f$ גזירה בנקודה $x_0$. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

**15)** נתון כי $f$ גזירה וזוגית. הוכיחו כי $f'$ אי זוגית.

**16)** נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל $x,y$ ב-$[a,b]$:

$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.

הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

---

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $h$ גזירה ב- $x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב- $x_0$, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב- $x_0$.

ב. אם $h$ אינה גזירה ב- $x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב- $x_0$, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב- $x_0$.

ג. אם $h$ אינה גזירה ב- $x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב- $x_0$, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב- $x_0$.

ד. אם $h$ גזירה ב- $x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב- $x_0$, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב- $x_0$.

**21)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ גזירה, אז $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז $f$ גזירה.

**22)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ גזירה ב- $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם $f$ גזירה ב- $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

**23)** נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכיחו ש- $f$ גזירה ב- $x=4$, וחשבו את $f'(4)$.

**24)** תהי $f$ פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכיחו כי $f(0)=0$.

ב. הוכיחו כי $f$ גזירה ב- $x=0$ ו- $f'(0)=0$.

**25)** תהי $f$ פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו- $f'(0)=k$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

**26)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0$.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- $x_0$.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- $x_0$ וייתכן שלא.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה $x_0$.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראו שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז $h$ גזירה ב- $x_0$.

**28)** תהי $f$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f$ גזירה ב- $0$, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

**29)** נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי $f$ גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

ב. הראו כי $f$ גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

**30)** נתון כי $f$ פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$.
הוכיחו ש- $f$ פונקציה לינארית.

**31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם $f$ גזירה ב- $x_0$, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראו שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+\ldots+f(1+\frac{k}{n})\right)-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1)$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

**33)** פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

**34)** פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

**35)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $x_0$.

א. הוכיחו כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה $f$, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

**36)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0$.

א. הוכיחו כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה $f$, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

**37)** נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x)=(x-a)f(x)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

**38)** נניח ש- $f$ גזירה ב- $c$ ו- $f(c)=0$.
הוכיחו:

א. אם $f'(c)=0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- $c$.

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- $c$ אז $f'(c)=0$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**39)** יהיו $f,g$ פונקציות גזירות ב- $c$ ונניח כי $f(c)=g(c)$ .

א. הוכיחו כי $|f(x)-g(x)|$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

ב. הוכיחו כי $z_1(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

ג. הוכיחו כי $z_2(x)=Max\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

**40)** נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- $c$ ו- $f$ רציפה ב- $c$ .

הוכיחו כי $f$ גזירה ב- $c$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$ 2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ 3) $f'(x)=4\cos 4x$

4) $f'(x)=e^x$ 5) $f(x)=\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

7) $44!$ 8) 2 9) 4

10) א. רציפה לכל $x$. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

11) א. $n>1$ ב. $n>2$

12) א. $n>1$ ב. $n>1$

13) א. $\frac{1}{4}$ ב. $e$

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה. $f'=0$

17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

19) א. $f'(x)=\begin{cases}5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0 & x=n\pi\\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

32) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חד-צדדיות

## שאלות

**1)** תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

**2)** $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

**3)** $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

**4)** $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

**6)** $f(x)=2+4|x-1|$

**7)** $f(x)=3x^2+x|x|+1$

**8)** $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

**9)** $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

**10)** בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע $a$ הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- $a$ שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**13)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים $p$ ו- $q$ הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

**15)** חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל $x$ ממשי.

**תזכורת (הערך השלם)**

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי $x$ את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$ (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1]=-5$ , $[4.1]=4$.

**17)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x](1-\cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** הוכיחו שאם $f$ היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \le x^2$ לכל $x$,
אז $f$ גזירה ב-$x=0$.

**21)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=|x|\,f(x)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f(0)=0$.

**22)** יהיו $f$ ו-$g$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$,
אז הפונקציה $z$, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-$x_0$ ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $g\circ f$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם $g$ גזירה מימין ב-$x_0$ והפונקציה $f$ מוגדרת בסביבה מלאה של
$g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f\circ g$ גזירה מימין ב-$x_0$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**23)** תהיינה $f$ ו-$g$ פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-$g$ היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.
הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

**24)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & x\ge 1 \\ \dfrac{\pi}{4}-\arctan x & x<1 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות וגזירות $f$.

ב. בדקו האם $f$ הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\ge 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e\quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \frac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

13) $a=e\quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0,\ p=4$

15) $-10$

16) שאלת הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** $$f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

**19)** $$f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ odd}\end{cases}$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

**24)** א. רציפה לכל $x$ וגזירה לכל $x\neq 1$.  ב. $$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) & 0<x<\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 2 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים


1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה ..... 14
3. תרגילים נוספים לפי סוגים ..... 18
4. גזירה סתומה ..... 21
5. כלל השרשרת ..... 23
6. גזירה לוגריתמית ..... 26

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $f(x)=\sin(x^3)$

**21)** $f(x)=\cos(x^4)$

**22)** $f(x)=\sin^3 x$

**23)** $f(x)=\tan(x^2)$

**24)** $f(x)=\ln(\cos x^2)$

**25)** $f(x)=\arcsin(2x+3)$

**26)** $f(x)=\arctan(x^2)$

**27)** $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

**28)** $f(x)=(\sin x)^x$

**29)** $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

**30)** $y=x^{\ln x}$

**31)** $y=\sqrt[x]{x}$

**32)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**33)** $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**34)** $y=(x^2+1)^x$

**35)** $y=(x+1)^{(x+1)}$

**הערה:** בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

**5)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

**6)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

**7)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

**8)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

**9)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$


כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את $y'$ בנקודה $(1,2)$.

**5)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את $y'$ בנקודה בה $y=0$.

**6)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

**7)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

**8)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y^n$ בנקודה בה $y=1$.

**9)** נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך $y$ אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את $y''$ בנקודה בה $x=1$.

**10)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) $-1$

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל השרשרת

## שאלות

**1)** נתונה פונקציה $f(x)$ , המקיימת $f'(4)=10$ .

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$ .

חשבו את $g'(2)$ .

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$ .

חשב ואת $z'(x)$ .

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$ .

חשבו את $z'(e)$ .

**3)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$ .

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$ .

חשבו $g'(100)$ .

**4)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$ , $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

**6)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\dfrac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$ , $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

**7)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=(f(x))^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $40$

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) $36$

5) $\frac{8}{9}$

6) $44$

7) $-2$

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

## תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 3 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

### תוכן העניינים


1. המשיק ..... 27
2. בעיות משיקים ..... 29
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 31
4. הנורמל ..... 35
5. זווית שבין שתי עקומות ..... 36
6. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם ..... 37

# המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$ , בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ , בנקודה $x=-2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע $a$.

**3)** הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

**4)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ , בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ , בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**6)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ , לגרף הפונקציה

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?

לכל ערך $k$ כזה מצאו את נקודת ההשקה.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**10)** פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

**11)** מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$, בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 17 ב. 4

**2)** $a=2$

**3)** $(1,3)$

**4)** $a=2,\ b=-1$

**5)** $a=2,\ b=-2$

**6)** לערך $k=6$, בנקודה $x=1$ ; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

**7)** א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \beta=116.56°$

**8)** $x=5,\ x=-1$

**9)** $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

**10)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**11)** $\alpha=33.69°,\ \beta=90°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים

## שאלות

**1)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**2)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**3)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את $a$ ו- $c$.

**4)** הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**5)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

**6)** $y=x^2-2x+1$, $(2,-3)$

**7)** $y=\sqrt{x}$, $(-3,1)$

**8)** מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

**9)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את $k$ ואת נקודת ההשקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל $x$.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

## תשובות סופיות

**1)** נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

**2)** נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

**3)** נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

**4)** נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

**5)** משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

**6)** $(0,1)$ , $y=-2x+1$ ; $(4,9)$ , $y=6x-15$

**7)** המשיק $(9,3)$ , $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

**8)** $y=-2x-1$ , $y=2x-1$

**9)** $k=1.5$ , נקודת ההשקה $(1,1)$.

**10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ , בנקודה $x=-1$ .

**2)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ , ששיפועו $2$ .

**3)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ , בנקודה $x=0$ .

**4)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ , בנקודה $x_1=1$ .

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ , בנקודה $y=2$ , הוא $-4$ .
מצאו את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**6)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**7)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ , ששיפועו $-2$ .

**8)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ ,
בנקודה $x_1=2$ .

**9)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ , בנקודה $(1,6)$ , הוא $-6$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ , ואת משוואת המשיק.

**10)** נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$ .
מצאו את משוואת המשיק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ , בנקודה $x=0$ .

**12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$ ,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$ .

**13)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$ , בנקודה $x=1$
.

**15)** הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**16)** מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ , בנקודה $(3,4)$.

**17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^2+y-x=xy$ , דרך הנקודה $(1,1)$.

**18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^2}+y=y^2-1$ ,
דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y=24x+22$

2) $y=2x-3$

3) $y=1$

4) $y=-12x+9$

5) $a=2,\quad y=-4x-2$

6) $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

7) $y=-2x+8$

8) $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

9) $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

10) $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

11) $y=3x+1$

12) $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

13) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

14) $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

15) $y=\frac{1}{e}x$

16) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

17) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

18) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

19) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

20) $y=\frac{4}{3}x+2$

21) א. $(1,0)$, $(0,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמל

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$ , בנקודה $(3,2)$.

**2)** מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

**3)** משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$ , בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=-2x+8$

**2)** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

**3)** $(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית שבין שתי עקומות

## שאלות

1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f(x)=x^2$ ו- $y=g(x)=\frac{1}{x}$.

2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$.

3) הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

## תשובות סופיות

1) $71.57°$
2) $71.56°$
3) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

## שאלות

**1)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

**2)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\ln 2, \sqrt[3]{9}$

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5}$

**2)** $\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 4 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים


1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 38
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 41
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 42
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 43
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 44

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

23) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

24) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

35) $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\frac{5}{6}$ | 2) $\frac{20}{17}$ | 3) $n-1$ | 4) $4$ | 5) $\frac{1}{6}$ |
| 6) $\frac{3}{2}$ | 7) $\frac{5}{6}$ | 8) $-\frac{3}{2}$ | 9) $1$ | 10) $\ln\frac{a}{b}$ |
| 11) $\frac{1}{2}$ | 12) $\frac{1}{6}$ | 13) $-\frac{1}{2}$ | 14) $2$ | 15) $1$ |
| 16) $1$ | 17) $\frac{a}{b}$ | 18) $\frac{a}{b}$ | 19) $\frac{1}{6}$ | 20) $\frac{1}{2}$ |
| 21) $\frac{1}{2}$ | 22) $\frac{1}{8}$ | 23) $\frac{1}{3}$ | 24) $-\frac{1}{3}$ | 25) $-\frac{1}{2}$ |
| 26) $-\frac{3}{4}$ | 27) $1$ | 28) $1$ | 29) $\frac{2}{3}$ | 30) $\frac{1}{2}$ |
| 31) $\frac{1}{2}$ | 32) $\infty$ | 33) $0$ | 34) $\infty$ | 35) $0$ |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $\infty\cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) $0$ 3) $0$ 4) $0$ 5) $0$

6) $0$ 7) $0$ 8) $6$ 9) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

1) $0$

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$, $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$

## תשובות סופיות

1) $e$ 2) $1$ 3) $1$ 4) $1$ 5) $e^2$

6) $1$ 7) $e^3$ 8) $e^{1/3}$ 9) $e^{-1/2}$ 10) $1$

11) $1$ 12) $e$ 13) $1$ 14) $e$ 15) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 5 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים


1. מושגי יסוד ..... 45
2. חקירת פולינום ..... 46
3. חקירת פונקציה רציונלית ..... 47
4. חקירת פונקציה מעריכית ..... 51
5. חקירת פונקציה לוגריתמית ..... 54
6. חקירת פונקציה עם שורשים ..... 58
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט ..... 59
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית ..... 62
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות ..... 66
10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות ..... 68
11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה ..... 73

# הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x(x-9)^2$

**2)** $f(x)=x^4-2x^3$

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-9.

נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.

תחום עלייה: $x<3$ or $x>9$, ירידה: $3<x<9$.

תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.

נקודת פיתול: $(6,54)$.

**2)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-2.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.

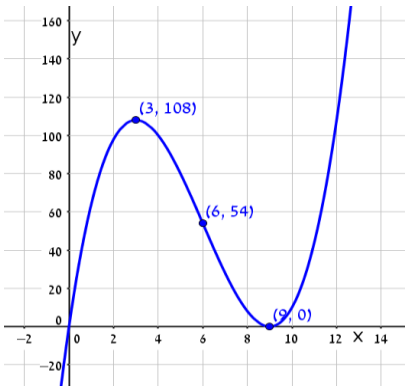
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.

תחום קמירות: $x>1$ or $x<0$, קעירות: $0<x<1$.

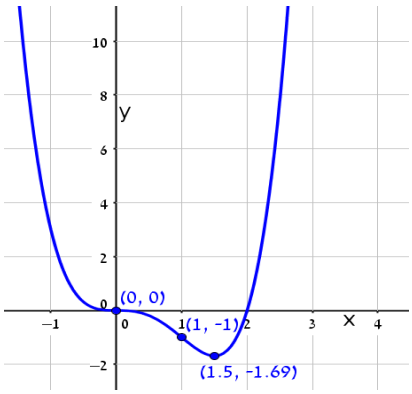
נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$.

## גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה רציונלית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערות**

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2} \ \ or \ \ x<-1$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2,\ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12} \ \ or \ \ x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1 \ \ or \ \ x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: $-1$.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- $x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

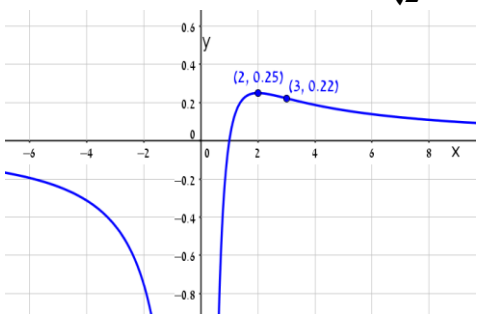
**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- $x$: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

**8)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

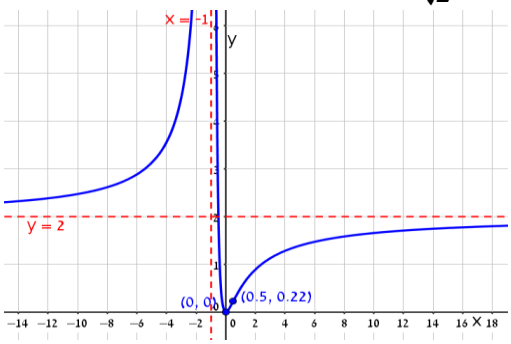

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

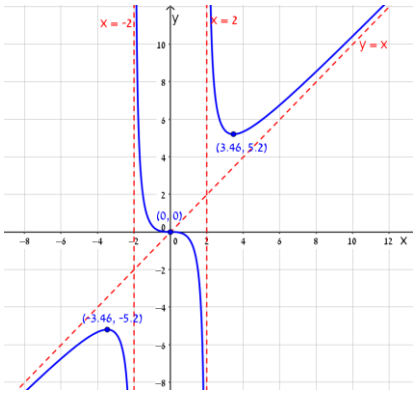
(1



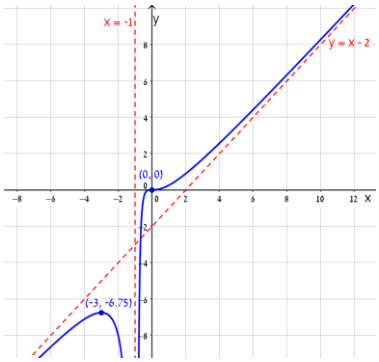

(2



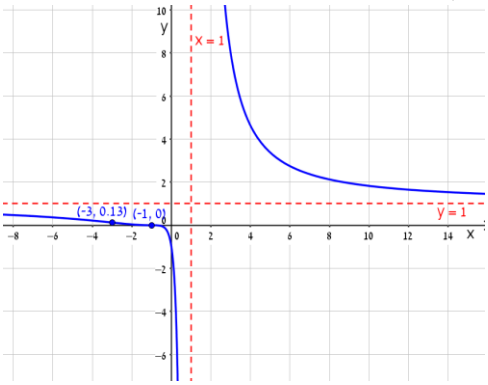

(3



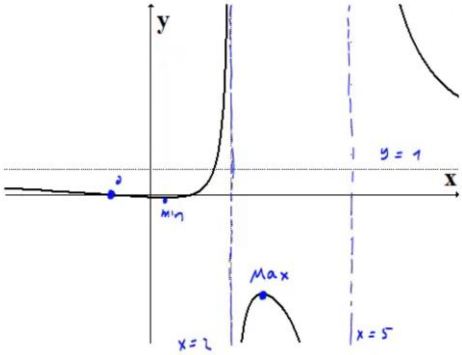

(4



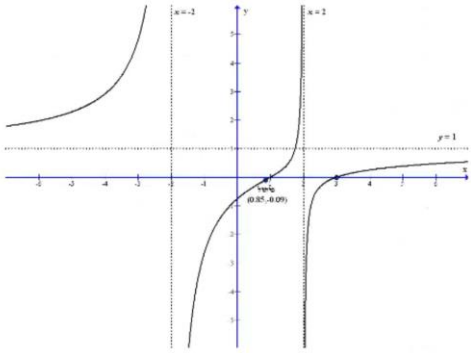

(5



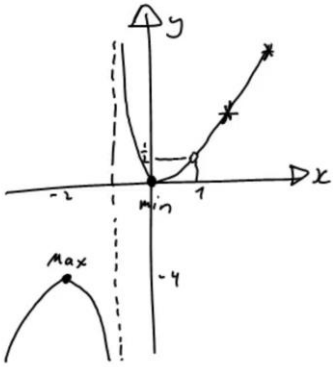

(6




(7



(8





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה מעריכית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-e^{x}$

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל $x$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

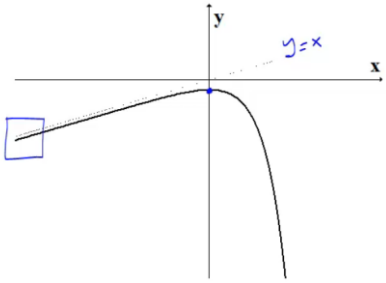
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $-2$.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ $or$ $x>2$, ירידה: $-1<x<0$ $or$ $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ $or$ $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ $or$ $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

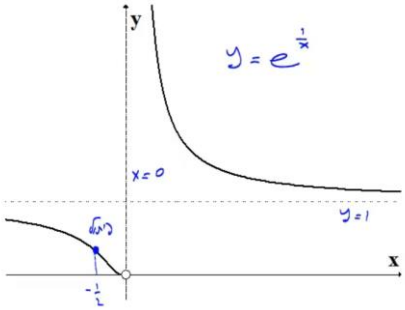

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

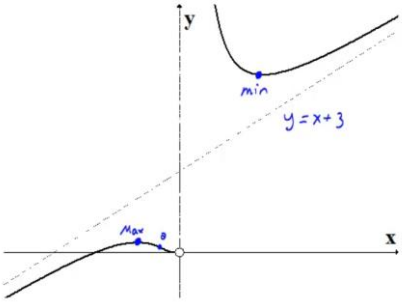
1)



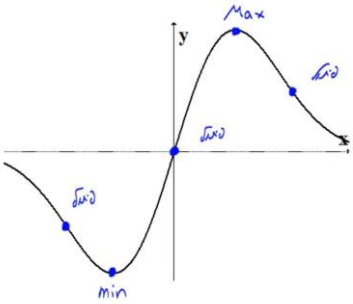

2)




3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לוגריתמית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**הערה**

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.

נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.

נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.

אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.

תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.

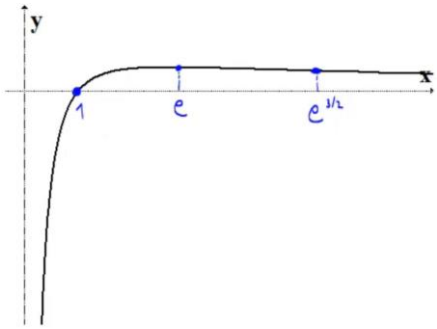
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.

תחום קמירות: $0<x<1\ \ or\ \ 1<x<5.15$, קעירות: $x>5.15$.

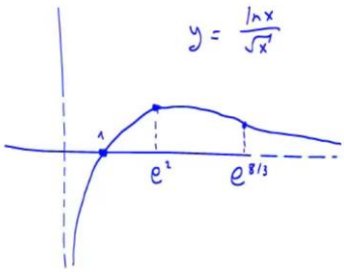

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

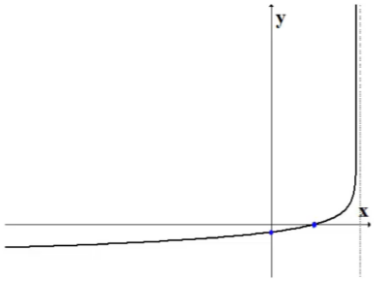
1)



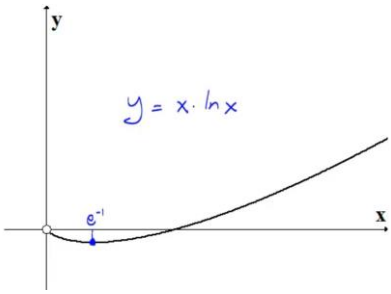

2)



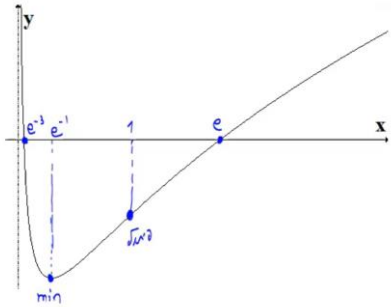

3)



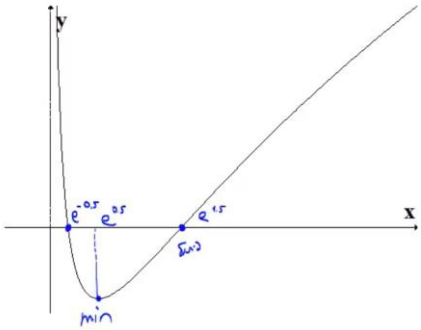

4)



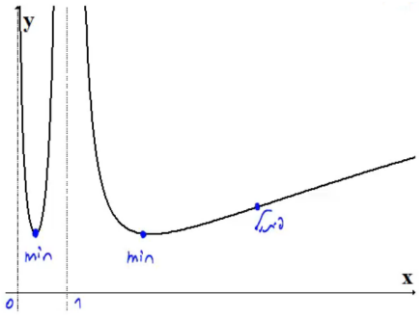

5)




6)




7)



# חקירת פונקציה עם שורשים

## שאלה

**1)** חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

## תשובה

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: אין.

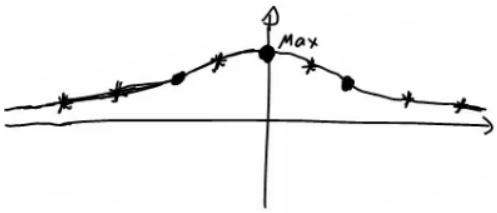
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>\frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $x>0 \ \ or \ \ -0.2<x<0$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0 \ \ or \ \ x>1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ 0<x<1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל $x$.

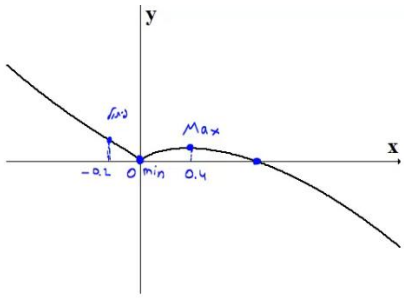
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $x>1 \ \ or \ \ 0<x<1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<0$.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $(1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1 \ \ or \ \ x<-1$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1.5$, עם ציר ה- $x$: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\infty$, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3 \ \ or \ \ x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x>3 \ or \ \ x<2$.

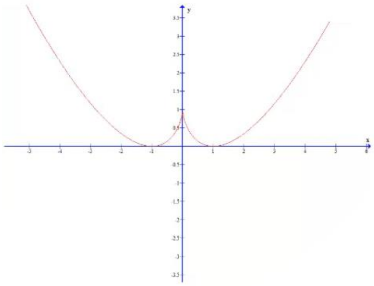

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

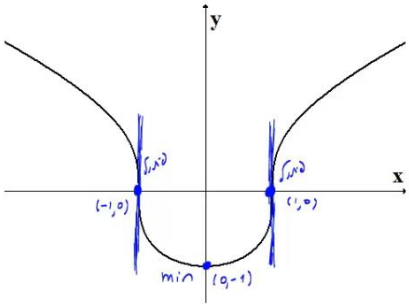
1)



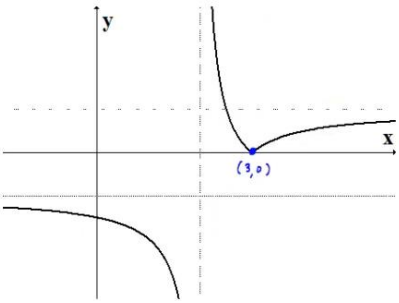

2)



3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה טריגונומטרית

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**8)** $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

**9)** $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

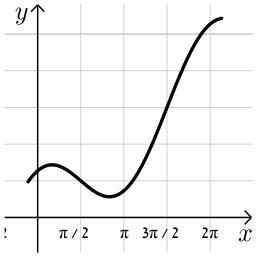

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ .




ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

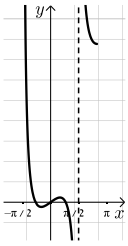
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**2)** א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right),\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$ .

