אינפי ב

תוכן העניינים

אינפי ב

פרק 1 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

23) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

24) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

35) $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$
2) $\frac{20}{17}$
3) $n-1$
4) 4
5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$
7) $\frac{5}{6}$
8) $-\frac{3}{2}$
9) 1
10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$
12) $\frac{1}{6}$
13) $-\frac{1}{2}$
14) 2
15) 1
16) 1
17) $\frac{a}{b}$
18) $\frac{a}{b}$
19) $\frac{1}{6}$
20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$
22) $\frac{1}{8}$
23) $\frac{1}{3}$
24) $-\frac{1}{3}$
25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$
27) 1
28) 1
29) $\frac{2}{3}$
30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$
32) ∞
33) 0
34) ∞
35) 0

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty\cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^x$

2) $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

7) $\lim_{x\to 3^+}(x^2-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

תשובות סופיות

1) ∞
2) 0
3) 0
4) 0
5) 0
6) 0
7) 0
8) 6
9) $\frac{5}{2}$

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

תשובות סופיות

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: ∞^0 , $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$

חשבון את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim_{x\to0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim_{x\to2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim_{x\to0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim_{x\to0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim_{x\to0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim_{x\to0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim_{x\to0} (x+1)^{\cot x}$

12) $\lim_{x\to0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim_{x\to0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim_{x\to1^-} [\ln(1-\ln x)]^{x-1}$

תשובות סופיות

1) e
2) 1
3) 1
4) 1
5) e^2
6) 1
7) e^3
8) $e^{1/3}$
9) $e^{-1/2}$
10) 1
11) 1
12) e
13) 1
14) e
15) 0

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$

אינפי ב

פרק 2 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

   בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x(x-9)^2$

2) $f(x)=x^4-2x^3$

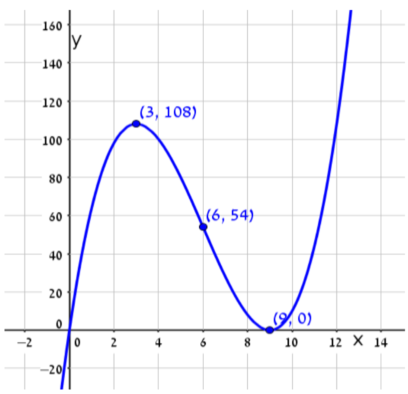
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-9.
נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.
תחום עלייה: $x<3 \quad or \quad x>9$, ירידה: $3<x<9$.
תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.
נקודת פיתול: $(6,54)$.

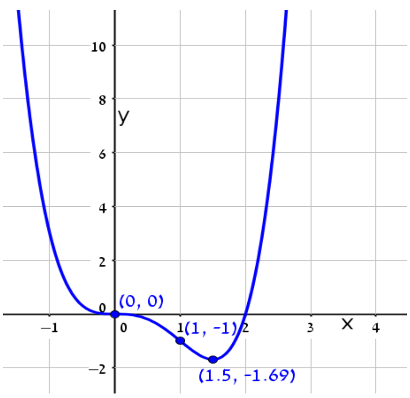
2) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-2.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.
תחום קמירות: $x<0 \quad or \quad x>1$, קעירות: $0<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0),\ (1,-1)$.

גרפים

1)



2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f\left(x\right)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f\left(x\right)=\frac{2x^2}{\left(x+1\right)^2}$

3) $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f\left(x\right)=\frac{x^3}{\left(x+1\right)^2}$

5) $f\left(x\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{\left(x-2\right)\left(x-5\right)}$

7) $f\left(x\right)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f\left(x\right)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<2$, ירידה: $x>2 \ \ or \ \ x<0$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $0<x<3 \ \ or \ \ x<0$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<\frac{1}{2}$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2, \ \ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עלייה: $x<-\sqrt{12} \ \ or \ \ x>\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x \neq \pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>2 \ \ or \ \ -2<x<0$, קעירות: $x<-2 \ \ or \ \ 0<x<2$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x<-3 \ or \ \ x>-1$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<0$.