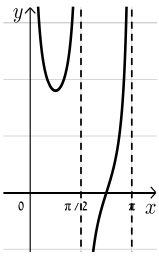



ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$ ,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

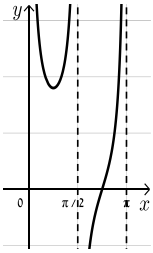
**3)** א. $0<x<\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.




ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ , $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$ .

**4)** א. $(\pi,0),(0,-2)$.




ב. $\max(\pi,0),\max\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right),\min(0,-2),\max(2\pi,-2),\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

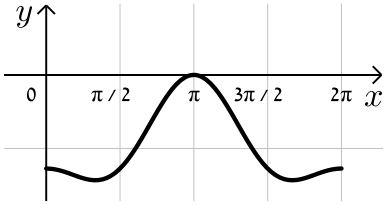
ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$ , $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ , יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$ , $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

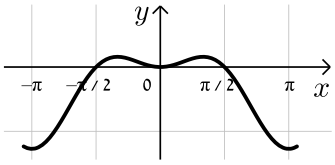
ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

ד. 2 פתרונות.



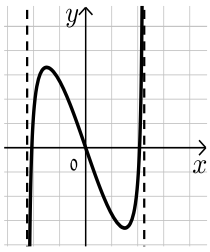

**6)** א. חיתוך: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.




**7)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$ .

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$ .




**8)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 7, עם ציר ה- $x$ : $x=7$ , $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ .

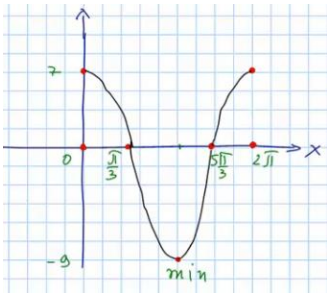
נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7)$ , $(0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ .

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ ,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$ .

תחום עלייה: $x>3$ , ירידה: $2<x<3$ or $x<2$ .




**9)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 2, עם ציר ה- $x$ : $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{\pi}{4}$ .

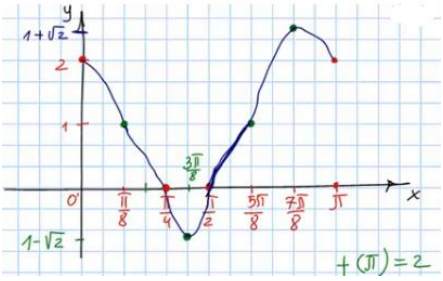
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$ , מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$ , ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$ .

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$ ,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$ .





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x) = x - 2\arctan x$

2) $f(x) = \arcsin(\sin x)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

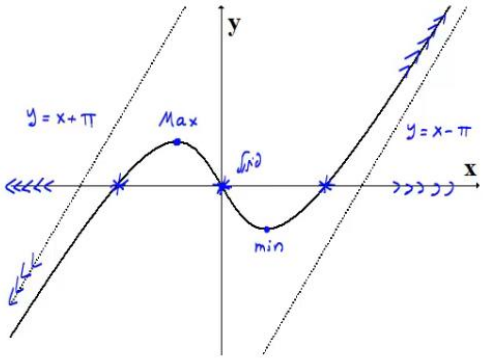
## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x>1$ or $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

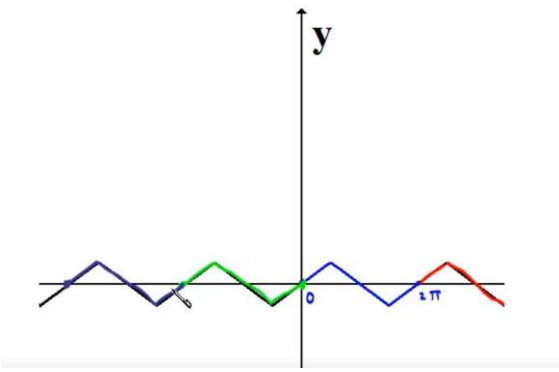
**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור $2\pi$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

### גרפים

**1)**




**2)**





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה – שאלות כלליות

## שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע $a$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים $a,b$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע $a$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים $a,b$.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את $a$.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ .
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את $a,b$.

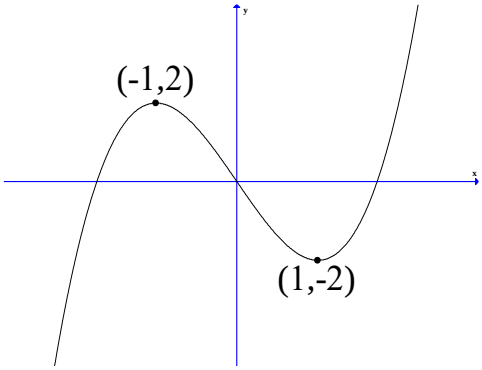
7) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$ .
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x}$ .
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$ ואת $b$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$.
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$.

שאלות **10-17** מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




**10)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

**11)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

**12)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

**13)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

**14)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

**15)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

**16)** האם קיים ערך של $k$, עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

**17)** מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

**18)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי $f$ עולה. הוכיחו כי $z$ יורדת.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$ .

א. האם $z$ עולה או יורדת בנקודה $x=e$ ?

ב. נתון בנוסף כי $f$ שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של $z$ ?

**20)** נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f(x^2)+4}$ .

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. $z$ עולה לכל $x$ .

ב. $z$ יורדת לכל $x$ .

ג. $z$ עולה לכל $x>0$ .

ד. $z$ יורדת לכל $x>0$ .

**21)** נתונה פונקציה $f(x)$ , המקיימת $f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$ .

א. חשבו את $g'(e)$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה $g$ עולה בנקודה $x=e$ .

חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$ .

**22)** הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- $x$ היא ב- $x=0$ .

נגדיר $g(x)=(f(x))^2$ . איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ב. אם $f$ יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ג. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ אין נקודת קיצון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**23)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל $x$ ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$ , כאשר $a<0$ .

איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה** :

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית , $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).

ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.

ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר $x$ בנקודה $(n,0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm 2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

1) $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$ , $(-\infty < x < \infty)$

2) $x < 2\sin x$ , $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$

3) $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$ , $(x > 0)$

4) $\ln(x+1) \le x$ , $(x \ge 0)$

5) נתון כי $f$ רציפה לכל $x \ge 0$ , $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ , וכן $f(0) = 0$ .
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

### תוכן העניינים


1. נגזרת הפונקציה ההפוכה ..... 74
2. נגזרת מסדר גבוה ..... 75
3. נוסחת לייבניץ ..... 76
4. גזירה פרמטרית ..... 77

# נגזרת הפונקציה ההפוכה

## שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

1) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרת מסדר גבוה

## שאלות

חשבו את הנגזרת ה- $n$, $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

1) $y=\frac{1}{x+a}$

2) $y=\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

3) $y=\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$

4) $y=\frac{x^4}{x^2-1}$

## תשובות סופיות

1) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot(x+a)^{-n-1}$

2) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-5(x-1)^{-n-1}+7(x-2)^{-n-1}\right)$

3) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1}-\frac{1}{6}(x+1)^{-n-1}+\frac{2}{3}(x-2)^{-n-1}\right)$

4) $y'=2x-\frac{1}{2}\left((x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}\right)\ ,\ y''=2+\left((x-1)^{-3}-(x+1)^{-3}\right)$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^n\cdot n!\cdot\left((x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right),(n>2)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחת לייבניץ

## שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית , $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות :

**1)** $y = x^3 e^x$

**2)** $y = x^3 \sin 5x$

## תשובות סופיות

**1)** $\left(e^x \cdot x^3\right)^{(10)} = e^x\left[x^3 + 103x^2 + 456x + 120\cdot 6\right]$

**2)** $\left(\sin 5x \cdot x^3\right)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6\cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54\cdot 5^9 x \sin 5x - 24\cdot 5^9 \cos 5x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה פרמטרית

## שאלה

**1)** חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

הנתונה בצורה פרמטרית $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t\cos t \end{cases}$.

## תשובה

**1)** $y' = \dfrac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$ , $y'' = \dfrac{(-t\cos t - 2\sin t)(1-\cos t) - \sin t(\cos t - t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 7 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

### תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה..... 78
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי..... 81
3. הוכחת אי שוויונים..... 82

# מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

## שאלות

בשאלות **7-1** מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

**1)** $f(x)=x^3-3x^2+3x \quad (-1\le x\le 3)$

**2)** $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

**3)** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(20-x) \quad (-1\le x\le 20)$

**4)** $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x<1\\ (x-2)(x-3) & x\ge 1\end{cases} \quad \left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$

**5)** $f(x)=1+\left|9-x^2\right| \quad (-5\le x\le 1)$

**6)** $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \quad (-5<x<-1)$

**7)** $f(x)=x^3-9x+1 \quad (-\infty<x<\infty)$

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$.

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0,0.5)$.
הוכיחו שדני טועה.

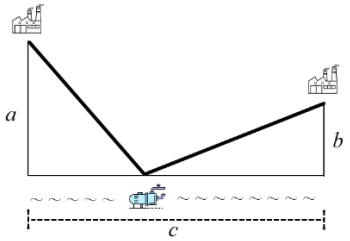
**9)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)=x^2+\left|\ln x\right|$.

**10)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, ב- $\mathbb{R}$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ ,
ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1,3]$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

**12)** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.
האחד מרוחק $a$ ק"מ מהמעיין.
השני מרוחק $b$ ק"מ מהמעיין.
המרחק האופקי בין המפעלים הוא $c$ ק"מ.
החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין
בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.
מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?
הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזויות בין כל צינור למעיין שוות.




**13)** גליל חסום בכדור.
הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי $\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $(-1,-7)$ מינימום מוחלט, $(3,9)$ מקסימום מוחלט.

**2)** $(-1,0)$ מינימום מוחלט, $(5,0)$ מינימום מוחלט, $(2,3)$ מקסימום מוחלט.

**3)** $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(20,0)$ מינימום מוחלט, $(8,48)$ מקסימום מוחלט.

**4)** $(2.5,-0.25)$ מינימום מוחלט, $(1,2)$ מקסימום מוחלט.

**5)** $(-3,1)$ מינימום מוחלט, $(-5,17)$ מקסימום מוחלט.

**6)** $(-2,-4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

**7)** אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

**8)** א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.

**9)** אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1+\ln 2)$.

**10)** מקסימום מוחלט $1$, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.

**11)** ב- $\mathbb{R}$ : $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.

ב- $[1,3]$ : $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, $(2,1)$ מקסימום מוחלט.

**12)** האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

## שאלות

1) תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-$(a,b)$.
נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש-$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in(a,b)$, כך ש-$f'(d)=0$.

2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x)-f'(x)=f''(x)$ לכל $x$, וכן $f(a)=f(b)=0$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x$ בקטע.

3) הפונקציה $f$ גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ עבור פונקציה $g$ מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה $f$ מקבלת את הערך $0$ בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

4) תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, כך ש-$f''(x)<0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a)=f(b)=0$.
א. הוכיחו כי $f(x)>0$ בקטע $(a,b)$.
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוכחת אי שוויונים

## שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

**1)** $x^3e^{-x} \le \frac{27}{e^3}$ (לכל $x$)

**2)** $xe^{-\sqrt{x}} \le 1 \quad (x \ge 0)$,

**3)** $0 \le x^2e^{x-1} \le 1 \quad (x \le 1)$,

**4)** יהיו $a$ ו- $b$ מספרים חיוביים.
הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1)\ a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad (2)\ b(1-a) > \frac{1}{4}$$

**הערת סימון:** $[a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b \quad ; \quad (a,b) \Leftrightarrow a < x < b \quad ; \quad [a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 8 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים


1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... 83
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 84
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 85
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... 89
5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב ..... 93
6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה ..... 95
7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון ..... 96
8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני ..... 101

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$ מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "$y$ (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

## שאלות

**1)** נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

**2)** מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

**3)** נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

**4)** $x$ ו- $y$ הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.
א. הביעו את $y$ באמצעות $x$.
ב. מה צריכים להיות המספרים $x$ ו- $y$,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

## תשובות סופיות

**1)** $8,8,8$

**2)** $1$

**3)** א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

**4)** א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המישור

## שאלות

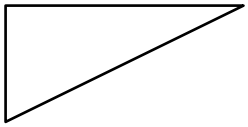
**1)** מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

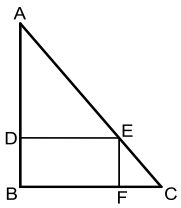
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם $a$, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

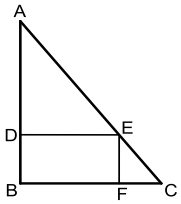
**3)** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



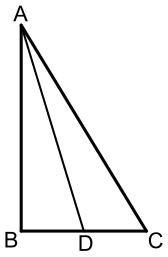
**4)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס"מ , $BC=$ 16 ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.




**5)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=a$ , $BC=b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



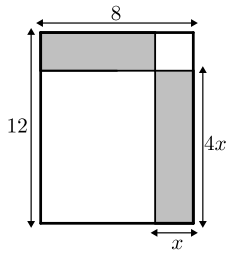

**6)** במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



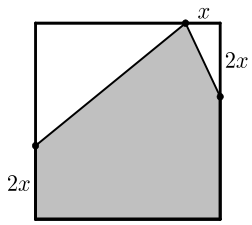


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

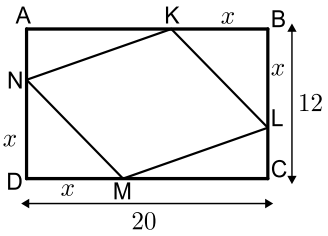
**7)** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של $x$ ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את $x$, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.




**8)** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו $x$ על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של $x$,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.




**9)** הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

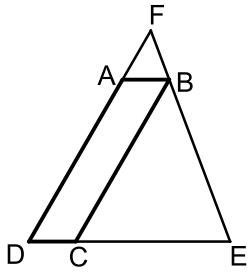



א. הביעו באמצעות $x$ את סכום שטחי המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות $x$, כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

**10)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB =$ 2 ס"מ, $AD =$ 8 ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב- $x$.



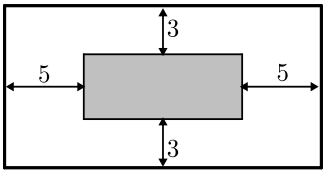

א. הביעו באמצעות $x$ את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את $x$, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

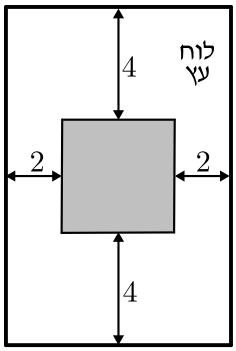



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

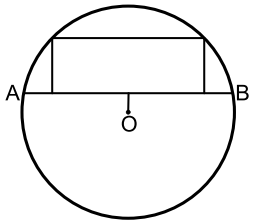
**12)** אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).




א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

**13)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

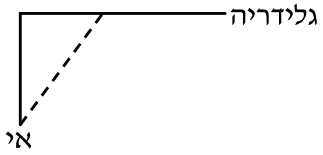



**14)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא $a$.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

**15)** שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?




**17)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

## תשובות סופיות

**1)** $4\sqrt{3}$ ס״מ.

**2)** א. 2.5 ס״מ.

**3)** א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

**4)** 80 סמ״ר $= S$.

**5)** $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

**6)** 4 ס״מ, 16 ס״מ.

**7)** $x=2.75$

**8)** $x=6$

**9)** א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $= S$.

**10)** א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

**11)** א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

**12)** א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

**13)** 92 ס״מ.

**14)** $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

**15)** 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

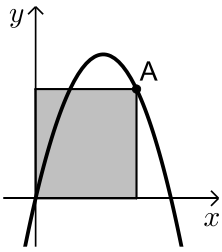
**16)** $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

**17)** $4\cdot 6$

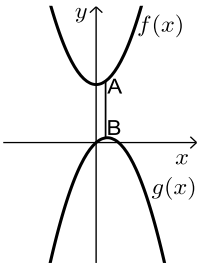

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

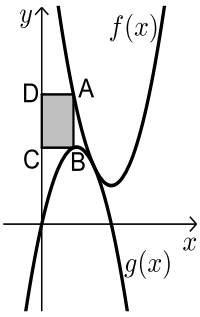
## שאלות




**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

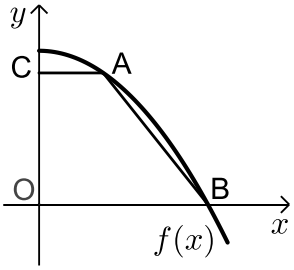



**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$ , כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ , בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.




**3)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$ .
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- $y$ , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור).
נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$ .

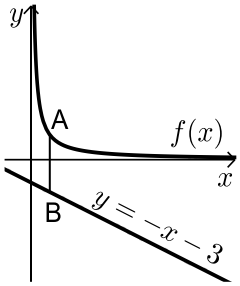
א. הביעו באמצעות $t$ את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של $t$ , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?




**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$ .
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- $x$ , שחותך את ציר ה- $y$ בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ , ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

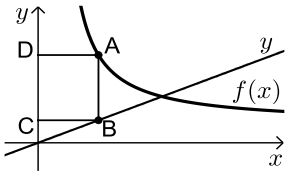



**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ , ונתון הישר: $y=-x-3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.




**6)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$ , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$ .

א. הביעו באמצעות $t$ את היקף המלבן ABCD.

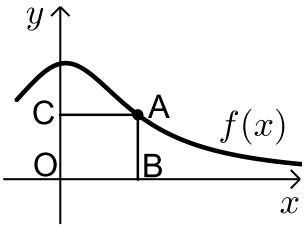
ב. מצאו את $t$ , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y=2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



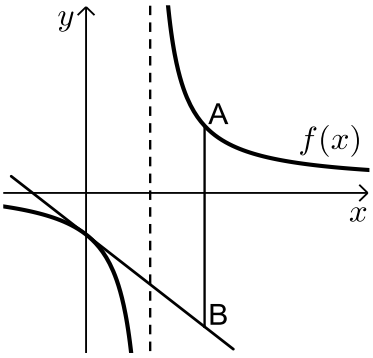

**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ , בתחום: $x\ge 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$.

א. מצאו את משוואת המשיק.

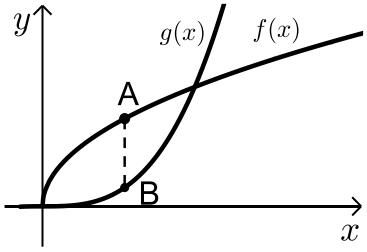
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

**10)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

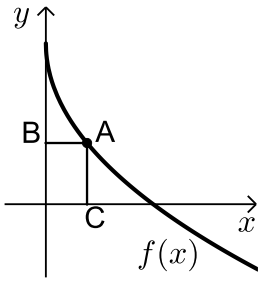
מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מַקְצֶה על הצירים הוא מינימלי.




**11)** נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?




**12)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$.

א. הביעו באמצעות $t$ את סכום הקטעים $AB+AC$.

ב. מצאו את ערכו של $t$, עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

**13)** נתונות הפונקציות $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצאו את ערכו של $b$, שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) $A(2,2)$

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ

7) $1\cdot 2$

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

11) $A(1,2)$

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$

13) $b=1$

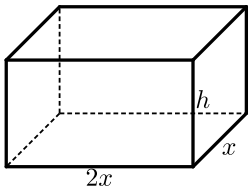

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המרחב

## שאלות

**1)** נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

**2)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה $h$ וצלע המלבן הקטנה $x$
מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

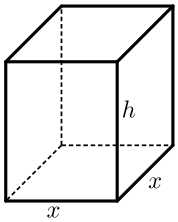



**3)** נתונה תיבה שגובהה הוא $h$ ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא $x$.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

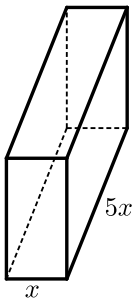
א. הביעו את $h$ באמצעות $x$.

ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות $x$.

ג. מה צריך להיות ערכו של $x$, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?



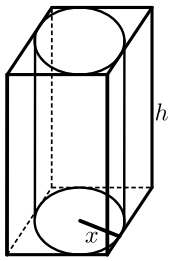

**4)** ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.




**5)** לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

**6)** מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא $k$,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.


כתב ופתר – גיא סלומון ©




**7)** באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$ וגובהו ב- $h$.
ידוע כי הסכום של $x$ ו- $h$ הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות $x$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות $x$

1. את נפח הגליל.
2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את $x$, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

**8)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $k$ ושטח המעטפת שלה הוא $S$.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

## תשובות סופיות

**1)** $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

**2)** בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

**3)** א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

**4)** 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.

**5)** $8\cdot6\cdot3$ ס"מ.

**6)** $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

**7)** א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון עם תשובה נתונה

## בעיות קיצון בהנדסת המרחב

**1)** נתונים שני מספרים חיוביים, $p$ ו- $q$, שסכומם $a$.

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר $n$ ו- $m$ טבעיים).

**2)** הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם $\pi k$ סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא $\pi Rl$ , כאשר $l$ הוא הקו היוצר של החרוט)

## בעיית קיצון עם תנועה

**3)** מהירותו של רכב היא $v$ קמ"ש ועליו לנסוע דרך של $S$ ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

## שאלות

**1)** כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת $x$ ליטר שוקו ליום,
היא יכולה לקבל מחיר של $p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.

א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

**2)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
ב. אם $x=20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

**3)** פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.

א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

**4)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$.

א. מצאו את תחום הפונקציה.
ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של $x$ יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

**5)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

**7)** פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר $x$ קפה ביום, היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

**8)** פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x=100$.
איזו מסקנה ניתן להסיק?

**9)** פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x=100$.

ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

**10)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$,
ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות $Q$ שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

**11)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$, ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=-0.15Q+50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

**13)** ליצרן פונקציית ביקוש $Q=\frac{5000-50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות $Q$ שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

**14)** ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q=10$,
העלות הכוללת היא 225 ₪.

**15)** הוכיחו:
א. שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
הסבירו את המשמעות הגרפית.
ב. שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

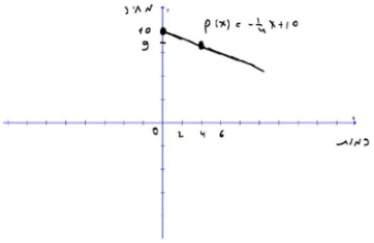
**16)** $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.
א. האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
ב. האם יתכן להפך?
ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם
ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

**17)** מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- $p_1$ וב- $p_2$, בהתאמה.
אם משתמשים ב- $x$ יחידות מג"י 1 וב- $y$ יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל $A$ ₪.
א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי
כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y}=\frac{p_2^2}{p_1^2}$.
ב. חשבו את $x$ ו- $y$ עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
$p_1=$ 3,000 ₪, $p_2=$ 100 ₪, $A=$ 372,000 ₪.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

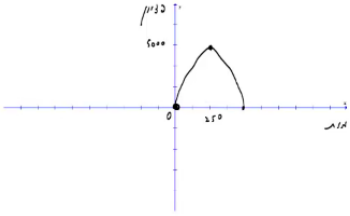
## תשובות סופיות

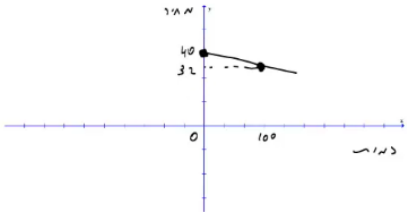
**1)** א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p)=40-4p$ ד.



**2)** א. $R(x)=-0.6x^2+120x$ , בתחום: $x\ge 0$ . ב. 2,160 ג. 2,160

**3)** א. $x\ge 0$ ב. ג.





**4)** א. $x\ge 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x)=-0.04x^2+100x$ ,

הפדיון הממוצע: $AR(x)=-0.4x+100$ $x>0$ . ג. $R'(x)=-0.08x+100$

ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500 .

**5)** א. פונקציית הפדיון: $R(x)=-6x^3+240x^2+1800x$ ,

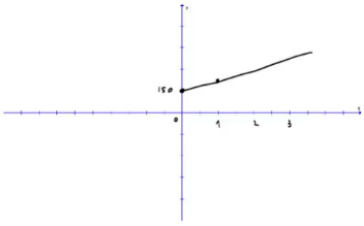
הפדיון השולי: $R'(x)=-18x^2+480x+1800$ . ב. לא.

ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000 .

**6)** א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right)=10\cdot 33\frac{1}{3}-\frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$ ; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

**7)** א.



ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x)=5$

**8)** א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ₪ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ₪ בערך.

**9)** א. $C(100)=1240,\ C(101)=1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

**10)** הכמות: 800 , המקסימום: 38,200 .

**11)** הכמות: 5 , המקסימום: $-250$ .

**12)** 25

**13)** הכמות: 800 , המקסימום: 38,200 .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

**17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, \quad y = 3600$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

## שאלות

**1)** יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

**2)** מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**)?

**3)** אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?

**4)** חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים,
שכל אחד מהם משלם 100 דולר.
על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

**5)** מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

**7)** הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

**8)** חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

**9)** חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל $x$ זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- $x$ ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

## תשובות סופיות

**1)** א. 200 ב. $93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.

**2)** 70 ₪ ל-350 דקות.

**3)** א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪

**4)** 40

**5)** 75 אג'.

**6)** מחיר הכרטיס: 30 ₪, ההכנסה המקסימלית: 3,600 ₪.

**7)** 4,500 ₪.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** 350


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 9 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים


1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה ..... 103
2. פתרון משוואות פולינומיאליות ..... 106
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות ..... 108

# מציאת מספר הפתרונות של משוואה

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x-0.25\sin x=7$

**4)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

**5)** נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

**6)** $e^{x-1}=x$

**7)** $\arctan x-x=0$

**8)** $\ln(x+5)-4=x$

**9)** $x^2+x\sin x=1-\cos x$

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת: $f(0)=1,\ f(1)=2$, $f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

**11)** $e^x-5x=0$

**12)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

**13)** $1+4x^4=8x^3$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

**14)** $ax^2+bx+c=0$

**15)** $ax^3+bx^2+cx+d=0$

**16)** $x+a\cos(bx)=1$

**17)** $(n>4,\ odd)\ ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$

**18)** מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר $a$ קבוע ממשי.

**19)** הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר $a$ קבוע ממשי.

**20)** הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.

הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

**21)** נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.

מה מספר השורשים של הפולינום?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}<-1\,,\ \frac{1}{ab}>1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) אם $a=0$, למשוואה אין פתרון. אם $a\neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרון משוואות פולינומיאליות

## שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

**2)** $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

**3)** $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

פתרו את המשוואות הבאות:

**4)** $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

**5)** $k^3+2k^2-3k+20=0$

**6)** $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

**7)** $k^3-6k^2+12k-8=0$

**8)** $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

**9)** $k^3-k^2+k-1=0$

**10)** $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

**11)** $7x^3-33x^2+21x+61=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x^2+1$

2) $0$

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

**1)** $1+4x^4=8x^3$

**2)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

## תשובות סופיות

**1)** פתרון מדויק $x=-1$.

**2)** פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 10 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים


1. משפט רול ..... 109
2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע [a,b] ..... 113
3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע [o,x] ..... 115
4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים ..... 116
5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות ..... 117
6. משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי ..... 121
7. משפט דרבו ..... 123

# משפט רול

## שאלות

**1)** בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי $c$ המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

**2)** נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה $c$, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, $x_0,x_1,x_2$, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים $c$ ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

**4)** תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל $n$ טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

**6)** נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי $f$ פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה פונקציה $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ .
תהי $g$ מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$ .
הראו כי $g$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ , והוכיחו כי הנגזרת, $g'$ ,
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$ .

**8)** הוכיחו:
אם $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$ , אז הפונקציה $g(x)$ , המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$ .

**9)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$ .
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$ , כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}=2\frac{f'(c)}{f(c)}$ .

**10)** אם $c_0+\frac{c_1}{2}+...+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$ ,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$ .

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$ .
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$ .

**12)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$ .
הראו שבין כל שני שורשים של $f$ קיים לפחות שורש אחד של $g$ .

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(1)>0,\ f'(0)>0$ .
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים $n$ טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

**15)** תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

**16)** נתון כי $f,g$ גזירות לכל $x$ וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.
$A$ קבוע כלשהו.

**17)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$ וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.
תהי $x_0$ נקודה כלשהי.
הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה $x_0$ יש נקודה משותפת אחת ויחידה - $x_0$.
במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או מתחתיו.

**18)** נתון כי $f$ גזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.
נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.
תנו דוגמה לפונקציה $f$ המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

**19)** נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.
נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** הפונקציות $f$ ו- $g$ רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- $(a,b)$.
ידוע כי $f(a) \geq g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- $(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- $(a,b]$.

## תשובות סופיות

**1)** א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.  ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

**2)** לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

**14)** א. 0  ב. שאלת הוכחה.

**15)** 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (0<a<b)$

2) $\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (0<a<b)$

3) $(a-b)e^{-a} < e^{-b}-e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (a<b)$

4) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$

5) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (0<a<b)$

6) $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (0<a<b<1)$

7) $\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (0<a<b)$

8) $\frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (0<a<b<1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $(0<a<b)$

10) $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

2) $\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ $(x>0)$

3) $x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$

4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$ $(x>0)$

5) $x<\operatorname{arctanh}(x)<\frac{x}{1-x^2}$ $(0<x<1)$

6) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

7) $1+x<e^x<1+xe^x$ $(x>0)$

8) $\sin x\le x$ $(x>0)$

9) $\tan x<4x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

## שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5$

3) $\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – שאלות כלליות

## שאלות

**1)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$ .
הוכיחו כי $f(2)=8$ .

**2)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$ .
הוכיחו כי $4\le f(2)\le 10$ .

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$ ,
וכן שקיימת נקודה $c$, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$ .
הוכיחו שקיימת נקודה $m$ בקטע $(a,b)$, כך ש- $f''(m)<0$ .

**4)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, כך ש- $f'$ חסומה בקטע $(a,b)$.
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$ מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- $f$ רציפה במידה שווה ב- $(a,b)$.
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$,
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**5)** נניח כי $f$ רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$ , ו- $f'$ מונוטונית עולה.
א. הוכיחו כי $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- $(a,\infty)$.
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

**7)** נניח כי $f$ גזירה ב- $(0,\infty)$.

א. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.

ב. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

**8)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$.
הוכח:

א. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).

ג. ייתכן שהגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.

ד. אם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.

ה. אם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.

הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**9)** נניח כי $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**10)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$.

הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש-$c_2\neq c_3$ ו-$f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו-$(1,f(1))$,

חותך את הגרף של $f$ בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש-$f''(x_0)=0$.

**14)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש-$f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו-$\lim_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f'_+(a)$ קיים וש-$f'_+(a)=L$.

**15)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.

נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**16)** נתון כי $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$.

א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ קבועה ב-$[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ לינארית ב-$[a,b]$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f,g$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.

ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

**18)** נתון כי $f$ גזירה בקטע $(a,b)$ ו-$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

א. הוכח כי $f'$ לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח $f'$ שואפת ל-$\infty$ או $-\infty$?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**8)** ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

## שאלות

1) הוכיחו שלכל $1 \le a < b$ מתקיים $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

2) הוכיחו כי עבור כל $a, b$ המקיימים $0 < a < b < 1$,
מתקיים $\frac{a}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{b}{1+b^2}$.

3) הוכיחו כי עבור כל $a, b$ המקיימים $1 < a < b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}$.

4) הוכיחו כי $|\tan y - \tan x| \le 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5) הוכיחו כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0,1)$.

6) הוכיחו שלכל $x \ne 0$ מתקיים $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

7) תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$.
הוכיחו שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.

8) תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$, ויהי $n$ מספר טבעי כלשהו.
הוכיחו שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

9) יהיו $a$ ו-$b$ מספרים חיוביים כלשהם.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$, כאשר $a \geq 0$.

הוכיחו שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$.

**11)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכיחו שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$

קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט דרבו

## שאלות

1) האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases}$ ?

2) האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ ?

3) האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$ ?

4) האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$ ?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$ .

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$ , אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$ ?

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$ .

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$ , אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ 4x & x<1\end{cases}$ ?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$ ?

**8)** האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ?

**9)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכיחו שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\dfrac{1}{4}$.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ מונוטונית בקטע $(a,b)$.

**11)** ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?

הוכיחו או הפריכו זאת.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 2$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=x^2+x$.

**13)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 1$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, המקיימת $0 \le f'(x) \le 1$, לכל $x$ בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כך ש- $f'(x)=\sin x$ .

**15)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $f(0)=f(1)=0$ .
הוכיחו שקיים $x$ ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רציונלי השונה מ-0.

## תשובות סופיות

**1)** לא.
**2)** לא.
**3)** לא.
**4)** לא.
**5)** א. שאלת הוכחה. ב. לא.
**6)** א. שאלת הוכחה. ב. לא.
**7)** א. שאלת הוכחה. ב. לא.
**8)** לא.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** שאלת הוכחה.
**11)** שאלת הוכחה.
**12)** שאלת הוכחה.
**13)** שאלת הוכחה.
**14)** שאלת הוכחה.
**15)** שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 11 - טורי טיילור - מקלורן

### תוכן העניינים


1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 126
2. טור טיילור סביב X=X0 ..... 128
3. חישוב סכום של טור ..... 129
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן ..... 130
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ ..... 131
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים ..... 133
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' ..... 134
8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 140

# טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

**1)** $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

**4)** $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

**7)** $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

**10)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

**13)** $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

**16)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

**19)** $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

**22)** $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

**25)** $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טור טיילור סביב $x = x_0$

## שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

## תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

1) $e$ 2) $e^{-2}$ 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

**4)** נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר $k$ קבוע שונה מאפס.
מצאו את $n$ ואת $k$.

**5)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

**6)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

**7)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\dfrac{1}{120}$

**2)** $\dfrac{1}{3}$

**3)** $\dfrac{1}{3}$

**4)** $k=1, n=3$

**5)** $1$

**6)** $216$

**7)** $-\dfrac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

**1)** $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

**4)** $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

**7)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

**8)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

**9)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

**10)** עבור אילו ערכי $x$, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

**11)** עבור אילו ערכי $x$, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

## שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

## תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

**1)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

**2)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

**3)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:

$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

**4)** רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

**5)** חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של $10^{-3}$.

**6)** חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

**7)** נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

**8)** נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

**9)** נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

**13)** תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים $M$, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

**15)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

**16)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** נניח ש- $f$ גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- $f''$ חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**18)** הוכיחו כי $e$ הוא מספר אי-רציונלי.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

**2)** א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

**4)** נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

**5)** $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

**6)** א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

**7)** א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

**8)** א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

**9)** א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

**10)** א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

## <u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** $n$ **ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-n}$.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן | תחום התכנסות |
|---|---|
| $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ | $-1<x\le 1$ |
| $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$ | $-1\le x\le 1$ |
| $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$ | $-1<x<1$ |
| $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ <br> $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$ | $-1\le x\le 1\ (m>0)$ <br> $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ <br> $-1<x<1\ (m\le -1)$ <br> $m\ne 0,1,2,3,\dots$ |


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 12 - סדרות

### תוכן העניינים


1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות ..... 141
3. חישוב גבול לפי אוילר ..... 143
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ ..... 144
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש ..... 147
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית ..... 148
7. חישוב גבול לפי ההגדרה ..... 150
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה ..... 152
9. הגדרת הגבול לפי היינה ..... 155
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס ..... 157
11. משפט שטולץ ..... 162
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות ..... 164
13. שאלות הוכח או הפרך ..... 166

# חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{4}{n}\right)$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

23) $\lim\limits_{n\to\infty}4^n\sin\frac{1}{n}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

**<u>הערה חשובה מאוד!</u>**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה $n$ – המשתנה $x$. יש להתייחס אל $x$ כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

1) $0$
2) $4$
3) $\infty$
4) $0$
5) $-5$
6) $1$
7) $1.5$
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) $0.25$
10) $4$
11) $2$
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(b\neq 0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$, $\left(a>0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\infty\right)$, $\left(a<0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=-\infty\right)$
15) $2.5$
16) $\frac{k}{2}$
17) $0.5$
18) $0.5$
19) $\frac{a-b}{2}$
20) $4$
21) $0.5$
22) $\frac{1}{3}$
23) $\infty$
24) $1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) $1$

3) $e^2$

4) $e^{-1}$

5) $e^3$

6) $e^{-12}$

7) $e^{30}$

8) $e$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הגבול:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

**6)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

**8)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

**9)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **9**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

**11)** הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $\alpha\in(0,1)\ ,\ a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$

**12)** יהי $x$ מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n>2$.

**13)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

**14)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+3}^{2n+4}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k\sqrt{n}}}$.

**16)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{2n^2+3n+5}{\sqrt[3]{5n^{12}+2k^5+k^3+1}}$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{n^2+n}\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

**18)** תהי $(a_n)$ סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4$
2) $0$
3) $0$
4) $0.75$
5) $3$
6) $\frac{3}{4}$
7) $0$
8) $16$
9) $0$
10) $1$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) $9$
14) $1$
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
17) $1$
18) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

## תשובות סופיות

1) $0$

2) $0$

3) $4$

4) $\frac{1}{4e}$

5) $\infty$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

## שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**1)** $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\ ,\ a_1=\sqrt{2}$

**2)** $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

**3)** $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

**4)** יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל $n$.

הוכיחו שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

**5)** יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה $x_n$ ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל $n$.

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע $a$, עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה $x_n$ מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

**6)** יהיו $0<b_1<a_1$

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ , $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל $n$.

הוכיחו שהסדרות $a_n$ ו- $b_n$ מתכנסות ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$ , $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ .

א.1. נגדיר סדרה חדשה $b_n$ על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה $a_n$ שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה $a_n$ (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

8) תהי $a_n$ סדרה המוגדרת על ידי $a_1=0.5$ ו- $a_{n+1}=\sin\left(a_n^2\right)$ לכל $n\ge 1$ .

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ .

## תשובות סופיות

1) הגבול הוא 2 .

2) הגבול הוא 1.

3) הגבול הוא 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$ .

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

8) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

בשאלות **1-7** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^2+2}=0$

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

**8)** נתון כי הסדרה $(a_n)$ מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

**9)** נתון כי $a_n\to a,\ b_n\to b$.
הוכיחו לפי ההגדרה, כי:
א. $(a_n+b_n)\to a+b$
ב. $(a_n\cdot b_n)\to a\cdot b$

בשאלות **10-14** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

**10)** $\lim\limits_{n\to\infty}2n+4=\infty$

**11)** $\lim\limits_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

**12)** $\lim\limits_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

**13)** $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

**14)** $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

**15)** הוכיחו שהסדרה $1,101,2,102,3,103,4,104,\ldots$ שואפת לאינסוף.

**16)** הוכיחו שהסדרה $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ שואפת לאינסוף.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו שהסדרה $-1,2,-3,4,-5,6,\ldots,(-1)^n n,\ldots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

**18)** הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שלילת הגדרת הגבול של סדרה

## שאלות

**1)** מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $1,4,1,4,1,4,1,4,\ldots$

ב. $1,4,10,1,4,10,1,4,10,1,4,10,\ldots$

ג. $1,0,-4,1,0,4,1,0,-4,1,0,4,\ldots$

**2)** מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $\frac{1}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{2}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{3}{7},\mathbf{\frac{1}{6}},\frac{4}{9},\mathbf{\frac{1}{8}},\ldots$

ב. $\frac{3}{3},\mathbf{\frac{3}{4}},\frac{7}{5},\mathbf{\frac{5}{6}},\frac{11}{7},\mathbf{\frac{7}{8}},\frac{15}{9},\mathbf{\frac{9}{10}},\ldots$

ג. $a_n=\frac{(-1)^n n+4}{n+1}$

בשאלות **3-6** הוכיחו לפי ההגדרה כי:

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+10}{4n+2}\neq\frac{1}{2}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+1}{2n^2+2}\neq 1$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{2n^2+n+2}\neq\frac{9}{4}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\neq 1$

**7)** בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n=(-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n=(-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n=(-1)^n\frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ldots$ מתבדרת.

**9)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3,2,1,3,2,1,3,2,1,\ldots$ מתבדרת.

**10)** הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots$ לא קיים גבול.

**11)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ מתבדרת.

**12)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{10}-\left[\frac{n}{10}\right]$ מתבדרת.

**13)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n+1} & n \text{ even}\\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd}\end{cases}$ מתבדרת.

**14)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2},\mathbf{1},\frac{2}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{3}{4},\mathbf{\frac{1}{3}},\frac{4}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{5}{6},\ldots$ מתבדרת.

**15)** הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

**16)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

1. $\sqrt{m^2}-\left[\sqrt{m^2}\right]=0$ לכל $m$ טבעי.
2. $\sqrt{m^2-1}>m-\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
3. $\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
4. $\sqrt{m^2-1}-\left[\sqrt{m^2-1}\right]\geq\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+10}$ לא שואפת ל-$\infty$.

**18)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,1,4,1,6,1,\ldots$ לא שואפת ל-$\infty$.

**19)** נתונה הסדרה $-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,\ldots$.
הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה
א. לא שואפת ל-$\infty$.
ב. לא שואפת ל-$-\infty$.

**20)** הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10}+(-1)^n\left[n\sqrt{10}\right]$ לא שואפת ל-$\infty$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הגדרת הגבול לפי היינה

## שאלות

**1)** הוכיחו כי:

| | |
|---|---|
| א. $\sin(2n\pi)=0$ | ב. $\cos(2n\pi)=1$ |
| ג. $\sin((2n+0.5)\pi)=1$ | ד. $\cos((2n+0.5)\pi)=0$ |
| ה. $\sin((2n+1)\pi)=0$ | ו. $\cos((2n+1)\pi)=-1$ |
| ז. $\sin((2n+1.5)\pi)=-1$ | ח. $\cos((2n+1.5)\pi)=0$ |
| ט. $\sin(n\pi)=0$ | י. $\cos(n\pi)=(-1)^n$ |
| יא. $\sin((n+0.5)\pi)=(-1)^n$ | יב. $\cos((n+0.5)\pi)=0$ |

הוכיחו כי הגבולות בשאלות **2-9** אינם קיימים לפי היינה:

**2)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{|x-4|}$

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+4}{\cos x+10}$

**4)** $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

**5)** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-[x]}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+4^{[10x]}}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]\cdot\sin x}{x}$

**8)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x-[\sin x]}$

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(4+[\arctan x]\right)$

**10)** נתון כי $f(x)=2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$.

א. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.

ב. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.

ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית $a_n$, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ קיים.

**11)** הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right]\right)$ אינו קיים לפי היינה.

רמז: הוכיחו ראשית כי לכל $n$ טבעי מתקיים $\left[n^2-1\right]=n-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**10)** ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

## שאלות

**1)** חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^{n}+2}{(-3)^{3n}+(-3)^{n}+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^{n}+2}{(-3)^{2n}+(-3)^{n}+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^{n}$

**2)** חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)$

**3)** נתון ש- $(a_n)$ סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

**4)** הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

**5)** חשבו את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+(-1)^{n}}{n}\right]^{n}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2$; $a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

**7)** נתונה הסדרה $a_n$, המוגדרת על ידי $a_1=2$; $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**8)** נתונה הסדרה $a_n$, המוגדרת על ידי $a_1=0\ (n\in\mathbb{N})$; $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

**9)** א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

**10)** נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**11)** נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**12)** נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**13)** נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**14)** נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצאו את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

**15)** נתונה סדרה $a_n$, ונגדיר סדרה חדשה $b_n$ על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** תהי $a_n$ סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיימים $m,n\in\mathbb{N}$, כך ש- $|a_m-a_n|>\frac{1}{2}$.

**17)** נתונה סדרה $a_n$.

$a_{n_k}$ ו- $a_{m_k}$ שתי תת-סדרות של $a_n$ המקיימות:

1. $a_{n_k}\to L$ , $a_{m_k}\to L$
2. כל איברי הסדרה $a_n$ מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n\to L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

**18)** נתונה סדרה חיובית $a_n$ המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

**19)** פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה $a_n$, $\inf a_n\le\underline{\lim}a_n\le\overline{\lim}a_n\le\sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

ב. מצאו סדרה $a_n$ שעבורה $\inf a_n<\underline{\lim}a_n<\overline{\lim}a_n<\sup a_n$.

**20)** הוכיחו שהסדרה $a_n$ מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim}a_n=\overline{\lim}a_n$.

**21)** הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות $a_n,b_n$ מתקיים

א. $\overline{\lim}(a_n+b_n)\le\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$

ב. $\underline{\lim}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim}a_n+\underline{\lim}b_n$

**22)** נתונות שתי סדרות חסומות $a_n$ ו- $b_n$.

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n+b_n)<\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**23)** יהיו $(a_n)$ ו- $(b_n)$ סדרות חסומות.

הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

**24)** תהי $(a_n)$ סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.

א. הוכיחו שאם $(a_n)$ מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, $(a_n)$ ו- $(b_n)$,

המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

ב. יהיו $(a_n)$ ו- $(b_n)$ שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

הוכיחו שאם לכל $n$ מתקיים $0\le a_n,b_n\le 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

**26)** תהי $a_n=\langle\sqrt{n}\rangle=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]$.

א. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)$ חסומה.

ב. מצאו את $\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל $n$ מתקיים $\langle\sqrt{n^2-1}\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ו. מצאו את $\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$

יש מקסימום.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)$ חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- $0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי $\ell$ מספר טבעי.

הוכיחו שכמעט לכל $n$, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי $\ell$ מספר טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של $(a_n)$.

ז. האם $(a_n)$ חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

## תשובות סופיות

**1)** א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

**2)** א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0$, $-1$.
ב. הגבול של הסדרה הוא $0$.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט שטולץ

## שאלות

1) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

3) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר $p$ קבע שלם וחיובי.

4) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

5) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{[1^2\cdot a]+[2^2\cdot a]+\ldots+[n^2\cdot a]}{n^3}$, כאשר $a$ קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- $L$).

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- $L$).

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- $L$).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L\neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n>0$ לכל $n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{p+1}$

4) $\frac{k}{3}$

5) $\frac{a}{3}$

6) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן קושי להתכנסות סדרות

## שאלות

1) הסדרה $a_n$ מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל $n$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה $a_n$ מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל $n$, כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה $x_n$ מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל $n$, כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

7) נתונה סדרה $x_n$ המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה $x_n$ מתכנסת.

א. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$,

ב. $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$, $x_1 = 1$,

ג. $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$, $x_1 = 1$,


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נגדיר סדרה $x_n$ על ידי $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**10)** סדרה $x_n$ מקיימת $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל $n$ טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל $n$ טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

**11)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה $x_n$.

אם $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז $x_n$ מתכנסת.

ב. אם לכל $n$ מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

ג. אם סדרה $x_n$ מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל $n$ טבעי:

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$$

**הערה**

בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שאלות הוכיחו או הפריכו

**הערת ניסוח**

הניסוחים הבאים שקולים:

א. קיים $N$ טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X.

ב. כמעט לכל $n$ מתקיימת הטענה X.

ג. לכל $n$, פרט למספר סופי של $n$-ים, מתקיימת הטענה X.

## שאלות

בשאלות **1-13** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

**1)** אם $a_n$ סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

**2)** אם $b_n$ סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

**3)** אם $\lim_{n\to\infty} |c_n| = k$, אז $\lim_{n\to\infty} c_n = k$ או $\lim_{n\to\infty} c_n = -k$.

**4)** אם $d_n$ סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

**5)** אם ל-$a_n$ ו-$b_n$ אין גבול, אז גם ל-$(a_n + b_n)$ וגם ל-$(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.

**6)** אם ל-$a_n$ ו-$b_n$ אין גבול, אז גם ל-$(a_n / b_n)$ אין גבול.

**7)** אם $a_n$ מתכנסת ו-$b_n$ מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.

**8)** אם $a_n$ מתכנסת ו-$b_n$ מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.

**9)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = L$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{L}$.

**10)** אם $a_n < b_n$ לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם $b_n$ חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

**12)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל $n$, אז $k < 1$.

**13)** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, אז $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$.

**14)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם $a_n$ ו- $b_n$ $(b_n \neq 0)$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם $a_n$ סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה $a_n$ חסומה.

ה. אם $a_n$ ו- $b_n$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}}\left(b_n^2 + 2b_n\right)$ חסומה.

ו. אם $a_n$ סדרה מתכנסת ו- $b_n$ $(b_n \neq 0)$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם $a_n$ סדרה מתכנסת, אז קיים $N$ טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות **15-18** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

**15)** אם לכל $n$ מתקיים: $a_{n+1} < a_n^2$ , $a_n \in (0,1)$ אז הסדרה $a_n$ מתכנסת.

**16)** הסדרה $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

**17)** אם לכל $n$ מתקיים: $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ , $x_n \in (0,1)$ אז הסדרה $x_n$ מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

**18)** לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם הסדרה $(x_n+\frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

ב. אם הסדרה $\left(x_n^2+\frac{1}{n}x_n\right)$ מתכנסת, אז הסדרה $x_n$ מתכנסת.

**20)** $x_n$ סדרה של מספרים **שלמים** המקיימת $x_{n+1}\neq x_n$ לכל $n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה $x_n$ לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה $x_n$ לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

**21)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ו- $a<b$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n<b_n$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ וכמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\le b_n$, אז $a\le b$.

**22)** תהי $(a_n)$ סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n=0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ge 0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\ge 0$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n\neq 0$.

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, אז כמעט לכל $n$ מתקיים $a_n>0$.

**23)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $(a_n)$ סדרה מתכנסת ואם $a_n\le k$ לכל $n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

ב. אם $(a_n)$ סדרה מתכנסת ואם $a_n<k$ לכל $n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

**24)** תהי $(a_n)$ סדרה **חיובית**, המקיימת $a_{n+1}\le\frac{a_n-a_n^2}{2}$, לכל $n$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

**25)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** נתונות שתי סדרות $(a_n)$ ו- $(b_n)$, שעבורן: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=4$, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=2$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n\to 0,\ b_n\to 2$ או $a_n\to 2,\ b_n\to 0$.

ב. $a_nb_n\to 0$

**27)** נניח שסדרה $a_n$ מקיימת $a_{2n-2}\le a_{2n}\le a_{2n+1}\le a_{2n-1}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $a_n$ עולה.

ב. $a_n$ יורדת.

ג. $a_n$ מתכנסת.

ד. $a_n$ לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי $a_n$ מקיימת $a_{2n-2}<a_{2n}<a_{2n+1}<a_{2n-1}$ לכל $n$ טבעי?

**28)** הסדרה $(a_n)$ מקיימת את התכונה הבאה:

$0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל $m,n$ טבעיים.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

**29)** א. תהי $(a_n)$ סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. תהיינה $(a_n)$ ו- $(b_n)$ סדרות, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

**30)** נתונה הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ- $3$.

רמז: לכל $x\ge 0$ מתקיים $\ln(1+x)\le x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **31-34** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\infty$.

**31)** אם כמעט כל איברי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

**32)** אם כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים, אז גם כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים.