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: -1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

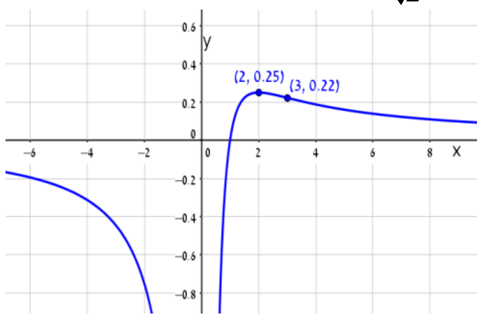
6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

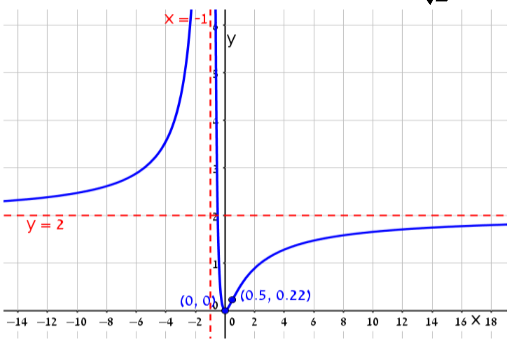
8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

גרפים

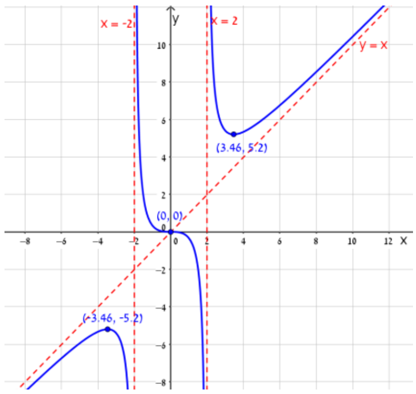
1)



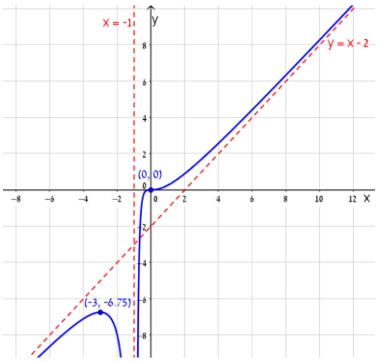
2)



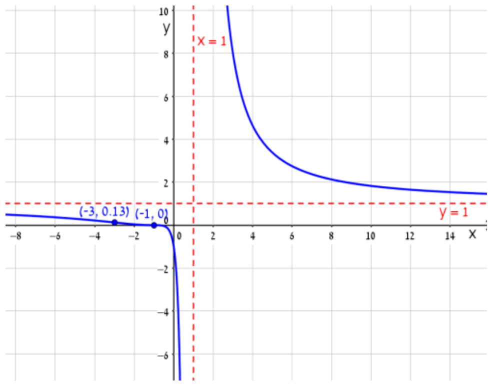
3)



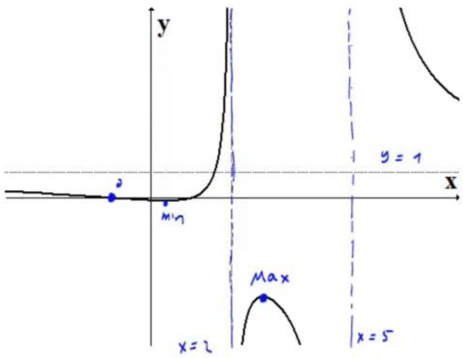
4)



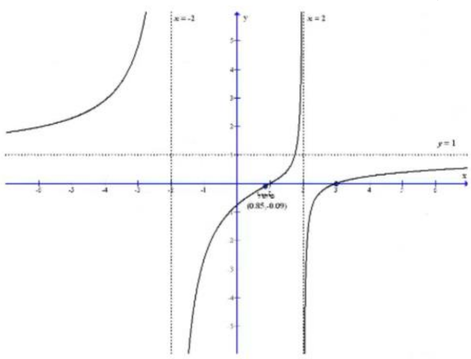
5)



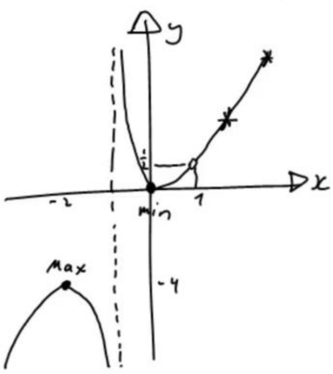
6)



7)



8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f\left(x\right)=x-e^{x}$

2) $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=\left(x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f\left(x\right)=x\cdot e^{-2x^{2}}$

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x.

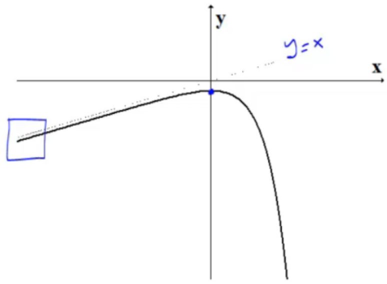
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0 \;\; or \;\; x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: -2.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1 \;\; or \;\; x>2$, ירידה: $-1<x<0 \;\; or \;\; 0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0 \;\; or \;\; x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

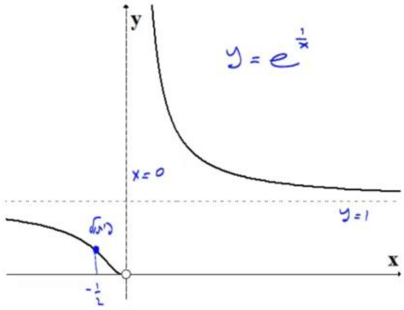
4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2} \;\; or \;\; x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0 \;\; or \;\; x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}} \;\; or \;\; x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

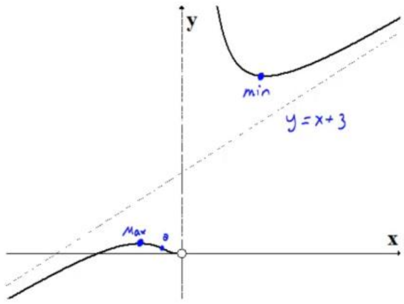
1)


y
x
y=x

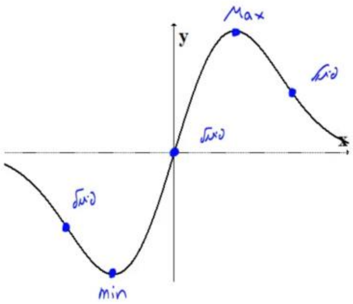
2)


y
x
$y=e^{\frac{1}{x}}$
x=0
y=1
פיתול
$-\frac{1}{2}$

3)


y
x
min
y=x+3
Max

4)


y
x
Max
פיתול
פיתול
פיתול
min

חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f\left(x\right)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f\left(x\right)=x\cdot\ln x$

5) $f\left(x\right)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f\left(x\right)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f\left(x\right)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$.	זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$.	זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$.	זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$.	זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

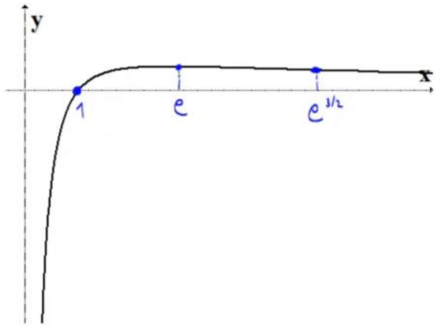
5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{1},\ x=e^{-3}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{1.5},\ x=e^{-0.5}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

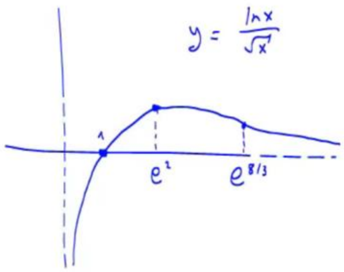
7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right), (e,2)$.
תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.
תחום קמירות: $1<x<5.15\ \ or\ \ 0<x<1$, קעירות: $x>5.15$.

גרפים

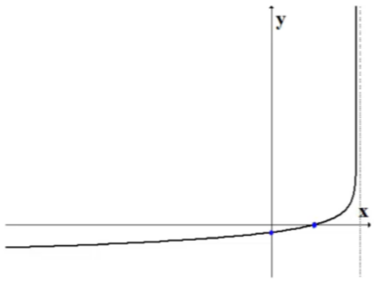
1)



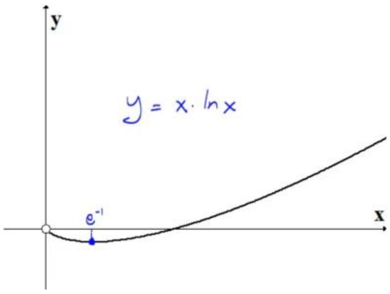
2)



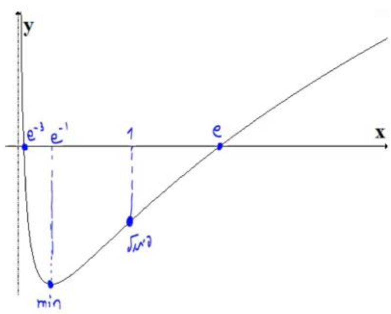
3)