**33)** א. $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

ב. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

**34)** א. אם, כמעט לכל $n$, $b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

בשאלות **35-38** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=1$.

**35)** א. אם כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים, אז כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים.

ב. אם $(a_n)$ חיובית, אז קיים $N>0$, כך ש- $b_n>\frac{1}{2a_n}$, לכל $n>N$.

**36)** אם $(a_n)$ ו-$(b_n)$ חיוביות, אז $(a_n)$ מתכנסת או $(b_n)$ מתכנסת.

**37)** א. אם $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

ג. אם $(a_n)$ חיובית ואפסה, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

**38)** א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=L$, אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim_{n\to\infty}|b_n|=1$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **39-42** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי $(a_n)$ ו-$(b_n)$ סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$.

**39)** א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי $n$, כך ש-$a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ד. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

**40)** א. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=5$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל $n$, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

**41)** אם $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, אז קיים $N$ טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<\frac{1}{3}$.

**42)** א. אם כמעט כל איברי $(b_n)$ חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\neq\infty$.

ב. אם קיים קבוע $c>0$, כך ש-$b_n\geq c$ כמעט לכל $n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**43)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=4$.

ג. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$.

ד. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ לא קיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**44)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

**45)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n|a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה $(a_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$.

**46)** נתונה סדרה חיובית $(a_n)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא:
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

**47)** נתונה סדרה חיובית $(a_n)$, וידוע כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה $(na_n)$ אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**48)** סדרה $(a_n)$ תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל $n$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.

ב. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.

ג. אם סדרה $(a_n)$ מקיימת $a_{n+1} < |a_n|$, אז היא יורדת.

**49)** תהי $(a_n)$ סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל $n$ טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים $N$ טבעי, כך ש- $a_N$ חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.

ב. כמעט כל איברי $(a_n)$ חיוביים או שכל איברי $(a_n)$ שליליים.

ג. אם לכל $n$ מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

**50)** תהי $(a_n)$ סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל $n$ מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי $a_n$ חיוביים או כמעט כל איברי $a_n$ שליליים.

ב. אם $|a_n| > 0$ לכל $n$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי $a_n$ חיוביים או כמעט כל איברי $a_n$ שליליים.

ג. אם לכל $n$ מתקיים $|a_n| \geq n$, אז $(a_n)$ מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 13 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 174
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 177

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

**1)** $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

**4)** $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

**7)** $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

**10)** $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

**13)** $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

**16)** $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

**19)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

**21)** $\int \frac{1}{4x} dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

**24)** $\int \frac{1}{4x-1} dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

**28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

**29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

**31)** $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

**32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$ ,

ונתון בנוסף כי לכל $x_0$ ממשי: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$ .

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$ .  ב. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$  ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$.  ה. 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 14 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 179

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2x dx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}x dx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

11) $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

12) $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3 dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)x dx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\ln\left|\sin x\right|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$

5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

11) $\sin\left(\sin x\right)+c$

12) $\sin\left(\ln x\right)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$

17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$

18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 15 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים..... 181

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

**1)** $\int xe^x dx$ **2)** $\int x^4 \ln x dx$ **3)** $\int x \sin x dx$

**4)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$ **5)** $\int x^2 \sin 4x dx$ **6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**7)** $\int \ln x dx$ **8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **9)** $\int \arctan x dx$

**10)** $\int \arcsin x dx$ **11)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ **12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

**13)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **14)** $\int x \arctan x dx$ **15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

**16)** $\int \ln^2 x dx$ **17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ **18)** $\int e^x \cos x dx$

**19)** $\int e^{2x} \sin 4x dx$ **20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$ **21)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

**22)** $\int x \tan^2 x dx$ **23)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**24)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

**25)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

**26)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**27)** חשבו את $\int \cos^4 x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) $\frac{e^x}{x+1}+c$

22) $x(\tan x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+c$

23) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c$

24) $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

25) $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

26) $\frac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\}$

27) $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5(\cos x\sin x+x)\right)+c$

28) $\frac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right)$

29) $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5(x-\sin x\cos x)\right)+c$

30) $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}(2n-1)\right)$

31) $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

32) $\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$, $\int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 16 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 185

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin(\ln x)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23) $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 17 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית ..... 188
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית ..... 190
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית ..... 191

# אינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

## תשובות סופיות

1) $x^3-x^2+2x+c$

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) $x^3-x^2+x+c$

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

## נוסחאות

$$\left(a-b\right)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 18 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים


1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)

2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 193

3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 195

4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 196

5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 197

6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 200

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ (x=\arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ (x=\arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ (t = \arcsin\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\tan t \\ (t = \arctan\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos\frac{a}{x}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

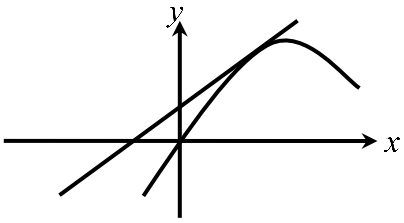

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

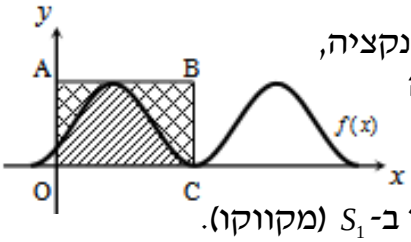



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$ ,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ .




נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$ (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ יסומן ב- $S_2$ .

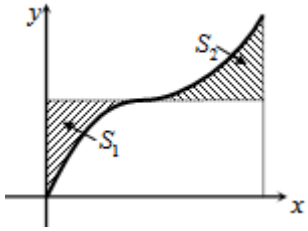
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ .

**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$ , בתחום $0\le x\le 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

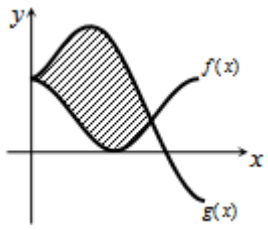
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2\pi$ , ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו- $S_2$ , שווים.





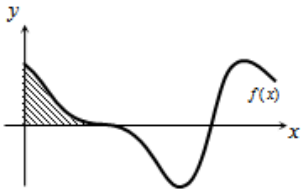
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le \pi$ .



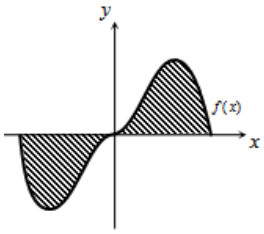

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ .

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$ .




א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$ .
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- $x$ .
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .
ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**6)** נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$ .




א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$ .
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ ,
בתחום $-\pi\le x\le \pi$ .
ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ ,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ .
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**1)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

**2)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

**3)** א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

**4)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$ .

**6)** $b=-2$ , $a=2$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 19 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים


1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א ..... 204
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים ..... 210
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות ..... 213
4. משפטי האינטגרביליות ..... 216
5. אינטגרביליות לפי דארבו ..... 217
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית ..... 219

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_0^1 xe^{-x}dx$

**4)** $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_0^\pi \cos^2 10x dx$

**7)** $\int_0^4 f(x)dx$, כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|}dx$

**9)** $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$. הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx \quad (n\in\mathbb{N})$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

**26)** הוכיחו:

אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$

אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

2) $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

3) $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$

4) $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

5) $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

7) $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

8) $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

9) $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)|\le\int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt=0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx>1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0)>\frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\le\int_1^n f(x)dx\le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$

וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי $f$ עולה ו- $g$ אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

**8)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 x\,dx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin x\,dx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},\ldots,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו

## שאלות

**1)** נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי $f(x)=x$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$ .

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f$ , כך ש- $|f|$ ו- $f^2$ אינטגרביליות, אך $f$ לא אינטגרבילית.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$ .

הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**6)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P_n$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}U(P_n,f)=\lim\limits_{n\to\infty}L(P_n,f)=\int_a^b f(x)dx$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x)=x$ , בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x)=x^2$ , בקטע $[0,2]$.

**8)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\overline{\int_0^1} f=\underline{\int_0^1} f=\frac{1}{2}$ ב. $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$

**2)** א. $\overline{\int_0^2} f=\underline{\int_0^2} f=\frac{8}{3}$ ב. $\int_0^2 f\,dx=\frac{8}{3}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

## שאלות

**1)** תהי $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- $n$ תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n=6,8,10,20$.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהיו $P$ ו- $Q$ שתי חלוקות של הקטע, כך ש- $Q$ עידון של $P$, אז $L(Q,f)\ge L(Q,P),\ U(Q,f)\le U(Q,P)$.

ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אז $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:
פונקציה חסומה $f$ היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:
תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $(P_n)$ היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\underset{n\to\infty}{\to}0$.
הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית.

ג. נתון $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases} x & x=1/n \\ 0 & x\ne 1/n\end{cases}$.
הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

**4)** הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** סדרת פונקציות $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{1+x} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$.

הוכיחו כי $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\frac{1}{2}$.

**6)** תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל $x$ רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל $x$ אי-רציונלי.
העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של $f$, והראו כי $f$ אינה אינטגרבילית.

**7)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{אם } x=\dfrac{p}{q}\neq 1\text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N}\text{, ול-}p,q\text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x\text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$$

א. תהי $A_N$ מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\,|\,x=\dfrac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול-$p,q$ אין גורמים משותפים.
הראו שהקבוצה $A_N$ סופית.

ב. ל- $N\in\mathbb{N}$ ו- $\varepsilon>0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],\dots,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\dots<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup\dots\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+\dots+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראו ש- $f$ אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, $g$ ו- $h$ ב- $[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

**8)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראו ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[c,d]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ חסומה ב-$[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad M'=\sup\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad m'=\inf\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

הוכיחו כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו-$f^2$ אינטגרביליות.

**10)** תהיינה $f$ ו-$g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-$\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge0}$ (כלומר, $f(x)\ge0$).

א. הוכיחו כי אם $f$ רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: $f$ לא תהיה רציפה.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[c,1]$.

א. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$

אינטגרבילית ב-$[0,1]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה $fg$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי $g$, מתקיים $\int_a^b (fg)(x)dx=0$.

הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x,y\geq 0$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{x,y\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

**15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots y_n\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n (tx_i+y_i)^2\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b [tf(x)+g(x)]^2dx\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

**16)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של $f$ במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17) סעיף א'**

1. הוכיחו כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+...++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$, כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי $k^n<\frac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<(k+1)^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

3. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{m-1}k^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m}k^n$.

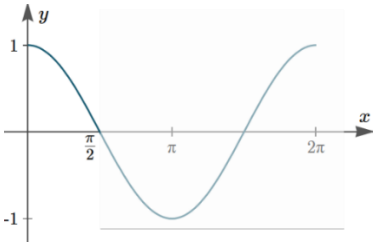
כלומר, $1^n+2^n+...+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+...+(m-1)^n+m^n$.

**סעיף ב'**

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0,1]$ ל-$m$ קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.




**18)** תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, וחשבו את $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

רמז 1: חלקו את $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ל-$n$ קטעים שווים, והניחו כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו- $\theta\in\mathbb{R}$,

$\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:

$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]$.

**19)** חשבו את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\dots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $x_i=2^{\frac{i}{n}}$ $(0\le i\le n)$, וגם:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\quad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

**21)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**22)** נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם $f$ רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם $f$ אינטגרבילית, אז כך גם $f^2$.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם $f$.

**23)** חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\}$

(פונקציית הערך השלם).

**24)** הוכיחו כי אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$,

אז $\alpha f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, וכן $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

רמז: הניחו תחילה כי $\alpha\ge 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

**25)** הוכיחו כי אם $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,

ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

רמז: הוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

**26)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש-$|f(x)|\ge c$ לכל

$x\in[a,b]$. [לחלופין: $f$ אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה]

הוכיחו כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $|g(x)|\ge c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**28)** הניחו כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש-$a<c<b$, והוכיחו כי:

א. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$.

ב. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

**29)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכיחו כי גם $\varphi,\psi$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=$ ?

**30)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו-$B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\dots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו-$i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\ge\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $P$ כנ"ל $\|P\|<\delta\Rightarrow s_\varepsilon(P)<\tau$.

**31)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ ל-$P$,

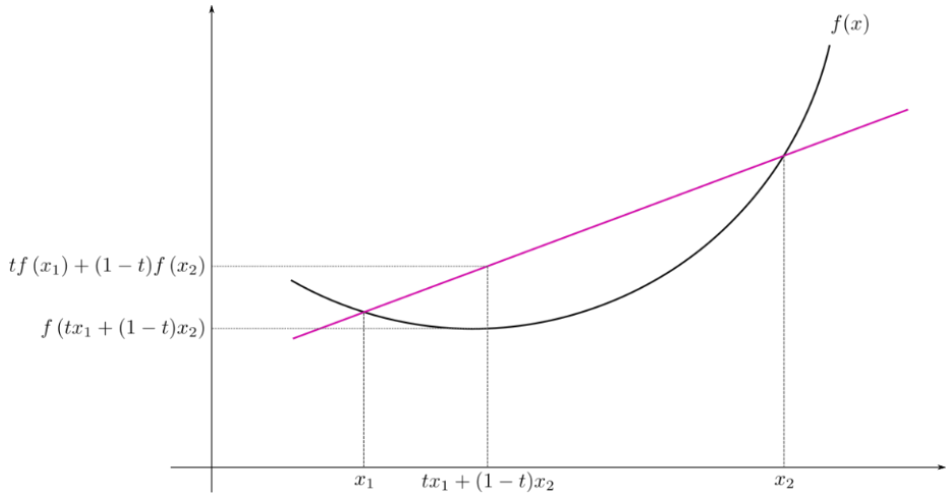
כך ש-$S(f;P,C)=L(f,P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי $f$ רציפה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** זכרו כי פונקציה $f$ על קטע $I$ תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(t\cdot a+(1-t)\cdot b\right)\le t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$.




א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון $f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)$. [רמז: אינדוקציה על $n$]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\le\int_0^1 f\left(g(x)\right)dx$.

**33)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי $f$ אי-זוגית אם ורק אם $F$ זוגית.

ב. הוכיחו כי $f$ זוגית אם ורק אם $F$ אי-זוגית.

**34)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי אם $F$ מחזורית, אז גם $f$ מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה $f$ מחזורית אבל $F$ לא-מחזורית.

**35)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^c f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**36)** תהי $A$ קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,
ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$ : $\boxed{\int_0^x f(t)\,dt = f(x)-1}$ .

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב-$A$ .

ב. הוכיחו כי אם $f\in A$ , אז $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ .
(רמז : תחילה הראו ש- $f$ רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות $f$ ב-$A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 20 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

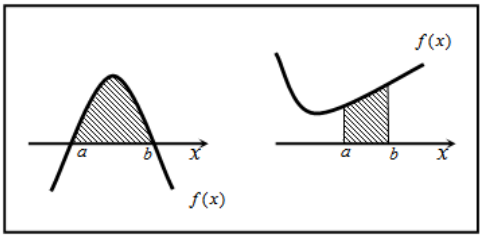
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים ..... 228
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 248
3. אורך קשת ..... 249

# חישוב שטחים

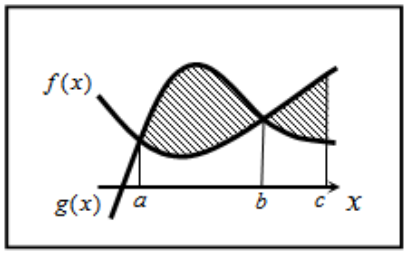
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :




$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

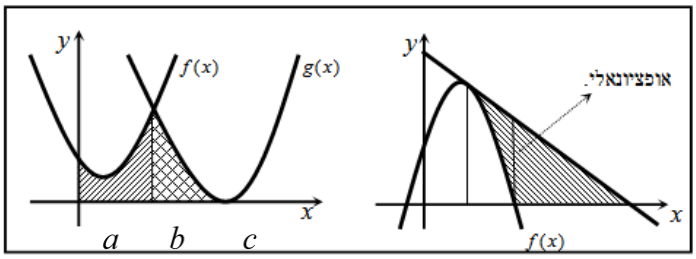



$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

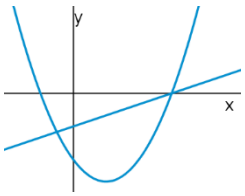
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



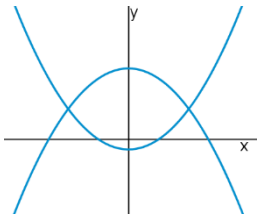

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



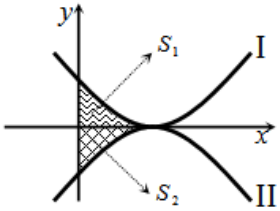

**2)** נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$ , $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



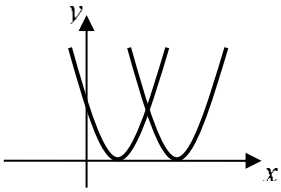

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $g(x)=x^2-6x+9$ , $f(x)=x^2-2x+1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

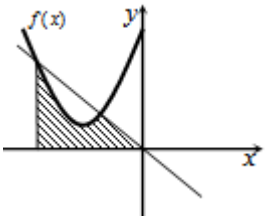



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

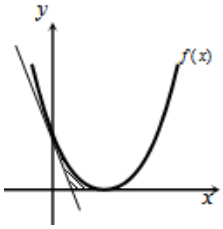
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

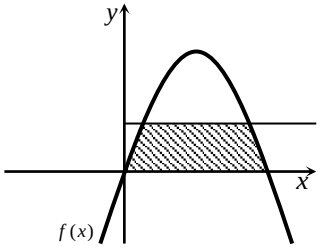



**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

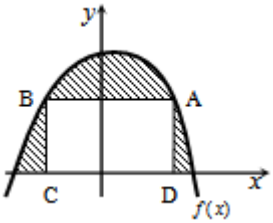



**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

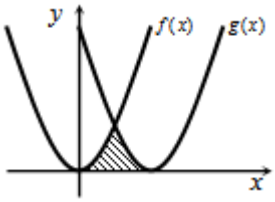
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).




**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



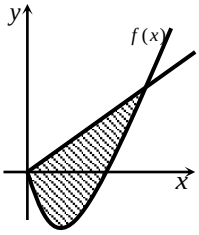

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



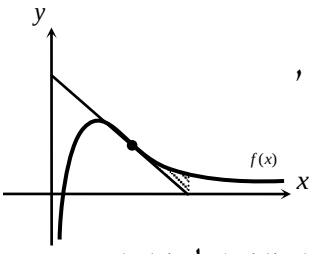

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

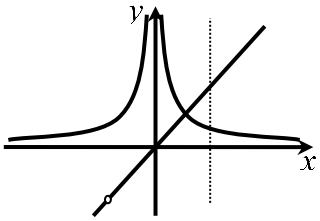
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

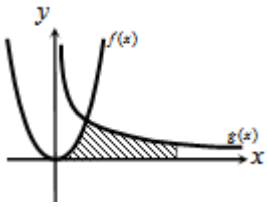
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

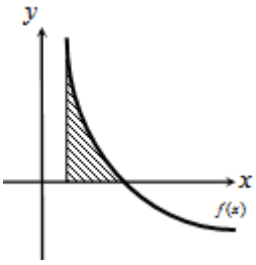



$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)




חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.

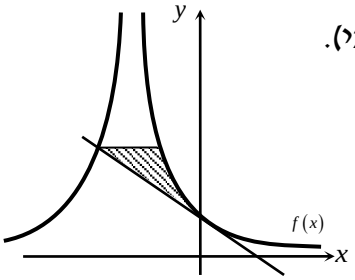
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$, הוא $-\frac{1}{9}$.




א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

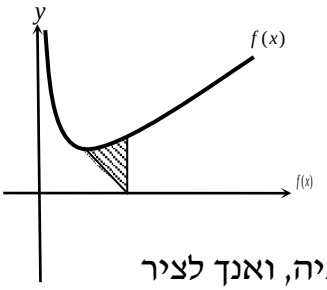
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

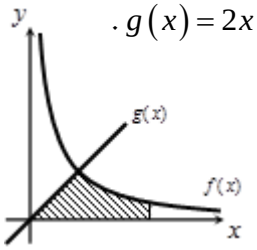



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- $x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.



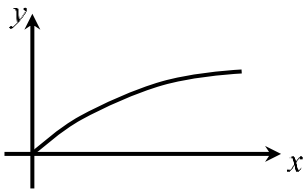

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

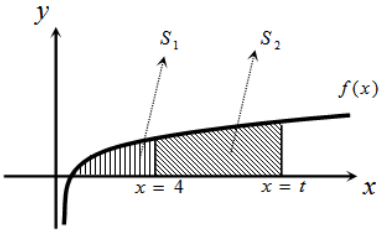
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ ב- $S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנכים ב- $S_2$.

ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.




**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

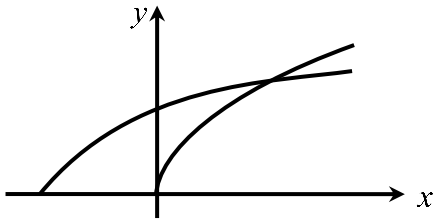
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ ואנך לציר ה- $x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

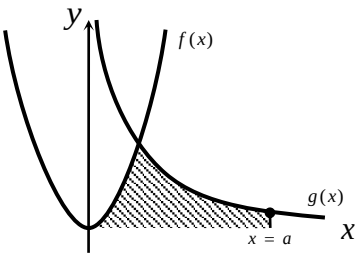
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.



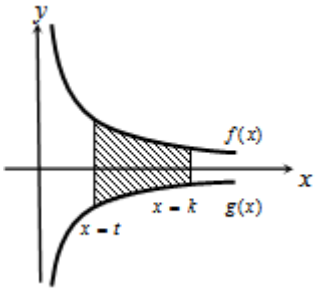


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

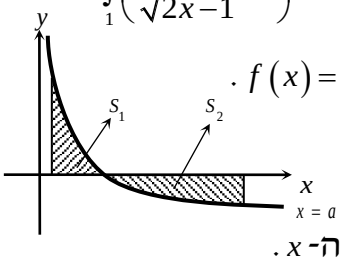



א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

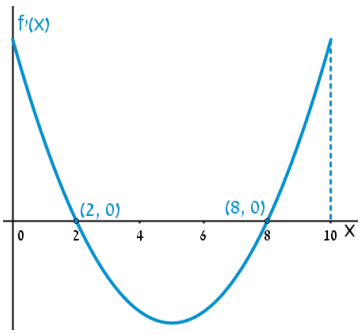



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=1$ ו-$x=13$,
כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$.
נמקו.



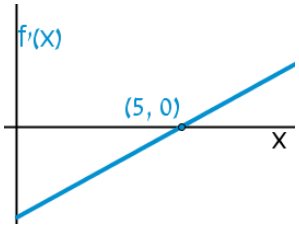

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$,
וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים
ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

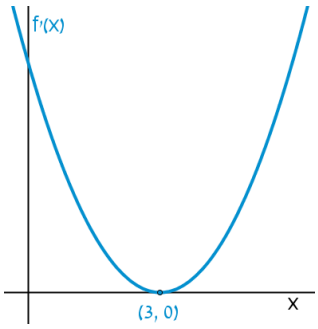
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$ שלה הוא $y=-2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$ כאשר $y=8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$ .

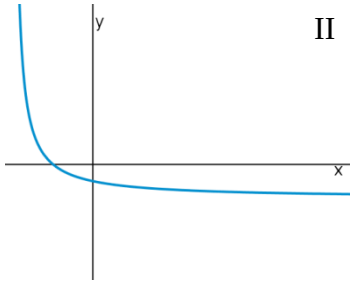


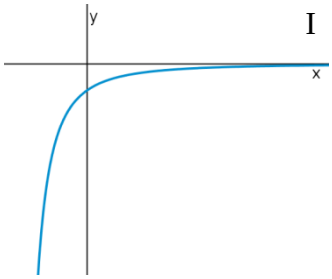

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי $f(3)=4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ :

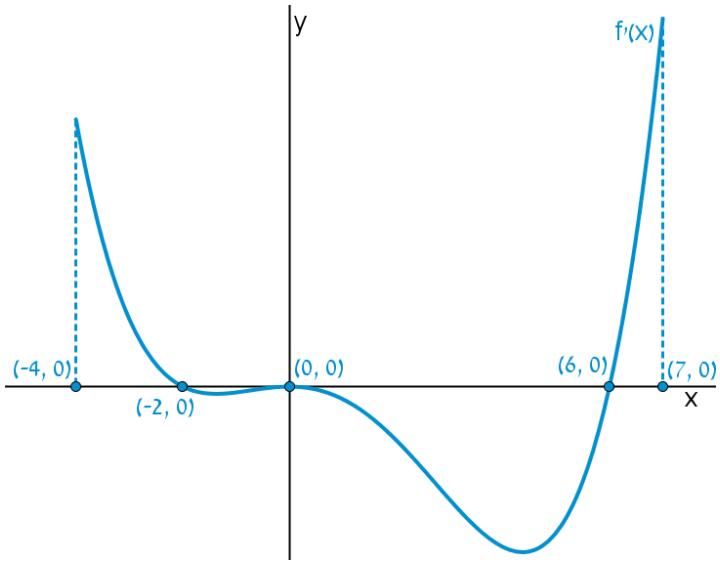



א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$ , וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-2$ .
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ , הצירים והישר $x=10$ ?

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0)=-2$ , $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע השלישי.

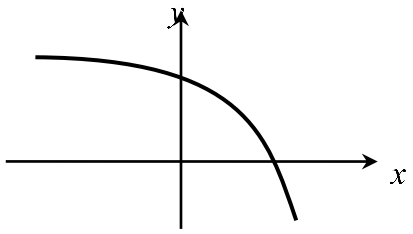
ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים יסודיים | אינטגרלים של פונקציות מורכבות |
|---|---|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ |

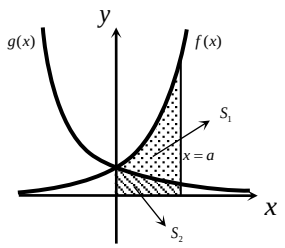
**31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$.
ניתן להשאיר $e$ ו- $\ln$ בתשובה.