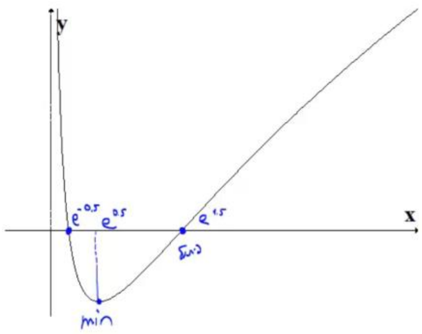
4)



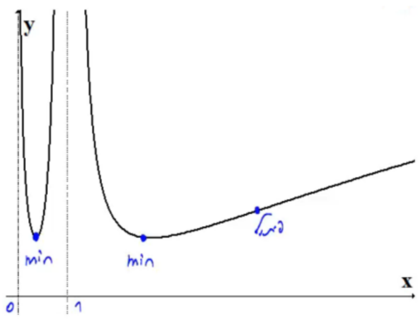
5)



6)



7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.
תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.
גרף:

חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>\frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $-0.2<x<0 \ \ or \ \ x>0$.

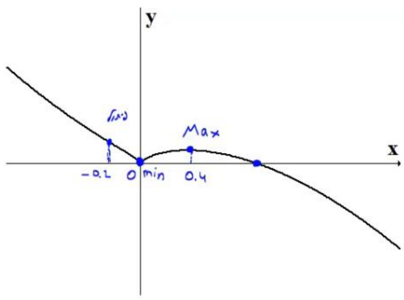
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: -1 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0),\ (-1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0 \ \ or \ \ x>1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ 0<x<1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: ±1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $0<x<1 \ \ or \ \ x>1$, ירידה: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.
נקודות פיתול: $(-1,0),\ (1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x<-1 \ \ or \ \ x>1$.

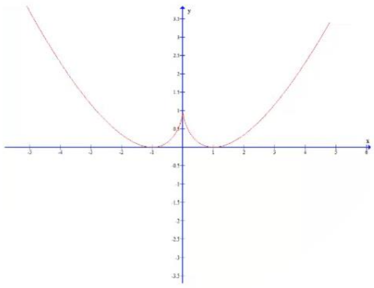
4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1.5, עם ציר ה- x: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- ∞, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3 \ \ or \ \ x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x<2 \ \ or \ \ x>3$.

גרפים

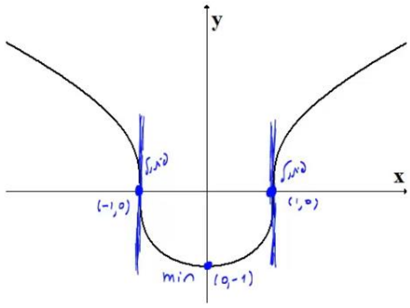
1)



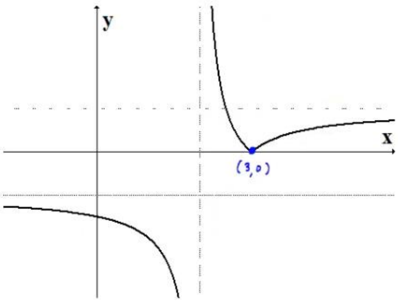
2)



3)



4)



חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.
ב. הוכח שהפונקציה זוגית.
ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

8) $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

9) $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

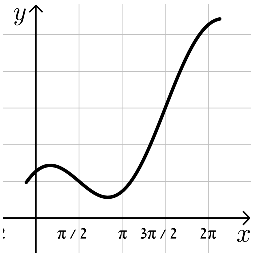
תשובות סופיות

1) א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0,2)$.   ה. אין.   ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



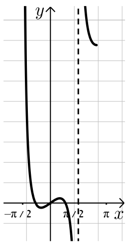
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

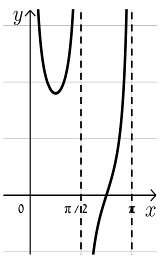


ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

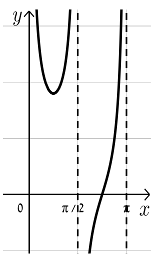
3) א. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; $0<x<\frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

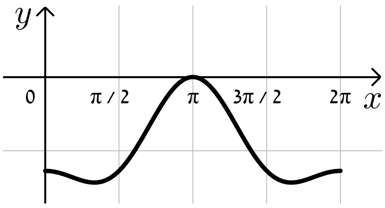
4) א. $(\pi,0),(0,-2)$.



ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:

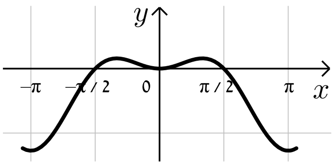
5) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$



ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

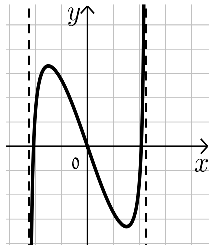
ד. 2 פתרונות.

6) א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\min(0,0)$ קצה.



7) א. $(0,0),(\pm0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm0.25\pi$.

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.



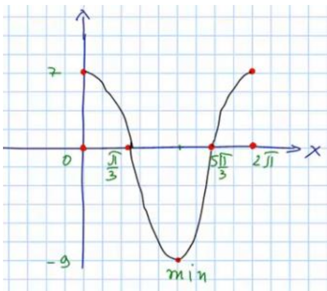
8) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7, עם ציר ה- x : $x=7,\ x=\frac{5\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{3}$.

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7),\ (0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

קעירות: $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{3}$.



תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.

9) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2, עם ציר ה- x : $x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{4}$.

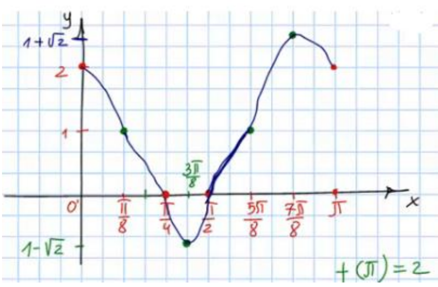
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$.

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right),\ \left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$.



חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x) = x - 2\arctan x$

2) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

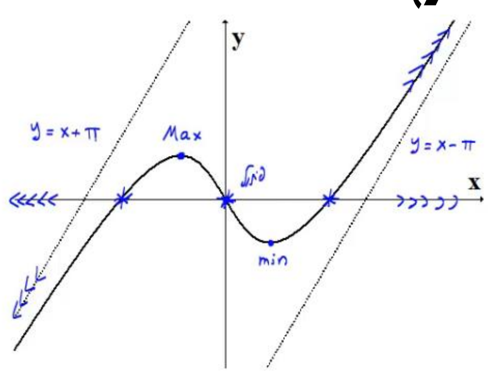
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,0.575\right)$, מינימום: $\left(1,-0.575\right)$.
תחום עלייה: $x<-1\ \ or\ \ x>1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $\left(0,0\right)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

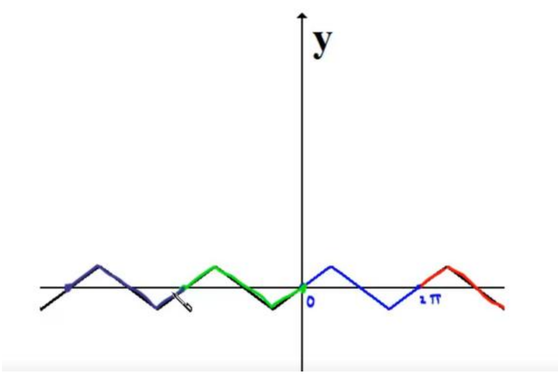
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור 2π.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}\ \ or\ \ \frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

גרפים

1)



2)



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע a.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים a,b.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע a.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים a,b.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את a.

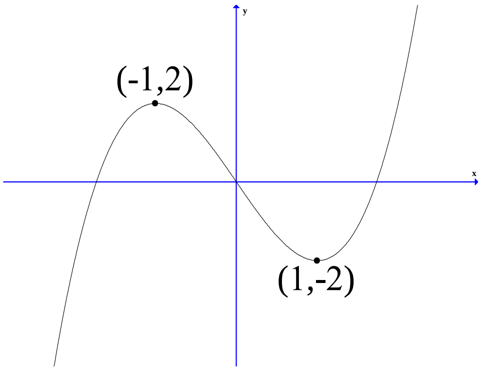
6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את a,b.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$.
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+bx+4}{x}$.
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a ואת b.

9) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$.
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות **10-17** מתייחסות לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=x^3-3x$:



10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=5$?

11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=2$?

12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=0.5$?

13) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

14) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

15) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

16) האם קיים ערך של k, עבורו למשוואה $f\left(x\right)=k$ אין פתרון?

17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$.

א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x=e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f\left(x^2\right)+4}$.