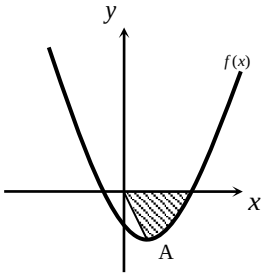

**32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- $y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x) = e^{-x}$ ו- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$ חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה- $x$ את הישר $x = a$,
כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצאו את $a$.



**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

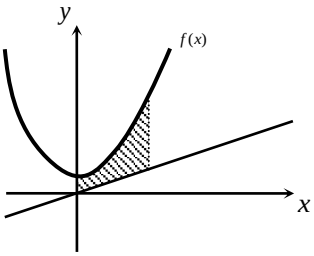
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .



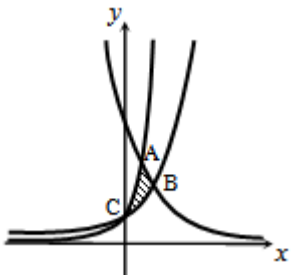

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:



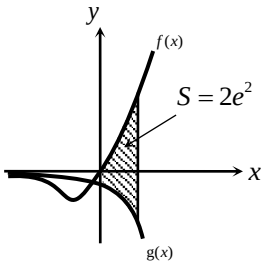

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

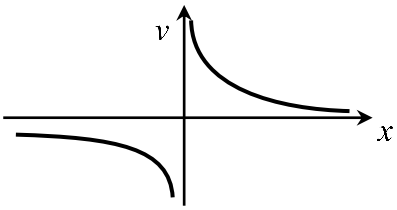

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

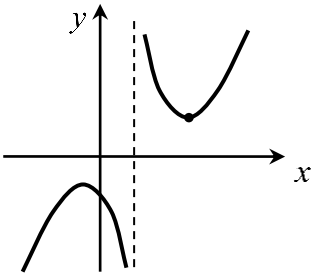
### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ | $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



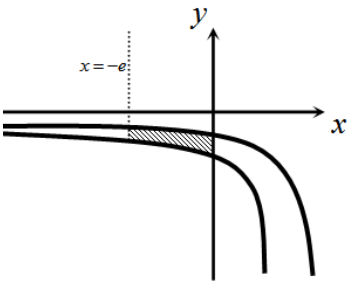

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.




**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.

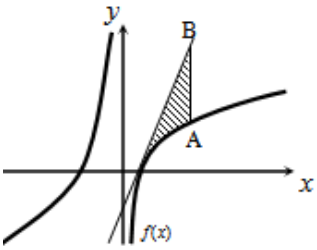




כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ היא $y=18x-9$.




א. מצאו את $a$ ו- $b$ וכתבו את הפונקציה.

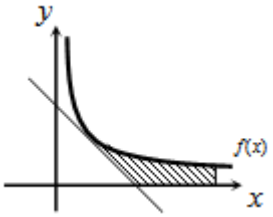
נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

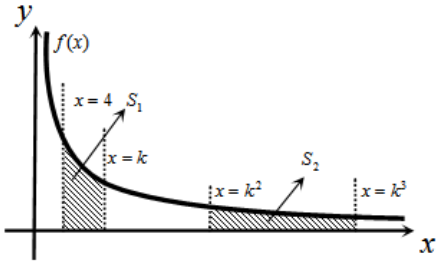



א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.

נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.



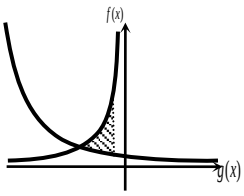

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב- $k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.



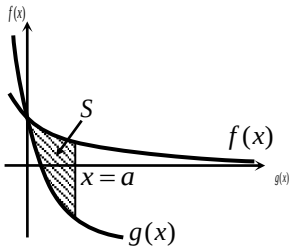

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\ge 0$.

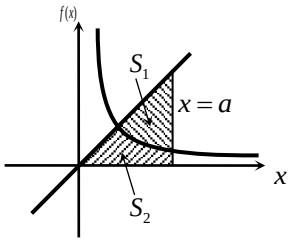



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

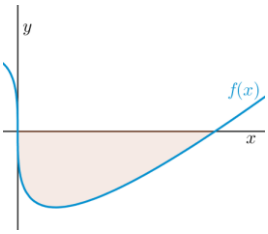
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

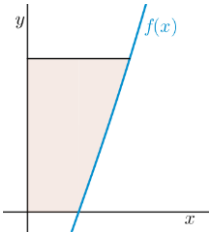
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

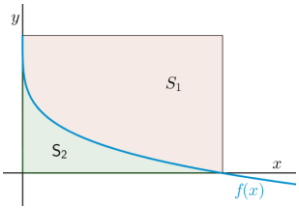



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. נעביר אנך לציר ה- $y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.

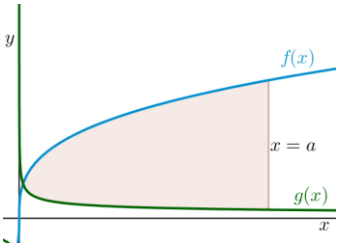



נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

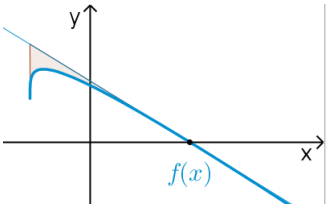
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$ ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.
מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.




א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

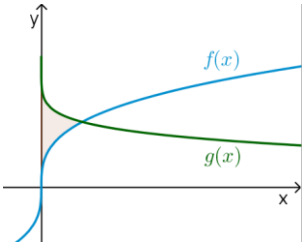
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

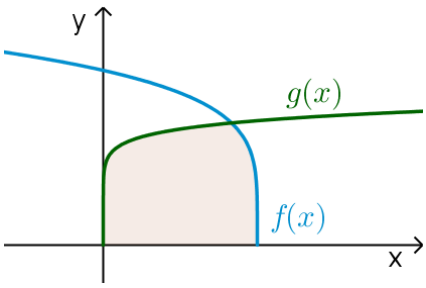
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

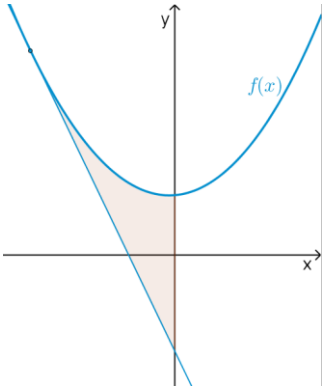



א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

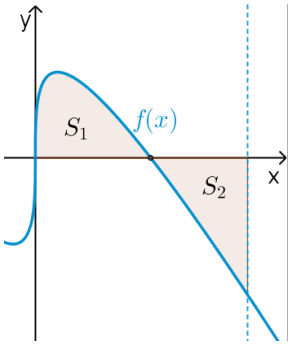
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
נעביר ישר $x=k$ , אשר יוצר את השטח $S_2$ , כמתואר באיור.
מצאו את $k$ , אם ידוע כי $S_1=S_2$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 21 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב ..... 250
2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב ..... 253
3. חישוב נפח גוף כללי ..... 254

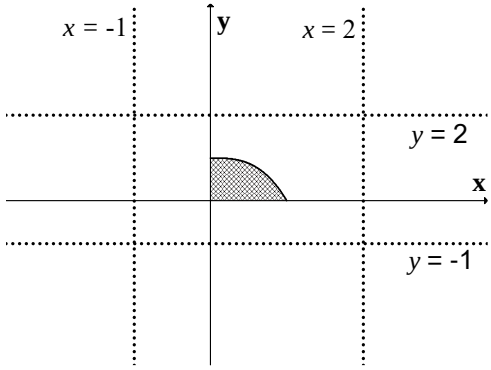
# חישוב נפח גוף-סיבוב

## שאלות

**1)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

**2)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $y$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=1-x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות **3-8**:




**3)** ציר ה- $x$.

**4)** הישר $y=-1$.

**5)** הישר $y=2$.

**6)** ציר ה- $y$.

**7)** הישר $x=-1$.

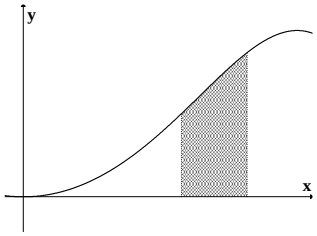
**8)** הישר $x=2$.

**9)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

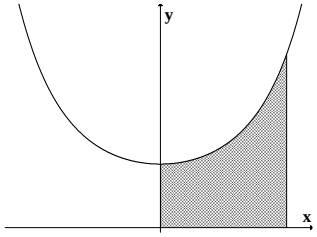
**10)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

**11)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.

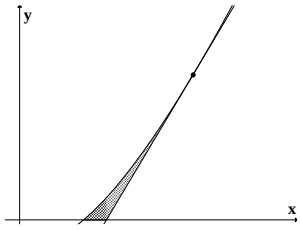

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$
והישרים $y=0$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$
והישרים $y=0,\ x=0,\ x=1$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\ln x$,
המשיק לגרף בנקודה $\left(e,e\right)$ וציר ה- $x$,
מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו נפח הגוף המתקבל?

**15)** השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x)=x^2,\ f(x)=2x+8$, $x=0$
מסתובב סביב הישר $x=4$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{64}{15}\pi$ ב. $\frac{64}{15}\pi$

2) א. $\frac{8}{3}\pi$ ב. $\frac{8}{3}\pi$

3) $\frac{9\pi}{14}$

4) $\frac{15\pi}{7}$

5) $\frac{33\pi}{14}$

6) $\frac{3\pi}{5}$

7) $2.1\pi$

8) $\frac{12\pi}{5}$

9) $V=\pi R^2\cdot H$

10) $V=\frac{\pi R^2\cdot H}{3}$

11) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

12) $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

13) $\pi\left(e-1\right)$

14) $\frac{e^3-4}{54}\pi$

15) $128\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

## שאלות

1) הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$ , עבור $-1\le x\le 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x=\sqrt{9-y^2}$ , עבור $-2\le y\le 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

## תשובות סופיות

1) $8\pi$
2) $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$
3) $S=4\pi R^2$
4) $24\pi$

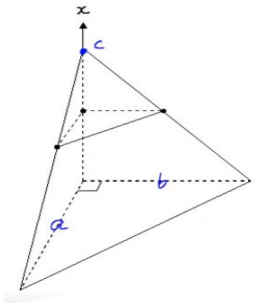

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב נפח גוף כללי

## שאלות

**1)** מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה $h$ ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו $a$.

**2)** חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).




## תשובות סופיות

**1)** $V=\frac{a^2h}{3}$

**2)** $\frac{abc}{6}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 22 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים


1. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי חישוב ..... 255
2. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי תיאוריה ..... 258
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים ..... 261

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

## שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו"א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו-$b(x)$ גזירות, אזי:

**1)** $I(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)$

**2)** $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

**3)** $I(x)=\int_2^x e^{-t^2}dt$

**4)** $I(x)=\int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

**5)** $I(x)=\int_2^{x^3+x} t\ln t\,dt$

**6)** $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

**7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

**8)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$

**9)** $\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_4^x e^{t^2}dt$

**10)** חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$ , כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$ .

חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי $f$ רציפה).

**13)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

**14)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$ .

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

**15)** תהי $f$ פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

**16)** מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$ , אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$ .

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$ , בנקודה $x_0=2\pi$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) $I'(x)=e^{-x^2}$

4) $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

5) $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

6) $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{3}$

9) $4e^{16}$

10) $0$

11) תחום הגדרה: כל $x$.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל $x$.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$ , $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$ , $x<-1$.

12) $40$

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

17) $y=x-2\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

**2)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

**3)** נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

הוכיחו כי $F'=f$ ב- $[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

**4)** נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(t)dt > 1$.

הוכיחו שקיים $x_1$, בקטע $(a,b)$, עבורו $\int_a^{x_1} f(t)dt = 1$.

**6)** תהי $f$ פונקציה רציפה ומחזורית לכל $x$, עם מחזור $p$.

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי $C$ עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

**8)** תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,1)$, כך ש- $f(c) = 3c^2$.

**9)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב- $[0,\pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt = 0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,\pi/2)$, כך ש- $f(c) = 2\cos 2c$.

**10)** תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0,\pi/4]$, כך ש- $2\cos 2c\int_0^{\pi/4} f(t)dt = f(c)$.

**11)** תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$.

**12)** תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$.

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,
בקטע $(a,b)$, שעבורן מתקיים $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים $c$, בקטע $(a,b)$, כך ש-$f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- $f$ רציפה ב-$[a,b]$,
ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$? נמקו.

**14)** מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,
ונניח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.
הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל $x$ בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

**7)** א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

**14)** $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+D+2 & x\ge 0\\ e^{x}+D & x<0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

## שאלות

**1)** בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

**2)** תהי $f$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

**3)** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_1} f(t)dt=\int_a^{x_2} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים $x$, בקטע $(a,b)$, שעבורו $f(x)=0$.

**4)** הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**5)** תהי $f$ פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**6)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=g(c)$.

**7)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

**9)** חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

**10)** ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

**11)** הוכח כי $\frac{3}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{6}{\ln 2}$.

**12)** הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{2\pi^2}{9}$.

**13)** הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int\limits_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x dx\le\frac{1}{2}\ln 2$.

**14)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

**15)** נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 23 - אינטגרלים לא אמיתיים

### תוכן העניינים


1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון ..... 263
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני ..... 265
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי ..... 266
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים ..... 267
5. מבחני השוואה ..... 268
6. התכנסות בהחלט ..... 270
7. מבחן דיריכלה ..... 271
8. התכנסות בתנאי ..... 272

# אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

**1)** $\int_1^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

**2)** $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

**3)** $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$

**4)** $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}dx$

**5)** $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$

**6)** הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

**7)** הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2e}$

4) מתבדר: $\infty$.

5) $\frac{5}{4e^2}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר: $\infty$.
2) מתבדר: $\infty$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

## שאלה

**1)** חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

## תשובה

**1)** מתבדר: $\infty$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

## שאלות

**1)** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$ , הישר $x=1$ וציר ה- $x$ , עבור $x\le 1$ .

**2)** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$ והישר $x=5$ .

**3)** נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$ .
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $0\le x\le k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $x\ge k$ .
מצאו את הקבוע $k$ .

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{2}e^2$

**2)** $2\sqrt{5}$

**3)** $k=\sqrt[3]{\ln 2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני השוואה

## שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט

## שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

**1)** $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

**2)** $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

**3)** $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

**4)** הוכיחו: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס.

**2)** מתכנס.

**3)** מתכנס.

**4)** שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן דיריכלה

## שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

1) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

2) א. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p>0)$

ב. $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$

3) $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p>0)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בתנאי

## שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

1) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

2) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

3) א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

4) $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$ .

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$ .

**2)** א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

**3)** א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,

מתבדר עבור $p \geq 2$ .

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,

מתבדר עבור $p \geq 5$ .

**4)** מתכנס בתנאי.

**5)** מתכנס בתנאי.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 24 - מבוא לטופולוגיה

### תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה ..... 274

# מבוא לטופולוגיה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$ .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
**הערה: נקודת שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.**

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה $D$ ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?

**2)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$ .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה $D$ ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**3)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$ .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

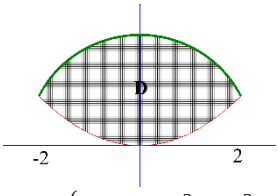
ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה $D$ ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 5\,,\ y>\frac{1}{4}x^2\right\}$ ב.




ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=5\,,\ -2<x<2\right\}$

ו. הקבוצה אינה פתוחה.

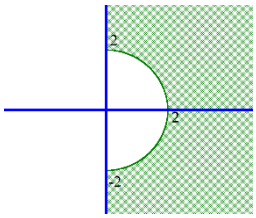
ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=5,-2<x<2\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,4y=x^2,\ -2<x<2\right\}}_{E}$

$(0,\sqrt{5})$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(0,0)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.

**2)** א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\,,\ x>0\right\}$ ב.




ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות $C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\,,\ -2<y<2\right\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

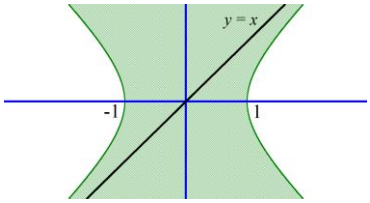
ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\,,\ -2<y<2\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x=0\,,\ |y|>2\right\}}_{E}$

$(2,0)$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(0,3)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה $D$ .

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.

**3)** א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\,,\ y\ne x\right\}$ ב.




ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D פנימיות **למעט** הנקודות: $\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=1\ or\ \ y=x\right\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=1\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,y=x\right\}}_{E}$

$(0,0)$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(-1,0)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה $f(x,y)$ לא חסומה בקבוצה $D$.

י. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 25 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

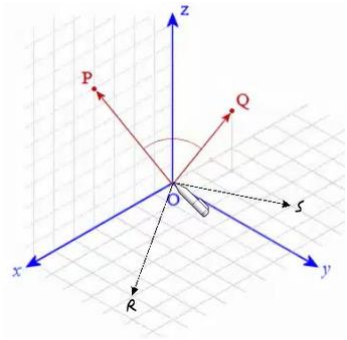

1. וקטורים ..... 277
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת ..... 284
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב ..... 286
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי ..... 287
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור ..... 296

# וקטורים

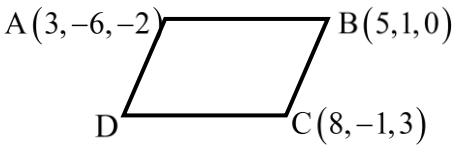
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור $u$ כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}$, **u**.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

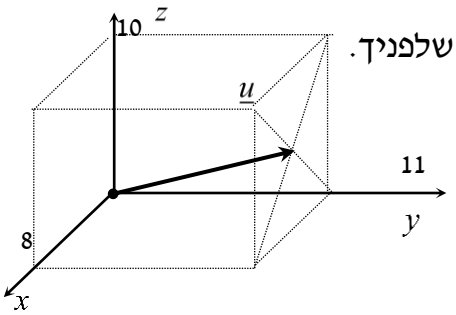
**1)** רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



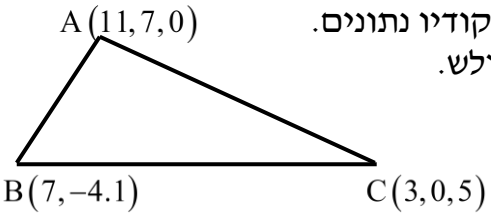

**2)** בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.




**3)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**4)** בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



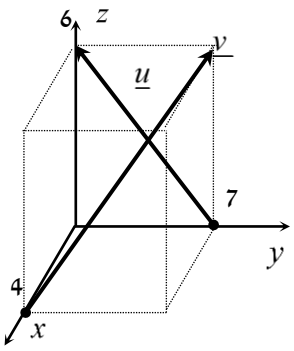


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה $N$, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.




**6)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

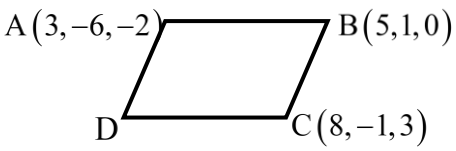
**7)** מצאו את $x$, $y$ ו- $z$, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

**8)** נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$ .

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

**10)** חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

**11)** חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

**12)** $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** $\underline{u}/|\underline{u}|$

**14)** $d(\underline{u},\underline{v})$

**15)** $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

**16)** $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$ ,
ויש למצוא את הווקטורים:

**17)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

**18)** $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

**19)** $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**20)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$ , $B(0,2,-1)$ , $C(-3,-5,0)$ , $D(-7,-5,2)$ .
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$

**23)** מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$ , $B(0,3,2)$ , $C(5,-1,0)$.

**24)** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$ , $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

**25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

**26)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**27)** הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם $\alpha$ היא הזווית בין $a$ ל- $b$, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

**29)** יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה $k$.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- $w_1$.
מהו המרחק של $v$ מ- $w_1$?

**30)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- $u$ ו- $v$ הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\vec{S}=(-2,4,0)$, $\vec{R}=(6,4,0)$, $\vec{Q}=(-2,1,3)$, $\vec{P}=(4,0,7)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$

7) א. $x=5$, $y=-2$, $z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}$ *

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $or$ $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**29)** $\frac{5}{4}k$

**30)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

## שאלות

**1)** נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

**2)** חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

**3)** נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

**4)** נתונים שני וקטורים $u,v$ במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $|(u+v)\times(u-v)|$.

**5)** נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

**6)** חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

**7)** חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

## תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. $-3$ ב. $-3$ ג. $-3$

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. $-4$ ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

## שאלות

**1)** הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$ , $B(1,1,1)$ , $C=(2,1,2)$ , $D(2,2,2)$ .

**2)** מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$ .

**3)** נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** $\sqrt{26}$
**3)** א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

**2)** רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור $xy$)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

**3)** נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב-$t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d\,|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

**5)** נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

**6)** נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

**7)** נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה (**T**), נורמל היחידה (**N**) והבינורמל (**B**) של $r$.

**8)** תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל $t$, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

**9)** נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

**11)** חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

**12)** נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

**13)** חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע $t$.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

**14)** מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

**15)** תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)
ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3,t-5,t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של $t$ גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

**18)** הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

**19)** חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r\left(t\right)=\left(t^2,0,t\right)$.

**20)** וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=\left(2,-1,-10t\right)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

**21)** וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=\left(8\cos 4t,8\sin 4t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

**22)** העקום $C$ הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(a,b)$ ורדיוס $R$.

א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום $C$.

ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא $(a,b)$ ורדיוס $R$.

**23)** נתון העקום $r(t)=(4\cos t,3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

**25)** נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\dfrac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

**26)** נתון העקום $y=\dfrac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

**27)** מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

**28)** נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\dfrac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

**29)** העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(a,b)$ ורדיוס $R$.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

**30)** נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**31)** עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\left(x(t),y(t)\right)$.

הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

**32)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.

ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

**33)** הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא

$$k(\theta)=\frac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

**34)** חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

**35)** חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

**2)** א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

**3)** א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

**4)** א. $\frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$,
ב. שאלת הוכחה.

**5)** א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

**6)** א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

**7)** $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right)$, $N(t)=(-\sin t,-\cos t,0)$, $B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** המישור הניצב $x+4y+12z=114$ , מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$ ,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$ .

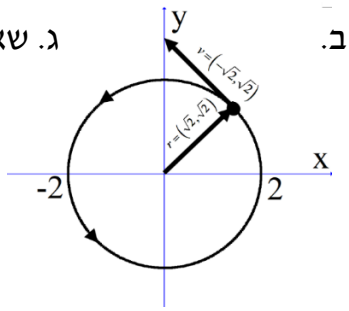
**10)** שאלת הוכחה.

**11)** א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. $12$ ה. $120.46^\circ$

**12)** $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right)$, $|v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2}$, $a(t)=\left(0,0,-g\right)$, $|a(t)|=g$

**13)** א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.




ג. שאלת הוכחה.

**14)** $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

**15)** $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

**16)** $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}_{rad}$

**18)** שאלת הוכחה.

**19)** $\rho = \frac{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $\kappa = \frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

**20)** $\rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$

**21)** $\kappa = \frac{2}{13}$, $\rho = 6.5$

**22)** א. $\rho = R,\ \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

**23)** העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0,\pi,2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

**26)** א. $\rho(x) = \frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2x^2|x|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2 = 2$

**27)** רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2 = 2/9$.

**28)** א. $x = \frac{9}{8}$, $y = \pm 3$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2 = (125/16)^2$

**29)** $\rho = R$, $\kappa = \frac{1}{R}$

**30)** א. $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+\left(y+1\right)^2 = \frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

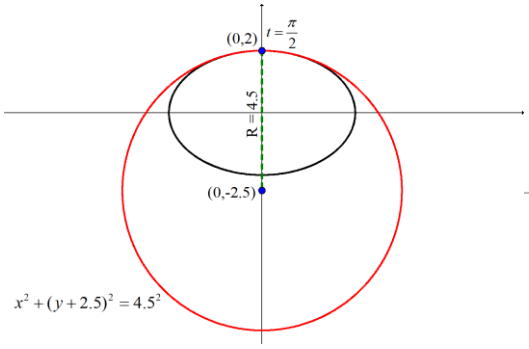
**31)** שאלת הוכחה.

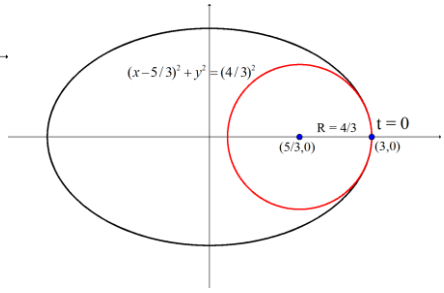

כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** א.

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2} \qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a} \qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



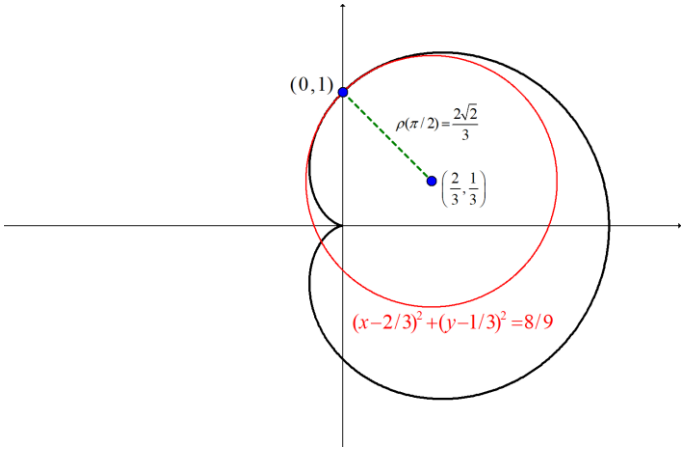




ב.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $\kappa=\rho=1$

**35)** ראו שרטוט:





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

## שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.
הוכיחו:
א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$
ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.
ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של $\varphi$ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>**הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)**</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} \\ &\text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h) \\ &\text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z \end{aligned}}$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} \\ &\mathbf{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h) \\ &\mathbf{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curl}\mathbf{F} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curl}\mathbf{F} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 26 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים


1. הצגה פרמטרית של ישר ..... 298
2. מצב הדדי בין ישרים ..... 301
3. הצגה פרמטרית של מישור ..... 303
4. משוואת מישור ..... 304
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור ..... 305
6. מישורים המקבילים לצירים ..... 306
7. מצב הדדי בין ישר ומישור ..... 307
8. מצב הדדי בין מישורים ..... 308
9. ישר חיתוך בין מישורים ..... 309
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים ..... 310
12. זווית בין ישר ומישור ..... 311
13. זווית בין שני מישורים ..... 312
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב ..... 313
16. מרחק בין נקודה לישר ..... 314
17. מרחק בין נקודה למישור ..... 315
18. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 316
19. מרחק בין ישר למישור ..... 317
20. מרחק בין מישורים מקבילים ..... 318
21. מרחק בין ישרים מצטלבים ..... 319
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. היטלים ונקודות סימטריה ..... 320
24. שאלות מסכמות ..... 321

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

# הצגה פרמטרית של ישר

## שאלות

**1)** האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$ ?

**2)** האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=t(2,-1,5)$ ?

**3)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

**4)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

**5)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

**6)** מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות $x$, $y$ ו- $z$.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$ , $y=10$ , $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

**8)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- $y$ במרחב.

**9)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- $z$.

**10)** מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

**11)** ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

**12)** ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

**13)** הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מצב הדדי בין ישרים

## שאלות

**1)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

**2)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$ , $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

**3)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$ , $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

**4)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$ , $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

**5)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$ , $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

**6)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$ , $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

**7)** מצאו את ערכו של הפרמטר $k$, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

**8)** נתונות הנקודות $A(3,-1,5)$ , $B(k,-1,3)$ , $C(-6,3,-1)$ , $D(-2,3,k)$.
הראו כי לכל ערך של $k$, הישרים $\ell_{AB}$ ו- $\ell_{CD}$ מצטלבים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצגה פרמטרית של מישור

## שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$ , $B(3,6,2)$ , $C(0,-3,1)$.

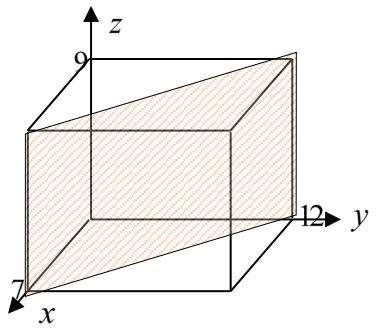
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$ .

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$ .
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- $x$ .

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.




## תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואת מישור

## שאלות

**1)** קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$ :

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

**2)** מצאו את ערכו של $k$ שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

**3)** נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

**4)** נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

## תשובות סופיות

**1)** א. על המישור. ב. לא על המישור.

**2)** $k=3$

**3)** $(3,0,0)$ , $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$ , $(0,0,-9)$

**4)** $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

## שאלות

**1)** נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

**2)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

**3)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

**4)** המישור $\pi$ עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$ , $B(2,0,0)$ , $C(4,-1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$ , $(0,1,-2)$ , $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

## תשובות סופיות

**1)** $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

**2)** $\pi : -2x+3y+z+19=0$

**3)** $\pi : x-3y+8z=0$

**4)** $\pi : 3x+6y-z-6=0$

**5)** א. 1. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$ , $(-0.5,0,0)$ ג. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מישורים המקבילים לצירים

## שאלות

**1)** נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של $k$ המישור מקביל לציר ה- $y$ (ולא מכיל אותו)?

**2)** פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

## תשובות סופיות

**1)** $k=3$

**2)** 6 יח"נ.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מצב הדדי בין ישר ומישור

**1)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$ , $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**2)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$ , $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**3)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$ , $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**4)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$ , $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי $a$ ו- $b$, עבורם הישר מוכל במישור.

## תשובות סופיות

**1)** הישר חותך, $(1,-1,3)$.

**2)** מקבילים.

**3)** הישר מוכל.

**4)** $a = 1$ , $b = -7$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מצב הדדי בין מישורים

## שאלות

**1)** בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$ , $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$ , $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$ , $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

**2)** נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$ , $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי $k$ עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

## תשובות סופיות

**1)** א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

**2)** א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# ישר חיתוך בין מישורים

## שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$ , $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$ , $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$ , $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$ , $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$ , $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

## תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית בין שני ישרים

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$ , $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

**2)** מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$ , $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6,5,1)$ , $D(-1,4,2)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.

**3)** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

**4)** נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$ , $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $78.521°$ ב. $90°$

**2)** $63.37°$. הישרים מצטלבים.

**3)** א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

**4)** $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית בין ישר ומישור

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$ , $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$.

**2)** נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$ , $C(1,2,5)$ , $B(0,2,-1)$ , $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

**3)** נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

## תשובות סופיות

**1)** $18.87°$

**2)** $44.83°$

**3)** $14.9°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית בין שני מישורים

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

**2)** נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$ , $B(3,-1,1)$ , $C(7,-1,-5)$ , $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

**3)** מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

## תשובות סופיות

**1)** $90°$

**2)** $87.539°$

**3)** $32.312°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין שתי נקודות במרחב

## שאלה

**1)** נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$ , $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי $k$ עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

## תשובה

**1)** $k=8$ או $k=12$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין נקודה לישר

## שאלות

**1)** מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

**2)** נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(1,6,-1)$ .
חשבו את שטח המשולש ABC.

**3)** על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{54}$

**2)** 12.75 יח"ש.

**3)** $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין נקודה למישור

## שאלות

**1)** מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

**2)** מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

**3)** נתונים ישר ומישור $\pi : 2x+4y-4z+15=0$ , $\ell : \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

## תשובות סופיות

**1)** $2\frac{1}{2}$

**2)** $\pi : 3x-2y+z+21=0$ או $\pi : 3x-2y+z-7=0$.

**3)** $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין ישרים מקבילים

## שאלות

**1)** נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$ , $B(12,-5,2)$ , $C(6,1,4)$ , $D(12,11,-8)$ .

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

**2)** 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1:\underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2:\underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$

$$l_3:\underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4:\underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

## תשובות סופיות

**1)** א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין ישר למישור

## שאלות

**1)** נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

**2)** נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$ , $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר $k$ שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

## תשובות סופיות

**1)** א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין מישורים מקבילים

## שאלות

**1)** נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

**2)** נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$ , $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

**3)** נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$ , $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$ , $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$ , $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$ , $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים $k$, $q$ ו- $p$, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

**4)** כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

## תשובות סופיות

**1)** $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$ , $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

**2)** $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

**3)** $k=2$ , $q=-2$ , $p=18,-12$

**4)** $12x+4y-3z-136=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחק בין ישרים מצטלבים

## שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- $z$.

## תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
2) 1.567 יח"א.
3) $\sqrt{2}$ יח"א.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# היטלים ונקודות סימטריה

## שאלות

**1)** נתונה נקודה $A(1,-1,3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.

ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לישר.

**2)** נתונה נקודה $A(0,0,1)$ ונתון מישור $7x+7y-z=8$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.

ב. מצאו את הנקודה C, הסימטרית ל-A, ביחס למישור.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1,3,2)$ ביחס למישורי הצירים.

ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x,y,z)$ ביחס למישורי הצירים.

**4)** נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0,2,4),\ B(-2,6,-2),\ C(2,-4,8),\ D(10,2,0)$.

מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC.

## תשובות סופיות

**1)** א. $B(0,1.5,-1.5)$ ב. $C(-1,4,-6)$

**2)** א. $B\left(\frac{7}{11},\frac{7}{11},\frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11},\frac{14}{11},\frac{9}{11}\right)$

**3)** א. $B_{xy}(1,3,-2),\ C_{xz}(1,-3,2),\ D_{yz}(-1,3,2)$

ב. $B_{xy}(x,y,-z),\ C_{xz}(x,-y,z),\ D_{yz}(-x,y,z)$

**4)** $\underline{x}=(0,2,4)+t(0,1,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שאלות מסכמות

**1)** נתונות הנקודות $C(1,1,1)$ , $B(1,2,0)$ , $A(1,1,3)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

**2)** מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$ , $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$ , $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$ , $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$ , $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

**3)** מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$ , $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$ , $2x-14y+10z=-6$.

**4)** מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$ , $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$ , $2x-14y+10z=-6$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

**6)** הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

**7)** נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$ , $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

**8)** נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$ , $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור $\pi_1$ ובמרחק 6 ממישור $\pi_2$ (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

**9)** נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$ , $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, $\ell_2$ , המקביל למישור $\pi$ , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר $\ell_1$ בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות $t$ את וקטור הכיוון של $\ell_2$)

**10)** נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$ , $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$.
$\ell_1$ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור $\pi_3$ מכיל את הישר $\ell_1$ ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור $\pi_3$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$ , $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

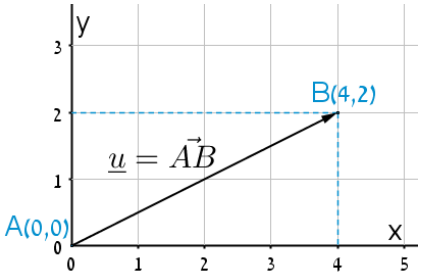

כתב ופתר – גיא סלומון ©

# סיכום כללי

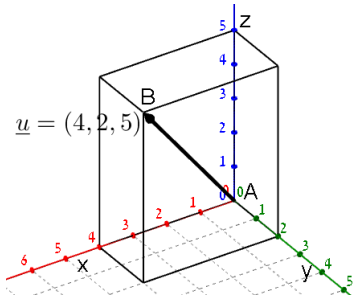
## הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: $(x,y)$ במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:




- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.




- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

## וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$ ; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ ; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

## מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

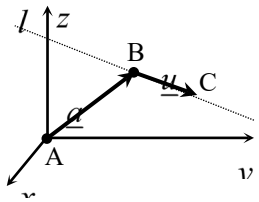
מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\alpha$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

## הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.




הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר $t$ הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של $t$ שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר $l$.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$ , $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$ ; $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

***הערות:**

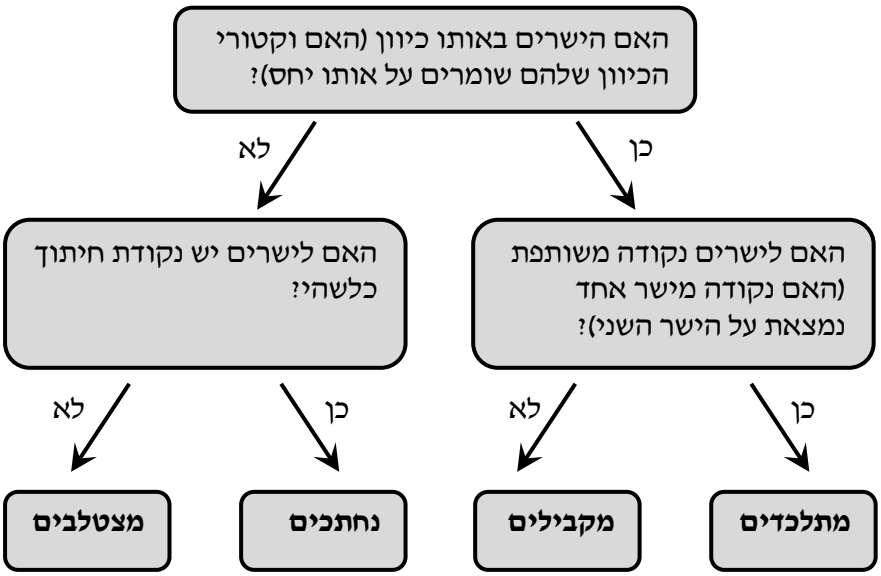
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת $t_0$ בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת $t_1$ בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## מצב הדדי בין ישרים

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

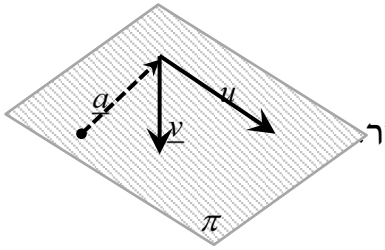
כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:





כתב ופתר – גיא סלומון ©

## הצגה פרמטרית של מישור




מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר $t,s$ הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור $\pi$.

## משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: $(x,y,z)$ היא נקודה על המישור והמקדמים $a,b,c$ הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

| מתלכדים | מקבילים | נחתכים |
|---|---|---|
| $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ | כל מצב אחר |

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית $\alpha$ בין שני וקטורים $\underline{u}$ , $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה $\alpha$ בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה $\alpha$ בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה $\alpha$ בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 27 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים


1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים ..... 330
2. מבחן ההתבדרות של טורים ..... 333
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים ..... 334
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים ..... 336
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 338
6. תרגילי תיאוריה ..... 339

# טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

## שאלות

### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

**10)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

**11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

### טור הרמוני מוכלל

**12)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**תכונות אלגבריות של טורים**

**13)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**14)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

**15)** מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123...+0.141414...$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
3) מתבדר.
4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
6) מתכנס ל- $8$.
7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
9) מתבדר.
10) $S=\frac{1}{\ln 2}$
11) $\frac{1}{12}$
12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$
15) $\frac{323}{1221}$

# מבחן ההתבדרות של טורים

## שאלות

**1)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

**1)** א-ו: מתבדר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים חיוביים

## שאלות

### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

**4)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

### מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה**

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים כלליים

**מבחן לייבניץ**

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

**מבחן דיריכלה**

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

**4)** $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

**5)** $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

**6)** הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

**7)** הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:
$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

**8)** בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

**9)** הוכיחו שאם הסדרה $b_n$ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

**10)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

**11)** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

**12)** $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

**13)** $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

**14)** $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס.
**2)** מתכנס.
**3)** מתכנס.
**4)** מתכנס.
**5)** מתכנס.
**6)** הוכחה.
**7)** הוכחה.
**8)** מתבדר.
**9)** הוכחה.
**10)** א. הוכחה. ב. מתכנס.
**11)** מתכנס.
**12)** מתכנס.
**13)** מתכנס.
**14)** מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

## שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.

2) מתכנס בהחלט.

3) מתכנס בתנאי.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בהחלט.

6) מתכנס בהחלט.

7) מתכנס בתנאי.

8) מתכנס בתנאי.

9) מתכנס בתנאי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

**5)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

**6)** א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

**7)** תהי $(a_n)$ סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

**9)** הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל $n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

**10)** נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

**11)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה $b_n$ חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**12)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

**13)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

**14)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל $n$, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל $n$, אז הטור מתבדר.

**15)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

**16)** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

**17)** הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**18)** הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

**19)** נתון $a_n \geq 0$ לכל $n$.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

**20)** הסדרה $(a_n)$ מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

**22)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל $n$ מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

**23)** נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

**24)** נניח כי $(a_n)$ סדרה המקיימת $a_n > 0\ ,\ a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

**25)** $(a_n)$ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

**26)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

**27)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה $a_n$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** פונקציה $f$ מוגדרת לכל $x$, גזירה ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

**29)** נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

**30)** יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל $n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 28 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים


1. סדרות פונקציות ..... 344
2. טורי פונקציות ..... 347
3. טורי חזקות ..... 349
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות ..... 351

# סדרות פונקציות

## שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

**1)** $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

**2)** $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

**3)** $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

**4)** $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

**5)** $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

**6)** $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

**7)** $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

**8)** $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

**9)** $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

**10)** $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

**11)** $f_n(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$ ב- $[0,1]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

**13)** נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

**14)** נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

**15)** נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר $\alpha$, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר $\alpha$, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של $\alpha$ ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טורי פונקציות

## שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

**2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

**4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad(-1\le x\le 1)$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\quad\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

**11)** $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\quad(-a\le x\le a)$

**12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x > 0$
2) $x \neq 5$
3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$
5) $x > 0$
6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טורי חזקות

## שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

**4)** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

**7)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

**13)** $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

**16)** $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

**19)** $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

**<u>הערות חשובות</u>**

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $(|x|<\frac{1}{4})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

## שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

**1)** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

**2)** $f(x)=\ln(1+x)$

**3)** $f(x)=\ln(1-x)$

**4)** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

**5)** $f(x)=\ln(5-x)$

**6)** $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

**7)** $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

**8)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

**9)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

**12)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

**13)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

**3)** $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

**5)** $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

**6)** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

**7)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

**8)** $\frac{20}{27}$

**9)** $\frac{2}{(1-x)^3}$ $|x|<1$

**10)** א. $|x|<1$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

**11)** א. $|x|<1$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

**12)** $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

**13)** $|x|\le 1$ $\arctan x$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 29 - טורי טיילור-מקלורן

### תוכן העניינים


1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 353
2. טור טיילור סביב X=X0 ..... 355
3. חישוב סכום של טור ..... 356
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן ..... 357
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ ..... 358
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים ..... 360
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' ..... 361
8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 367

# טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

**1)** $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

**4)** $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

**7)** $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

**10)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

**13)** $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

**16)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

**19)** $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

**22)** $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

**25)** $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טור טיילור סביב $x = x_0$

## שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

## תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

1) $e$ 2) $e^{-2}$ 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

**4)** נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר $k$ קבוע שונה מאפס.
מצאו את $n$ ואת $k$.

**5)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

**6)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

**7)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\dfrac{1}{120}$

**2)** $\dfrac{1}{3}$

**3)** $\dfrac{1}{3}$

**4)** $k=1, n=3$

**5)** $1$

**6)** $216$

**7)** $-\dfrac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

**1)** $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

**4)** $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

**7)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

**8)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

**9)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

**10)** עבור אילו ערכי $x$, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

**11)** עבור אילו ערכי $x$, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

## שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

## תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

**1)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

**2)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

**3)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:

$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

**4)** רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

**5)** חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של $10^{-3}$.

**6)** חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

**7)** נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

**8)** נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

**9)** נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

**13)** תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים $M$, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

**15)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

**16)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** נניח ש- $f$ גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- $f''$ חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**18)** הוכיחו כי $e$ הוא מספר אי-רציונלי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

**2)** א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

**4)** נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

**5)** $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

**6)** א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

**7)** א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

**8)** א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

**9)** א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

**10)** א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

**11)** א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

## <u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** $n$ **ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-n}$.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן | תחום התכנסות |
|---|---|
| $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ | $-1<x\le 1$ |
| $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$ | $-1\le x\le 1$ |
| $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$ | $-1<x<1$ |
| $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ <br> $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$ | $-1\le x\le 1\ (m>0)$ <br> $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ <br> $-1<x<1\ (m\le -1)$ <br> $m\ne 0,1,2,3,\dots$ |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 30 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים


1. קווים ותחומים במישור ..... 368
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית ..... 372
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית) ..... 378
4. משטחים במרחב ..... 383
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית ..... (ללא ספר)
6. גופים במרחב ..... 385
7. קואורדינטות גליליות וכדוריות ..... 388
8. נספח – משטחים ממעלה שנייה ..... 392

# קווים ותחומים במישור

## שאלות

**1)** שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

**2)** שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,||\,y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,||\,x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

**3)** מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

**4)** בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x=4-\sqrt{1-y^2}\quad x\ge 3.5,$

**6)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\}$

ה. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\}$

**7)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

**8)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\le 0\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,0\le y+1\le\sqrt{1-x^2}\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

**10)** נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

**11)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\}$

**13)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 16\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ y\ge \frac{1}{4}x^2\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ \ x^2+y^2\ge 4\right\}$

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

## שאלות

**1)** עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\ \ y=t^2$ $\qquad t\ge 0$

ב. $x=\sin t,\ \ y=\cos^2 t$ $\qquad 0\le t\le \pi$

ג. $x=\cos t,\ \ y=4\sin t$ $\qquad \pi\le t\le 2\pi$

**2)** להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר $t$, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים $x$ ו- $y$ בלבד:

א. $x=t-4\ \ ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\ \ ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\ \ ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\ \ ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\ \ ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\ \ ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ ($k$ קבוע).

**3)** נתון המעגל $x^2+y^2=8$ .

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום $D$, המוגבל מעל הישר $AB$ ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום $E$, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- $y$ הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

**5)** נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

**6)** נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

**7)** נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה $C$ היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את $C$ בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$ למסילה $C$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2,\ -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

**2)** א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

**3)** א. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le\frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases}x(u,v)=u\cos v\\ y(u,v)=u\sin v\end{cases}\quad \sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

**4)** א. המעגל $x^2+y^2=25$ : מרכז : $(0,0)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=5u\cos v\\ y(u,v)=5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ : מרכז : $(8,4)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=8+5\cos t\\ y(t)=4+5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=8+5u\cos v\\ y(u,v)=4+5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

ב. מקרה 1: $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$,

מקרה 2 - $\begin{cases}x=8+5\cos t\\ y=4+5\sin t\end{cases},\ \pi\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le\sqrt{25-y^2}\right\}$

**5)** א. $\begin{cases}x(t)=2\cos t,\ y(t)=\sqrt{2}\sin t & 0\le t\le 2\pi\\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ y(t)=2\sin t & 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

ג. המסילה $DA$: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה $BC$: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה $AB$: $\arctan\left(\sqrt{2}\right)\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

המסילה $CD$: $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

$$D_1:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

ד.
$$D_4:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, שמאלית: $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $D_1:\begin{cases} x(u,v)=u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$ $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$

$D_2:\begin{cases} x(u,v)=-u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$ $0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$

**7)** א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ וענף שמאלי $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

ג. $C:\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ ד. 1

**8)** 8

**9)** $6\pi\sqrt{29}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

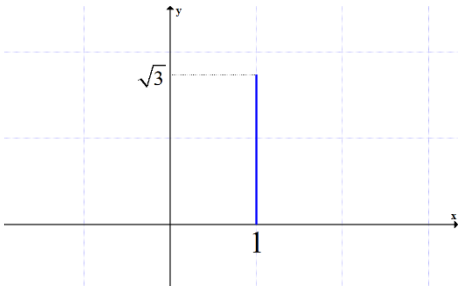
ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

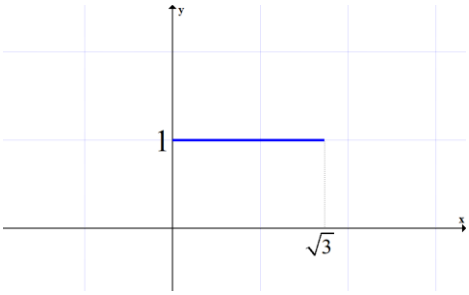

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א




איור ב




**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

**8)** בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

**9)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$

**11)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\}$

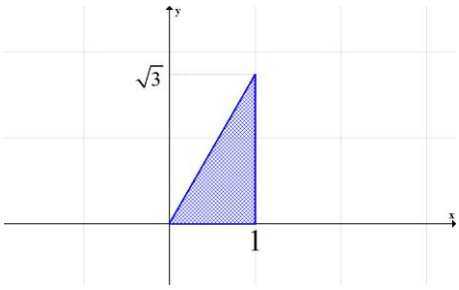
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

**12)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

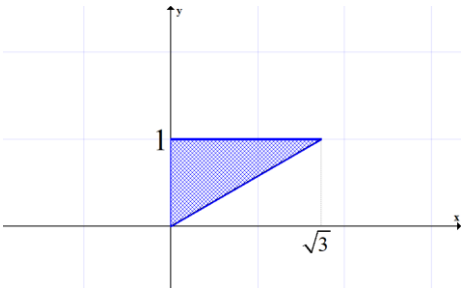
**13)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

**14)** להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

**איור א**




**איור ב**





כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ $r=\frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $r=\frac{1}{\sin\theta}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ $or$ $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $1\le r\le2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan2$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

12) $\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5$, $\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

**14)** א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משטחים במרחב

## שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

**2)** $z=5x^2+1.25y^2$

**3)** $20x^2+45y^2=180+36z^2$

**4)** זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

**5)** זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

**6)** מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**7)** נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

**8)** מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**9)** נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתונים שני משטחים: $Q: 2x^2-y^2+z^2=3,\ R: x^2-y^2+2z^2=3$.

א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.

ב. הראו כי החיתוך בין $R$ ו-$Q$ הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.

ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין $R$ ל-$Q$. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו-$B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C. כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה-$y$ למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

## תשובות סופיות

**1)** אליפסואיד.

**2)** פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

**3)** היפרבולואיד חד יריעתי.

**4)** א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

**5)** א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

**6)** החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

**7)** א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.

**8)** החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

**9)** א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-$y$.

ב. $\ell_2: (x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1: (x,y,z)=(3t,2t,1)$

**10)** א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0\quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גופים במרחב

## שאלות

**1)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

**2)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

**3)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

**5)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

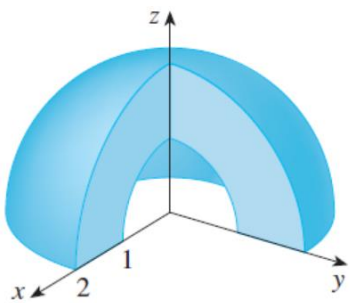
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

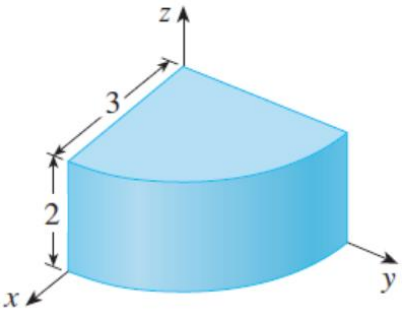
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

**6)** בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף $V$ במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

**א.**




**ב.**




**7)** נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V = \{(x, y, z) \mid ? \le z \le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

**9)** תחומים תלת-ממדיים $M$ ו- $N$ נתונים על ידי $\begin{matrix} M: \ x^2 - y^2 + 2z^2 \le 3 \\ N: 2x^2 - y^2 + z^2 \le 3 \end{matrix}$.

תחום תלת-ממדי $W$ הוא החיתוך בין $M$ ל- $N$.

שרטטו את $D$, החיתוך של $W$ עם המישור $y = 1$ (במערכת צירים $xz$),

וכתבו את $D$ בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קואורדינטות גליליות וכדוריות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

**2)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

**3)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

**5)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

**6)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

**8)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

**2)** א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

**3)** א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

**4)** א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה.מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

**5)** א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

**6)** א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

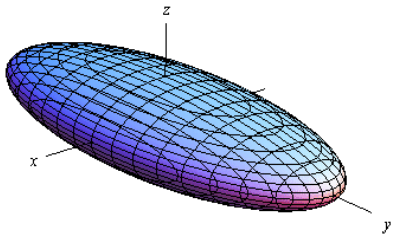
ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

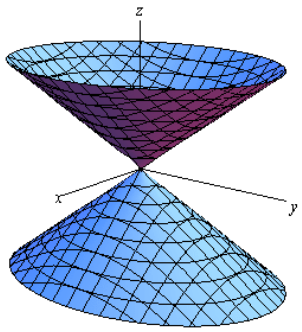
## אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## חרוט אליפטי

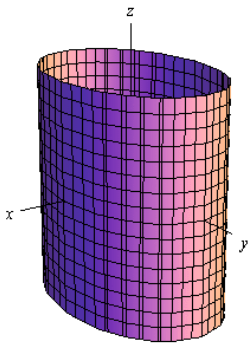



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## גליל אליפטי



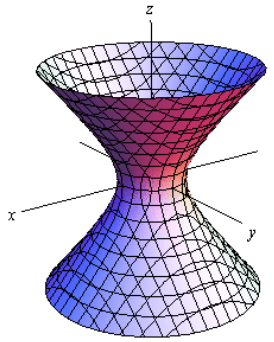

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## היפרבולואיד חד-יריעתי

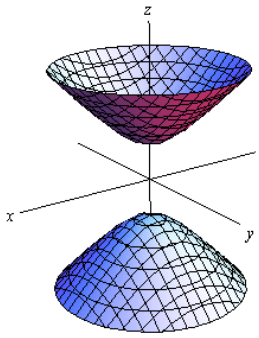



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## היפרבולואיד דו-יריעתי

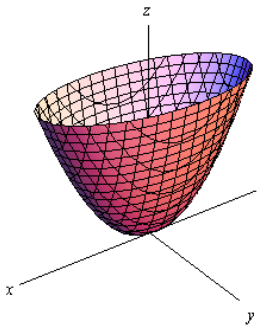



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## פרבולואיד אליפטי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

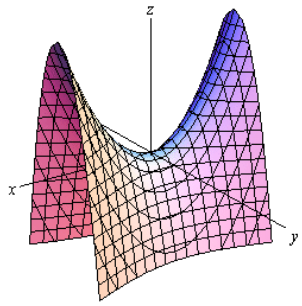
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פרבולואיד היפרבולי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

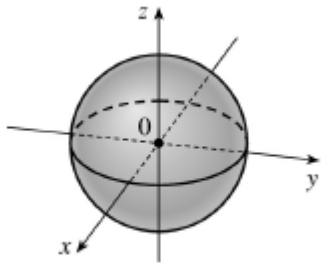
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.

החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

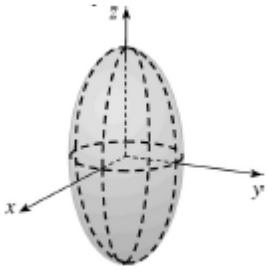
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

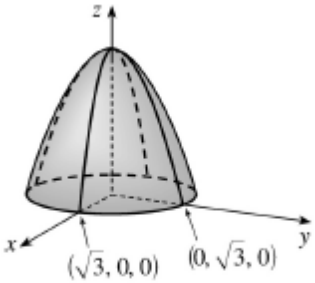
## דוגמאות שונות



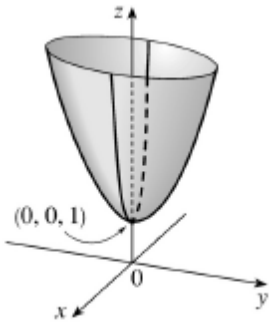

$x^2+y^2+z^2=1$



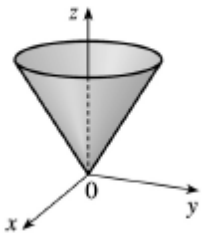

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



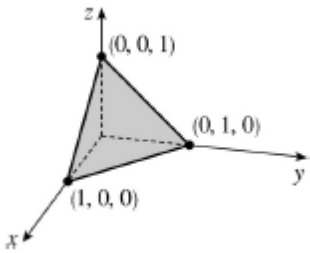

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 31 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים


1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 395
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 397
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים ..... 399
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה ..... 400

# מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

## תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\right\}$

8) $D=\left\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\right\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

11) $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4, y>1, z>0\right\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\left\{(x,y)\middle|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\right\}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

**1)** $f(x,y)=\frac{y}{x}$

**2)** $f(x,y)=\ln x+\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^2+y^2$

**4)** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

**5)** $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

**6)** $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

**7)** $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

**8)** $f(x,y)=e^{x-y}$

**9)** $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

**10)** $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה $k$:

**11)** $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

**12)** $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\} \quad (k=0,2)$

**13)** $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases} \quad (k=1)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$ .

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$ .

ב. לאילו ערכי $C$ קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

**הערות**

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

## תשובות סופיות

**1)** $x\neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .

**2)** $x>0, y>0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

**3)** כל המישור.

**4)** $x^2+y^2\le 1$ , עיגול היחידה.

**5)** $y<x^2$

**6)** $y\ge 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$ .
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$ .
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

**3)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

**4)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$ .
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$ .
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

**1)** חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

**2)** פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

**3)** א. מישורים.
ב. משטח רמה $k$ הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

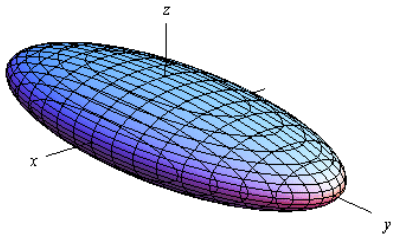
**4)** עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה $k$.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$.

**5)** עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

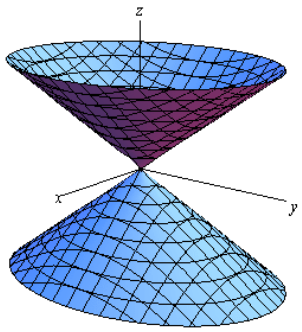
## אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## חרוט אליפטי

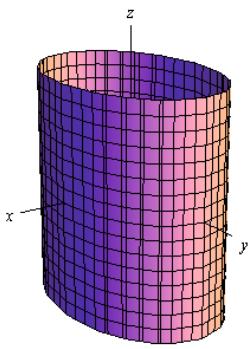



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## גליל אליפטי



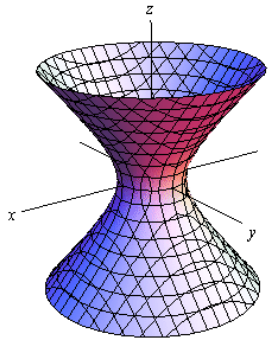

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## היפרבולואיד חד-יריעתי

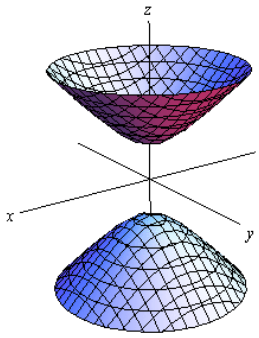



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## היפרבולואיד דו-יריעתי

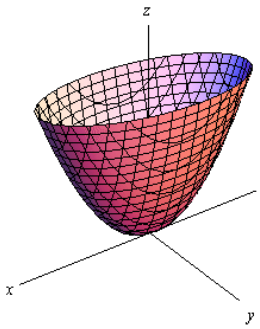



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## פרבולואיד אליפטי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

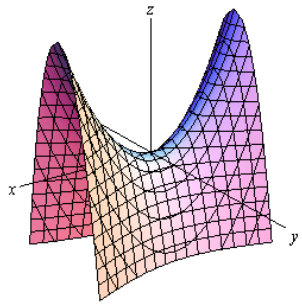
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פרבולואיד היפרבולי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

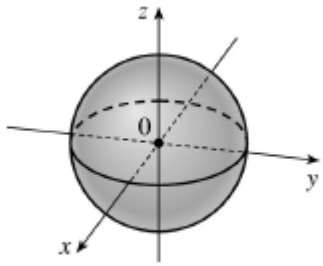
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.

החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

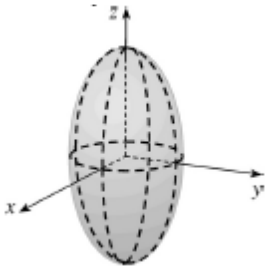
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

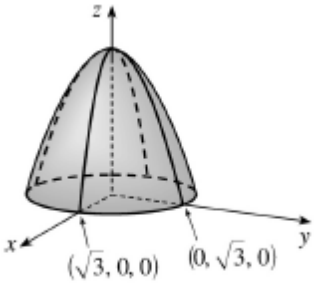
## דוגמאות שונות



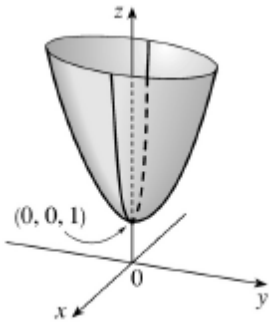

$x^2+y^2+z^2=1$



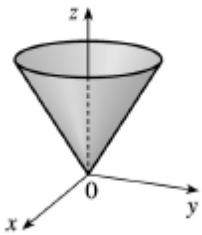

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



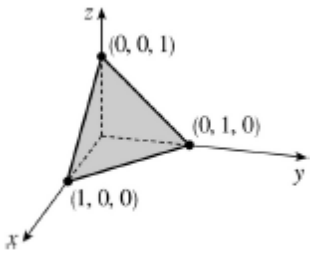

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 32 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים ..... 403
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים ..... 406
3. נוסחאות – גבולות ..... 409

# גבול של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

**1)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

**2)** $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

**3)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

**4)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$

**5)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

**6)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

**7)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

**8)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$

**9)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

**10)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

**11)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

**12)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

**13)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$

**14)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

**15)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

**16)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

**17)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

**18)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

**19)** $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

**20)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**21)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

**22)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

**23)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

**24)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

**25)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sin x+\cos y\right)=1$.

**28)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2 y=4$.

**29)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} 2x^2 y=8$.

## תשובות סופיות

**1)** 1

**2)** $\frac{1}{12}$

**3)** 1

**4)** 0

**5)** אינסוף.

**6)** $\frac{1}{2}$

**7)** 2

**8)** 5

**9)** 0

**10) – 17)** אין לפונקציה גבול.

**18)** 0

**19)** 0

**20)** 0

**21)** 0

**22)** 3

**23)** 0

**24)** 0

**25)** 0

**26)** א-ד. 0

**27)** שאלת הוכחה.

**28)** שאלת הוכחה.

**29)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# רציפות של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

**1)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

**4)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**5)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , כאשר $m$ קבוע.
עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה $g$ רציפה בנקודה $(0,0)$?

**8)** הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל $y$,

וגם $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל $x$,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)$.

**9)** פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\le \sin^2(x^4+y^4)$, לכל $(x,y)$.

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

**10)** מה צריך להיות הערך של הקבוע $k$ (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

**11)** נתון כי:

לכל $x$ מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $y$).

לכל $y$ מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $x$).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של $z$ קיימת נקודה $(c_1,c_2)$, כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – גבולות

| | $x \to -\infty$ | $x \to 0$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty} = 0$ | $\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$ |
| $y = e^x$ | $e^{-\infty} = 0$ | $e^0 = 1$ | $e^{\infty} = \infty$ |
| $y = \ln x$ | $---$ | $\ln(0^+) = -\infty$ | $\ln(\infty) = \infty$ |
| $y = \arctan x$ | $\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ | $\text{atan}(0) = 0$ | $\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ |
| $y = a^x, a > 1$ | $a^{-\infty} = 0$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = \infty$ |
| $y = a^x, 0 < a < 1$ | $a^{-\infty} = \infty$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = 0$ |
| $y = \sin x$ | $---$ | $\sin 0 = 0$ | $---$ |
| $y = \cos x$ | $---$ | $\cos 0 = 1$ | $---$ |
| $y = \frac{\sin x}{x}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $y = \frac{\tan x}{x}$ | $---$ | $1$ | $---$ |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | $e$ | (from right) $1$ | $e$ |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $---$ | $e$ | $1$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $---$ | $\sqrt{0^+} = 0$ | $\sqrt{\infty} = \infty$ |
| $y = \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ | $\sqrt[3]{0} = 0$ | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ |

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$ , $\infty(-\infty) = -\infty$ , $\infty + \infty = \infty$ , $\infty \pm a = \infty$ , $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$ , $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 33 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון ..... 410
2. נגזרות חלקיות מסדר שני ..... 412
3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה ..... 416
4. דיפרנציאבילות ..... 418

# נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

**1)** $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

**2)** $f(x,y)=x^5\ln y$

**3)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק $f_x$).

**4)** $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

**6)** $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

**7)** $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

**8)** $f(r,\theta)=r\cos\theta$

**9)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$

**10)** $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

**11)** נתון $z\left(x,y\right)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

**12)** נתון $f\left(x,y,z\right)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

### הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

### הערת סימון

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות מסדר שני

## שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

**2)** $f(x,y)=x^4\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

**4)** $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

**5)** $f(x,y)=xy(x-y)$

**6)** $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

**8)** $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

**9)** $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

**10)** $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

**11)** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

**12)** $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

**13)** $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

**14)** $f(x,y,z)=xyz$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$ .

**16)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ .

**17)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**18)** נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$ .

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

**הערת סימון**

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

**2)** $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

**3)** $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

**4)** $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

**5)** $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

**6)** $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$ $\quad f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$

$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

**7)** $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

**8)** $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$, f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

**9)** $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** $f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$

$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$

**11)** $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

**12)** $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

**13)** $f_x=10\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$

$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$

$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$

**14)** $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$

$f_y=xz$ $\quad f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$

$f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$ $\quad f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

**15)** $-2$

**16)** $-1$

**17)** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

**18)** $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

**2)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**3)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$ .

**הערה**

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאבילות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

## תשובות סופיות

1) א. $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$ .

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$ , $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$

5) א. $f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ב. לא רציפות.

6) א. $f_{xy}(0,0)=-1 \neq f_{yx}(0,0)=1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# דיפרנציאביליות

## שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

**1)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)** $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**4)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**5)** בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

**8)** תהי $f$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- $\phi$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

**9)** בדקו דיפרנציאביליות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ ,

בנקודה $(0,0,0)$.

**10)** נתונה $f:R^n\to R$ , המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם $f$ דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל $m$ ג. $m<0.5$
8) שאלת הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 34 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 421

# כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

## שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$ , $x=2u-v,\ y=u^2+v^2$.
חשבו: $z_u,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$ , $u=t^2+4m$, $v=4t+k$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

**10)** נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

**11)** נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

**12)** נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

**13)** נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

**14)** נתון: $u = f(x,y)$ , $x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$ , $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_y=-v_x$ , $u_x=v_y$.

הוכיחו כי:

א. $u,v$ מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)\left(h_{uu}+h_{vv}\right)$

**16)** נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

**17)** פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר $n$, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם $f$ הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

**18)** נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2 + \frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1, \quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4, \quad z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4,$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. $0$ ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 35 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

### תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט ..... 425

# נגזרת מכוונת וגרדיאנט

## שאלות

**1)** תהי $f(x,y)=x^2+y^2$ .

א. חשבו את הגרדיאנט של $f$ ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של $f$ , העובר דרך $(3,4)$ .

**2)** תהי $f(x,y)=3x^2y$ .
חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$ , בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ .

**3)** תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$ .
חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

**4)** תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ .
חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$ , בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של $45^\circ$ עם החלק החיובי של ציר ה- $x$ .

**5)** תהי $f(x,y)=xy^2$ .
חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$ .

**6)** תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$ .
חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ , בנקודה $(2,1,4)$ ,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$ .

**7)** אם הפוטנציאל החשמלי $V$ בנקודה $(x,y)$ , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$ .

**8)** מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ , בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

**10)** אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$ , ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

**11)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$ .

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $y$ .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$ .
מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $z$ .
הניחו שהזווית עם ציר ה- $y$ חדה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$ .

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $Q$, בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$ .

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$ ?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f$ בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

**15)** הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה $(x,y,z)$.

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות $(x,y,z)$, בהן הטמפרטורה שווה $20°$,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

**16)** גֶבֶה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֶבֶה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֶבֶה.

**17)** תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל $x$.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של $f$ בנקודה $(1,1)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית $\alpha$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

ד. באיזה כיוון $\alpha$, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית? מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

**20)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של $m$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

**הערות סימון**

**1)** במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$ , $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$ , $\mathbf{j}=(0,1,0)$ , $\mathbf{i}=(1,0,0)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

**2)** יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

**3)** וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 36 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני ..... 430
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי ..... 433
3. שימושים גאומטריים ..... 440

# פונקציות סתומות – הפן הטכני

## שאלות

**1)** מצאו את $y'$ , כאשר $x^2+y^5=xy+1$ ,
וחשבו את $y'(0)$ .

**2)** מצאו את $y'(1)$ , כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$ .

**3)** מצאו את $y'(e)$ , $y''(e)$ , כאשר $2\ln x+\ln y=1$ .

**4)** נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$ .
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ .

**5)** נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$ .
חשבו את $y_z(0,0)$, $y_x(0,0)$ .

**6)** נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$ .
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$ .

**7)** נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$ .
מצאו $z_{xx}(1,1)$ .

**8)** נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$ . מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את $u_x, v_x, u_y, v_y$.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

**10)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את $w_x,\ w_y$.

ב. חשבו $y_x,\ y_w$.

**11)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

**12)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$ $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1},u_y=\frac{4v+2}{8uv-1},v_x=\frac{3-2u}{8uv-1},v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)\ (u\neq v)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}\ (u\neq\pm v)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציות סתומות – הפן התאורטי

## שאלות

**1)** נתונה המשוואה $y^5+y^3+y=x^2-1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל $x$ ממשי.

**2)** נתונה המשוואה $x^2+y+e^y=17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x=4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל $x$ ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

**3)** נתונה המשוואה $y^3-x^3-3y^2+6x^2+3y-12x+7=0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את $y$ כפונקציה של $x$ בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

**4)** לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x,y)$ מתאימה, ובדקו האם קיימת נקודה $(x_0,y_0)$, כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס.
בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2+y^2+4=0$

ב. $xy-40x=100$

ג. $x^2-y^2=3$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה המשוואה $2x^3+y^3-6xy=0$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את $y'$ עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה $y$ הוא פונקציה של $x$.

**6)** נתונה המשוואה הבאה: $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את $y''$ עבור נקודות אלה.

**7)** נתונה המשוואה $x^2+y^2=R^2$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה $y=f(x)$.
עשו זאת בשתי דרכים:

1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

**8)** נתונה המשוואה $ax^4+y^4-xy=0$, כאשר $a$ קבוע ממשי.
ידוע שהנקודה $(x_0,0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

א. מצאו את $x_0$ ואת הקבוע $a$.

ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.

ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה $y$ הוא פונקציה של $x$.

ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את $y$ כפונקציה של $x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את $y'$ עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה $y$ הוא פונקציה של $x$.

ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

**10)** נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.

א. בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה $(e,e)$.

ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?

ג. האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

ד. מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.

ה. חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.

ו. השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.

ז. חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

**11)** נתונה המשוואה $y^3 + 6x\sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0,-2)$.

א. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.

ב. פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.

ב. נתונה המשוואה $x = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0,1)$, שבה המשוואה מגדירה את $x$ כפונקציה של $y$, $x = g(y)$.

ג. חשבו את $g'(1)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את $x$ כפונקציה של $y$, $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

**14)** בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

**15)** נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.
בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

**16)** נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.
מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x,z)$, ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

**17)** נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = u + v, \quad 2)\ y = u^2 + v^2, \quad 3)\ w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$, בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את $w_x, w_y$.

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x,y)$?
במידה שכן, חשבו בנקודה את $w_x, w_y$.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = a\cos\phi\cos\theta,\quad 2)\ y = b\sin\phi\cos\theta,\quad 3)\ z = c\sin\theta\quad (a,b,c>0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x,y)$,

בנקודה $P_0$, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את $\phi_x, \phi_y$.

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

בנקודה $P_0$, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את $z_\phi, z_x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$ ג. כן. ד. הוכחה.

**2)** א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

**3)** א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

**4)** א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.

**5)** א. כל נקודה $(x,y)$ שעל המשוואה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ (2,2)$.

ב. $y'=-\frac{2x^2-2y}{y^2-2x}$ ג. כלום! ד. לא.

**6)** א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ \left(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a\right)$.

ב. $$y''=-\frac{\left[2x-a\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)\right](y^2-ax)-\left[2y\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)-a\right](x^2-ay)}{\left(y^2-ax\right)^2}$$

**7)** א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0),\ (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.

**8)** א. $x_0=\frac{1}{2},\ a=3$ ב. כן, $(0,0),(-0.5,-0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.

**9)** א. כל נקודה $(x,y)$ שעל $xy=\ln y-\ln x+1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.

ב. $y'=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד+ה. לא קיימת.

**10)** א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא.
ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.

ה. $y'(x)=\frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $\left(x>0,y>0,(x,y)\neq(1,1)\right)$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin 2\cdot x+\frac{1}{8}\sin 2(\sin 2-2\cos 2)x^2$

**12)** א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1)=-2$

**13)** א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**14)** א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.

**15)** א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.

**16)** הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_z(0,0,0.5\pi)=0$ , $y_x(0,0,0.5\pi)=-1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** א. $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0$ , $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1)=\frac{3}{2}$

ב. לא מתקיימים.

ג. $w_x(2,2)=-3$ , $w_y(2,2)=3$

ד. $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid y>\frac{1}{2}x^2\right\}$

**18)** א. $\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{1}{b}$ , $\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{b}{a\sqrt{3}}$

ב. $\frac{\partial z}{\partial \phi}=-c\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2c}{a}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים גאומטריים

## שאלות

**1)** נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$ ?

**2)** מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

**3)** מצאו מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

**4)** למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים $x,y,z$ בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכיחו $OA+OB+OC=a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

**5)** נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.

**6)** הראו שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

**7)** מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,

ונתונה נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.

הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$C:\ x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,

בנקודה בה $t=0.25\pi$.

**9)** נתונות שתי עקומות

$$C_1: x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח $S$, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור $xy$.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

**10)** נתונות שלוש עקומות

$$C_1: x=2t+1, \quad y=t^2-1, \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2, \quad y=-s, \quad z=s-1$$
$$C_3: x=u+2, \quad y=u, \quad z=u^2-1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח $S$, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור $xy$.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח $S$? נמקו!

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ P+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(P)\times\overrightarrow{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

**13)** נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

**14)** מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $3x-6y+2z+18=0$

2) $x-y+z+6=0$ , $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$

3) $x+8y+18z=21$ , $x+8y+18z=-21$

4) שאלת הוכחה.

5) $Q(7,-9,-15)$

6) שאלת הוכחה.

7) $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$

8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$

9) א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$

10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$ . ב. לא.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$

12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$

13) כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$

14) $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ , כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,
שנוסחתו : $x^2+y^2+z^2=1$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 37 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים ..... 444
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי ..... 446

# נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות **1-4** לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה $(a,b)$ :

**1)** $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\quad (a,b)=(1,2)$

**2)** $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\quad (a,b)=(0,0)$

**3)** $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\quad (a,b)=(0,0)$

**4)** $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\quad (a,b)=(2,1)$

**5)** בעזרת התוצאה של שאלה **2**, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

**6)** בעזרת התוצאה של שאלה **3**, חשבו בקירוב את $e^3$.

**7)** בעזרת התוצאה של שאלה **4**, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

3) $f(x,y)=1+4y-x^2+7y^2$

4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

5) $\frac{3}{8}$

6) $19$

7) $\frac{101}{81}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

## שאלות

**1)** חשבו בקירוב: $\ln\left(0.01^2+0.99^2\right)$.

**2)** בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

**3)** נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על $2\%$,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על $4\%$.
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

**4)** נתונות שתי צלעות במלבן $a=10\,\text{cm},\quad b=24\,\text{cm}$.
חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע $a$ יאריכו ב- $4\,\text{mm}$ ואת הצלע $b$ יקצרו ב- $1\,\text{mm}$.

**5)** נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה.
השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על $5\%$.
העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

## תשובות סופיות

**1)** $\cong -0.01$

**2)** $2\frac{7}{3200}$

**3)** $8\%$

**4)** שינוי מדויק: $0.06472$, שינוי מקורב: $0.06153$.

**5)** $5\%$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 38 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 447

# קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

**1)** $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

**2)** $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

**4)** $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

**5)** $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

**6)** $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

**7)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

**8)** $f(x,y)=e^x\cos y$

**9)** נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

**10)** מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

**11)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8.
מנהל השיווק אומד את הביקוש $Q_1$ למחשבון בארץ, ואת הביקוש $Q_2$ למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, $P_1$ ו- $P_2$, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

**13)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של $a$ הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

**14)** מצאו שני מספרים, $b>a$, כך ש- $\int_a^b \left(24-2x-x^2\right)^{\frac{1}{5}}dx$ יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות

**1)** $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

**2)** $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

**3)** $(0,0)$ אוכף; $(1,1)$ מינימום.

**4)** $(-1,\ 1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ -1)$, $(1,1)$, $(1,\ -1)$, $(-1,\ 0)$ אוכף.

**5)** $(0,\ 2)$ מקסימום.

**6)** $(4,\ 4)$ מקסימום.

**7)** $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

**8)** אין נקודות קריטיות.

**9)** $z=4,\quad z=3$

**10)** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

**11)** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3,4/3,10/3)$.

**12)** $P_1=10\$,\quad P_2=12\$$ רווח מקסימלי $288\$$.

**13)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2,\ a=2$, לא ניתן לדעת; $a>2,\ a<-2$ אוכף; $-2<a<2$ מינימום.

**14)** $a=-6,\ b=4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 39 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים..... 449

# קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

## שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **1-5**:

**1)** $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

**2)** $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

**3)** $z^3+z+xy-2x-y+2=0 \quad (z=f(x,y))$

**4)** $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

**5)** $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} \quad (x,y,z>0)$

**6)** מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **7-11** נתונות $n$ נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

**7)** $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

**8)** $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

**9)** $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

**10)** $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** $h(x)=ax^2+bx+c$ , הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$ .

**12)** נתונות $n$ נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ .
מצאו ישר $y=ax+b$ , כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור $a$ ו- $b$ .

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- $a$ ו- $b$ , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$ , נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$ .

## תשובות סופיות

**1)** $(t,t)$ לכל $t$ ממשי, מקסימום.

**2)** $(0,0)$ מקסימום.

**3)** אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

**4)** אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

**5)** $(0.5,1,1)$ מינימום.

**6)** $0.375$

**7)** $y=0.88x+0.3$

**8)** $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

**9)** $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

**10)** $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

**11)** $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

**12)** $$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\quad,\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 40 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ..... 451

# קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

## שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

**1)** $f(x,y)=x^2+y^2;\quad 2x^2+3xy=1-2y^2$

**2)** $f(x,y)=x^2-y^2;\quad x^2+y^2=1$

**3)** $f(x,y)=4x+6y;\quad x^2+y^2=13$

**4)** $f(x,y)=x^2y;\quad x^2+2y^2=6$

**5)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\}\quad s.t.\quad x+3y=12$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**6)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\}\quad s.t.\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**7)** מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

**8)** מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

**9)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0)$ מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** מוישל'ה קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, $(x,y)$, נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

**11)** דני קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

**12)** עקומת התמורה בין מנגו, $(x)$, ואננס, $(y)$, היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = $(x,y)$, על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

**13)** ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת $K$ ו- $L$ הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $(K^*,L^*)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

**14)** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $(x^*,y^*)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' $\lambda$ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

2) $\max\left(\pm1,0\right)$ $\min\left(0,\pm1\right)$

3) $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

4) $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

5) $\max\left(6,2\right)$

6) $\max\left(9,36\right)$

7) $\left(6,2\right)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max\left(6,2\right)$

12) $\max\left(2,3\right)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\left\{2K+L\right\}$

14) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 41 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים ..... 454

# קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

## שאלות

**1)** מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

**2)** מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

**4)** מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

**5)** מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

**6)** מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

**7)** מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

**הערה חשובה**

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס״מ, אורך 4 ס״מ, גובה 2 ס״מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3})$.

4) $(0,0,1)$ , $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 42 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 456

# קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

## שאלות

1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

## תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 43 - אינטגרלים כפולים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים ..... 457
2. החלפת סדר אינטגרציה ..... 460

# אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-3** :

**1)** $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

**2)** $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

**3)** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ , הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

**4)** $D$ – משולש בעל הקודקודים : $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$ .

**5)** $D$ – משולש בעל הקודקודים : $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$ .

**6)** $D$ – טרפז בעל הקודקודים : $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$ .

**7)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le 1$ .

**8)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le y$ .

**9)** $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

**10)** $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**11)** $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

**12)** $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

**13)** $\iint\limits_D |xy|dxdy$, כאשר $D$ עיגול בעל הרדיוס $a$, שמרכזו בראשית.

**14)** $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$.

**15)** $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר $D$ התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# החלפת סדר אינטגרציה

## שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

**1)** $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

**2)** $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

**3)** $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

**4)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

**5)** $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

**6)** $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

**7)** $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

**8)** $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

**9)** $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$

**10)** $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

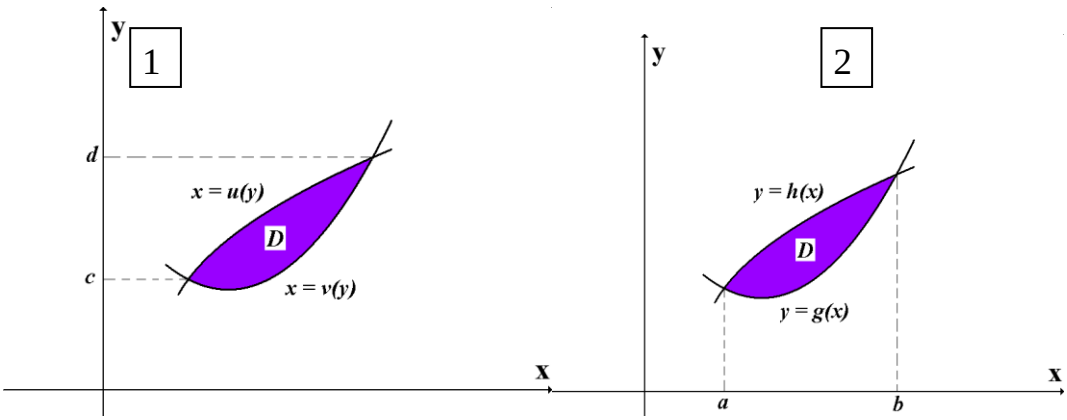
## הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 44 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול..... 463

# שימושי האינטגרל הכפול

## שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

**1)** $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

**2)** $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

**3)** $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

**4)** $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

**5)** $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

**6)** $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

**7)** $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

**8)** $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

**9)** $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

**10)** $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$ .

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

**12)** ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- $z$ .
בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, $M$ .

**13)** מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$ , הנמצא מעל למלבן $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$ , שבמישור $xy$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) $32$

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) $36$

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 45 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק ..... 466
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות ..... 468

# מבוא מתמטי לפרק

## שאלות

**1)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

**2)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$

**3)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

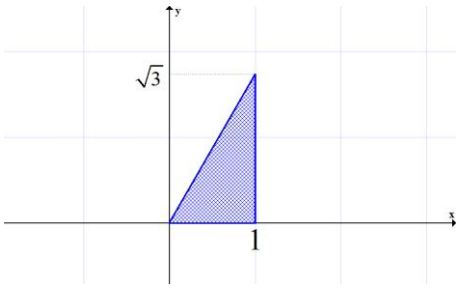
**4)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le \sqrt{25-x^2}\right\}$.

**5)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le \sqrt{8x-x^2}\right\}$.

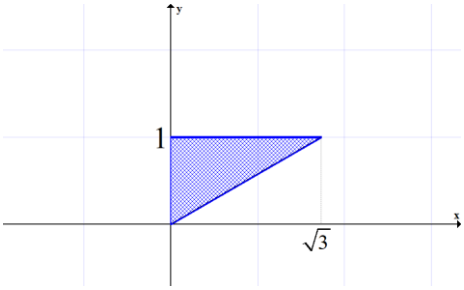

כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

**איור א**




**איור ב**




## תשובות סופיות

**1)** א. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le \pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0.5\pi\le\theta\le 1.5\pi\end{cases}$

**2)** א. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ *or* $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 1.5\pi\le\theta\le 2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le \pi\end{cases}$

**3)** א. $1\le r\le 2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan 2$ ב. $0\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le 1.25\pi$

**4)** $\dfrac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le 5$, $\arctan\dfrac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi$

**5)** $0\le r\le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

**6)** א. $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$ $0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ $0\le r\le\dfrac{1}{\sin\theta}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

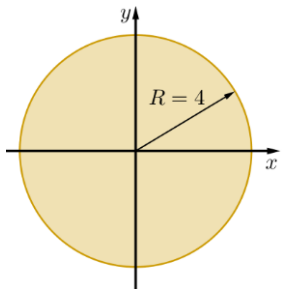
# אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

## שאלות

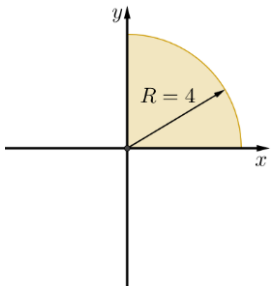
**1)** חשבו $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$ , כאשר $D$ התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

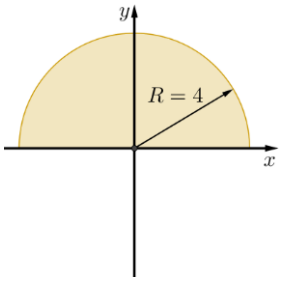
א.



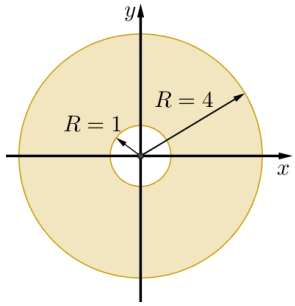

ב.



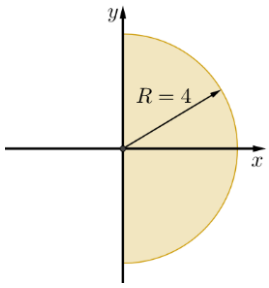

ג.



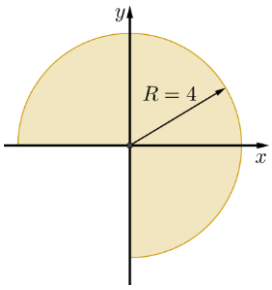

ד.



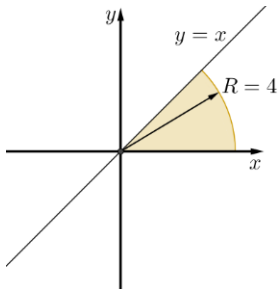

ה.



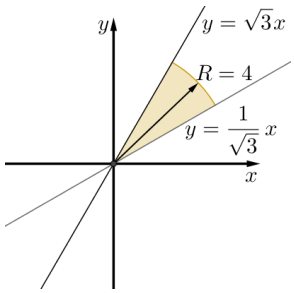

ו.



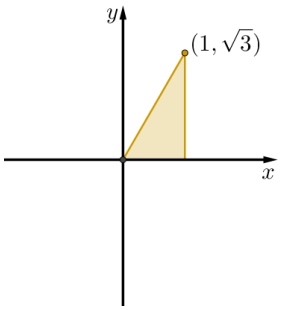

ז.




ח.




ט.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

**2)** $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

**3)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

**4)** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**5)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**6)** $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

**7)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**8)** $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

**9)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

**10)** $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

**11)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

**12)** $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

**13)** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

**14)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

**15)** $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

**16)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

**17)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

**18)** הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

**19)** הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור $xy$ מלמטה.

**20)** הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור $xy$ מלמטה.

**21)** חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. $42\pi$ ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. $32\pi$ ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\pi$ 4) $\frac{\pi}{8}$ 5) $\frac{\pi}{2}$

6) $\pi a^2$ 7) $2\pi$ 8) $36$ 9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi \ln\frac{e}{2}$ 11) $\pi(4-\pi)$ 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$ 15) $-\frac{4}{5}$ 16) $\pi\ln\frac{4}{e}$ 17) $\pi$

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 46 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול ..... 471

# החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

## שאלות

1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר $R$ הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x$, $y=x-1$, $y=1-x$, $y=3-x$.

2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{xy}dA$, כאשר $R$ הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=0.5x$, $y=x$.

3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר $R$ הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(1,1)$.

4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R (4x+8y)dA$, כאשר $R$ הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(1,-3)$, $\mathrm{C}(3,-1)$, $\mathrm{D}(1,5)$.

5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר $R$ הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R y^2dA$, כאשר $R$ הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2$, $xy^2=1$, $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$.

7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) $192$

5) $96\pi$

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 47 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם ..... 473

# אינטגרלים משולשים ושימושיהם

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

**1)** $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\,dy\,dx\,dz$

**2)** $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dx\,dz\,dy$

**3)** $\iiint_B xyz^2\,dV$ , $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}$

**4)** $\iiint_B 6xy\,dV$ , $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\,,\,0\le y\le \sqrt{x}\,,0\le z\le 1+x+y\right\}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

**5)** $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

**6)** $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$

**7)** $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

**8)** $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

**9)** $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

**10)** $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

**11)** $(x\geq 0)\quad z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

**12)** $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

**13)** $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

**14)** $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

**15)** חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו $h$ ורדיוס הבסיס שלו $r$.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

**16)** חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- $z$.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, $M$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) $4$

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) $36$

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\ \ M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 48 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות..... 476

# אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

## שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

**1)** $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2\,dzdydx$

**2)** $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$

**3)** $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

**4)** $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

**5)** גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור $xy$ מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

**6)** חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

**7)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

**8)** מצאו את הנפח של התחום מעל המישור $xy$, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

**9)** חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

**11)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**12)** חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**13)** הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**14)** חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

**15)** ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:
א. $V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta$

ב. $V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

ב. $$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4$

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$ ג. $V=\int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 49 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים..... 480

# החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

## שאלות

1) חשבו את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xydV$ , כאשר $G$ הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$ .

2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .

3) חשבו את $\iiint\limits_G x^2dV$ , כאשר $G$ הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .

4) חשבו את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=4z^2,\quad y=z^2,\quad y=4x-12,\quad y=4x,\quad y=2z,\quad y=z$ .

5) חשבו את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}dV$ , כאשר $G$ הוא כדור
שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1 .

## תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) $\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 50 - העתקות ליניאריות

### תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות ..... 481
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות ..... 483
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם ..... 486
4. פעולות עם העתקות ליניאריות ..... 490

# העתקות לינאריות

## שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

**1)** $T(x,y)=(x+y,x-y)\ ;\quad T:R^2\to R^2$

**2)** $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

**3)** $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\ ;\quad T:R^3\to R^2$

**4)** $T(x,y)=(xy,y,z)\ ;\quad T:R^2\to R^3$

**5)** $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

**6)** $T:M_n[R]\to M_n[R]\ ;\quad T(A)=BA+AB\quad (B\in M_n[R])$

**7)** $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=A+A^T\ ;$

**8)** $T:M_n[R]\to M_n[R]\ ;\quad T(A)=|A|\cdot I$

**9)** $T:M_n[R]\to M_n[R]\ ;\quad T(A)=A\cdot A^T$

**10)** $T:M_n[R]\to M_n[R]\ ;\quad T(A)=A^{-1}$

**11)** $T:P_3[R]\to P_2[R]\ ;\quad T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

**12)** $T:P_n[R]\to P_n[R]\ ;\quad T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

**13)** $T:P_n[R]\to P_n[R]\ ;\quad T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

**14)** $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]\ ;\quad T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

**15)** $T:C[F]\to C[F]\ ;\quad T(z)=\bar{z}\quad (F=C,F=R)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** עבור איזה ערך של הקבוע $m$ (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2\to R^2$ ; $T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$ ?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

**18)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$ , $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

**19)** $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$, $T(-1,0,1,1)=(1,0,0)$, $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1)$.

**20)** $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1-x)=x^2+1$, $T\left(4x+x^2\right)=x$, $T(1)=4$.

**21)** נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

**22)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1)** כן | **2)** כן | **3)** לא | **4)** לא | **5)** לא |
| **6)** כן | **7)** כן | **8)** לא | **9)** לא | **10)** לא |
| **11)** כן | **12)** כן | **13)** כן | **14)** לא | **15)** לא |
| **16)** כן | **17)** כן | **18)** כן | **19)** כן | **20)** כן |

**21)** שאלת הוכחה. **22)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

**1)** $T:R^4\to R^3$ , $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$

**2)** $T:R^3\to R^4$ , $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$

**3)** $T:R^4\to R^3$ , $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

**4)** $T:M_2[R]\to M_2[R]$ , $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$

**5)** $T:P_2[R]\to P_2[R]$ , $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

**6)** $D:P_3[R]\to P_3[R]$ , $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

**7)** מצאו העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

**8)** מצאו העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$.

**9)** הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של $V$ זוגי.

**10)** הוכיחו או הפריכו:

א. קימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה לינארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim(W)=4$ , $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של $V$?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$.

ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$ , $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$ , מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq\operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

**13)** מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$ ; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$ ; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}(T)=(\operatorname{Ker}(S))^{\perp}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס : $\{(0,0,1,4)\}$, מימד : 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד : 3.

2) גרעין – בסיס : $\{(0,0,0)\}$, מימד : 0.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד : 3.

3) גרעין – בסיס : $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד : 2.

4) גרעין – בסיס : $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד : 2.

5) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד : 2.

6) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=x^2, \qquad p(x)=x, \qquad p(x)=1\}$, מימד : 3.

7) $$T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) שאלת הוכחה.

10) לא.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

## שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא חח"ע,[1] האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

**1)** $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

**2)** $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

**3)** $T:P_2[R]\to R^3 \quad , \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

**4)** $T:M_2[R]\to P_3[R] \quad , \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

**5)** האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

**6)** נתונה העתקה לינארית $T:U\to V$.
הוכיחו:
א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז $T$ לא על.
ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז $T$ לא חח"ע.
ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז $T$ חח"ע $\Leftrightarrow$ $T$ על.

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה $T$ אינה על.
ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו- $\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.
ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו- $\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.
ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$ ; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של $V$.

הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו $T$ חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

**9)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.

$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- $V$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$, אז $T$ חח"ע.

**10)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז $T$ חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v$, אז למטריצה $A$ יש $n$ שורות ו- $m$ עמודות.

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם $T$ חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. $T$ היא איזומורפיזם.

ד. $T$ היא העתקת האפס.

**12)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,

כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n \to R^n$, ונתונה מטריצה $A$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v \in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{rank}(A) \le \frac{n}{2}$.

**14)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R] \to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R] \to R$.

**15)** נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R] \to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של $T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$ , $\operatorname{Im}(T)=M_n[R]$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פעולות עם העתקות לינאריות

## שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$ , $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

**1)** $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** $TS$ **5)** $ST$

**6)** $T^2$ **7)** $T^{-1}$ **8)** $T^{-2}$ **9)** $S^2$

## תשובות סופיות

**1)** לא ניתן להגדיר.

**2)** $4S=4(x-z,y)$

**3)** לא ניתן להגדיר.

**4)** לא ניתן להגדיר.

**5)** $ST:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

**6)** $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

**7)** $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

**8)** $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

**9)** לא ניתן להגדיר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 51 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים ..... 491
2. פתרון משוואות ..... 492

# חילוק פולינומים:

## סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)}|q(x)$ ) יש לבצע 4 שלבים:

1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב-$q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

## שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$
2) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$
3) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$
4) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$
5) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$
6) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$
7) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$
8) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

## תשובות סופיות:

1) $x-7$
2) $x^2+2x+5$
3) $x^3-2x^2+5x-1$
4) $x^2-x-3$
5) $x^2-4$
6) $x^2+1$
7) $4x^2+10x+1$
8) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

# פתרון משוואות:

## סיכום כללי:

### משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה $n$ יש בדיוק $n$ שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים.
  אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי $a_0$.
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב-$x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$
2) $k^3+2k^2-3k+20=0$
3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$
4) $k^3-6k^2+12k-8=0$
5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$
6) $k^3-k^2+k-1=0$
7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

## תשובות סופיות:

1) $k_1=1\ ,\ k_2=-2\ ,\ k_3=3\ ,\ k_4=-5$
2) $k_1=-4\ ,\ k_{2,3}=1\pm 2i$
3) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=-1\ ,\ k_4=-1\ ,\ k_5=-1$
4) $k_1=2\ ,\ k_2=2\ ,\ k_3=2$
5) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=1\ ,\ k_4=-1,\ k_5=1,\ k_6=-1$
6) $k_1=1\ ,\ k_{2,3}=\pm i$
7) $k_1=1\ ,\ k_2=2\ ,\ k_{3,4}=\pm 2i$

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 52 - האלגוריתם של אוקלידס

תוכן העניינים

1. האלגוריתם של אוקלידס ..... (ללא ספר)

# אינפי 2 למדעי המחשב

## פרק 53 - מטריצות והעתקות לינאריות

### תוכן העניינים

1. מטריצה שמייצגת העתקה..... 493
2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס..... 499
3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה..... 502

# מטריצה שמייצגת העתקה

**הערה**:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

## שאלות

**1)** נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_2$ לבסיס $B_1$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**2)** נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ , $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B_1$.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$
2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$
3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**3)** נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

**4)** יהיו $B_1$ ו- $B_2$ שני בסיסים של המרחב $R^3$, ויהי $T$ אופרטור לינארי על $R^3$.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.

חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$T:M_2[R]\to M_2[R] \quad , \quad T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}A,$$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

**6)** מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**9)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\left\{1,1-x,x+x^2\right\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$.

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T\left(p(x)\right)$.
* פתרו בשתי דרכים שונות.
ב. מצאו את $T^2\left(p(x)\right)$.

**10)** תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי $A$ מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי $B$ בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$\operatorname{rank}(A)=n$.
הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**12)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.
ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**13)** נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$ ; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכיחו ש- $T$ העתקה נילפוטנטית.

**14)** יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית
$T:V\to V$ ; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.
ב. מצאו בסיס וממד עבור $\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונות שתי העתקות לינאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- $V$.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$ , $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכיחו כי: $\mathrm{Ker}(S)=\{0\}$, $\mathrm{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את $V$.

ד. קבעו האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את $V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ה. שאלת הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד; הו"ע שלו: $(1,-1,1)$. ז. לא.

3) $T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}$

5) $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6) $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

8) $T: P_2[R] \to P_2[R]$ ; $T(p(x)) = p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) שאלת הוכחה.

11) א. $\mathrm{Im}(T) = sp\{1+x^2, x+x^3\}$ , $\mathrm{Ker}(T) = sp\{-x+x^3, -1+x^2\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $\mathrm{Im}(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ , $\mathrm{Ker}(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ב. $\mathrm{rank}(T) = 2$ , $\det(T) = 0$ , $\mathrm{tr}(T) = 15$

13) שאלת הוכחה.

14) א. $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$, $B_{\mathrm{Im}(T)} = \{1\}$,

$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$, $B_{\mathrm{Ker}(T)} = \{1, x^2\}$

15) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

## שאלות

**1)** מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $R^n$ :

א. $T:R^2\to R^3$ , $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4\to R^2$ , $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

**2)** נתונה העתקה לינארית $T:R^4\to R^2$ ; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של $R^4$ לבסיס הסטנדרטי של $R^2$ .

**3)** תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי:
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה $T$ מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של $R^3$ , לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של $R^2$ .
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

**4)** עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר: $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ , $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**5)** עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$ , $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$ .
מצאו את נוסחת ההעתקה.

**6)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T$, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

**9)** תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V)=n$,
ויהיו $B_1,B_2$ בסיסים סדורים של $V$. הוכיחו או הפריכו:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם $T$ העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם $T$ העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

**10)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\left(a+b,b+c,c\right)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשבו את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

**12)** חשבו את $ST$ ואת $TS$, עבור ההעתקות:

$$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$$
$$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix}25&0&-6\\-20&0&5\end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) שאלת הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d&-a+b+c-d\\b-d&d\end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

## שאלות

**1)** נתונה העתקה לינארית, $T:M_2[R]\to M_2[R]$ ; $T(X)=PX$,
כאשר $P$ מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- $W$ את קבוצת כל המטריצות $P$, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את $W$.
ב. הוכיחו כי $W$ היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

**2)** נתונה העתקה לינארית, $T:M_{10}[R]\to M_{10}[R]$ ; $T(X)=PX$,
כאשר $P$ מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי $A$ היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

**3)** מצאו העתקה לינארית $T$, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**5)** נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x,y,z)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T: M_2[R] \to M_2[R]$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

**7)** נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \to P_2[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right) = p(x+1)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

**8)** יהי $V$ מרחב וקטורי מממד $n$.

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכיחו ש- $T$ הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של $T$ שונים מאפס.

ב. הוכיחו כי אם $T$ הפיכה, אז ל- $T$ ול- $T^{-1}$ יש את אותם וקטורים עצמיים.

מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של $T$ ושל $T^{-1}$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \middle| \ \lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

2) $4^{10}=|P|$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R)$ $\quad T(X)=4X$

4) א. $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$ , $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$ , $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$ , ניתנת לליכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$ , וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$ , לא.

5) $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ , $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$ , $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z,y,2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

ב. $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ , $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ , $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$ , $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת לליכסון.

8) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©