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x>0$.

ד. z יורדת לכל $x>0$.

21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x=e$.

חשבו את הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x=0$.

נגדיר $g(x)=\left(f(x)\right)^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה** :

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$,
כאשר $a<0$.
איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).

ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.

ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n,0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm 2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

1) $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$, $(-\infty < x < \infty)$

2) $x < 2\sin x$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$

3) $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$, $(x > 0)$

4) $\ln(x+1) \le x$, $(x \ge 0)$

5) נתון כי f רציפה לכל $x \ge 0$, $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, וכן $f(0) = 0$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי ב

פרק 3 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

1) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

נגזרת מסדר גבוה

שאלות

חשבו את הנגזרת ה- n, $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

1) $y=\frac{1}{x+a}$

2) $y=\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

3) $y=\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$

4) $y=\frac{x^4}{x^2-1}$

תשובות סופיות

1) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot(x+a)^{-n-1}$

2) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-5(x-1)^{-n-1}+7(x-2)^{-n-1}\right)$

3) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1}-\frac{1}{6}(x+1)^{-n-1}+\frac{2}{3}(x-2)^{-n-1}\right)$

4) $y'=2x-\frac{1}{2}\left((x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}\right)$, $y''=2+\left((x-1)^{-3}-(x+1)^{-3}\right)$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^n\cdot n!\cdot\left((x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right),(n>2)$

נוסחת לייבניץ

שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית , $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות :

1) $y = x^3 e^x$

2) $y = x^3 \sin 5x$

תשובות סופיות

1) $\left(e^x \cdot x^3\right)^{(10)} = e^x \left[x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6\right]$

2) $\left(\sin 5x \cdot x^3\right)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x$

גזירה פרמטרית

שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,
הנתונה בצורה פרמטרית $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t\cos t \end{cases}$.

תשובה

1) $y' = \dfrac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$, $y'' = \dfrac{(-t\cos t - 2\sin t)(1-\cos t) - \sin t(\cos t - t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

אינפי ב

פרק 4 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות **1-7** מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x$ $(-1\le x\le 3)$

2) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(20-x)$ $(-1\le x\le 20)$

4) $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x<1\\ (x-2)(x-3) & x\ge 1\end{cases}$ $\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$

5) $f(x)=1+\left|9-x^2\right|$ $(-5\le x\le 1)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ $(-5<x<-1)$

7) $f(x)=x^3-9x+1$ $(-\infty<x<\infty)$

8) נתונה הפונקציה $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$.

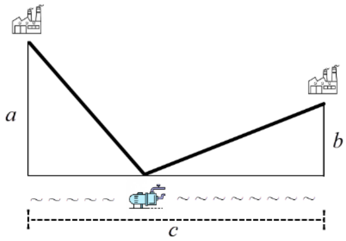
א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0,0.5)$. הוכיחו שדני טועה.

9) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)=x^2+|\ln x|$.

10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, ב- $\mathbb{R}$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

11) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f\left(x\right)=\left|x^2-4x+3\right|$,
ב- $\mathbb{R}$ וב- $\left[1,3\right]$.
הערה : אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

12) לחברת מי עדן יש שני מפעלים.


האחד מרוחק a ק״מ מהמעיין.
השני מרוחק b ק״מ מהמעיין.
המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק״מ.
החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין
בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.
מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?
הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזויות בין כל צינור למעיין שוות.

13) גליל חסום בכדור.
הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי
$\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

תשובות סופיות

1) $(-1,-7)$ מינימום מוחלט, $(3,9)$ מקסימום מוחלט.

2) $(-1,0)$ מינימום מוחלט, $(5,0)$ מינימום מוחלט, $(2,3)$ מקסימום מוחלט.

3) $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(20,0)$ מינימום מוחלט, $(8,48)$ מקסימום מוחלט.

4) $(2.5,-0.25)$ מינימום מוחלט, $(1,2)$ מקסימום מוחלט.

5) $(-3,1)$ מינימום מוחלט, $(-5,17)$ מקסימום מוחלט.

6) $(-2,-4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.

9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1+\ln 2)$.

10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.

11) ב- $\mathbb{R}$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
ב- $[1,3]$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, $(2,1)$ מקסימום מוחלט.

12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

13) שאלת הוכחה.

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

1) תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).
נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש-$\left(f(c)-f(a)\right)\left(f(b)-f(c)\right)<0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in(a,b)$, כך ש-$f'(d)=0$.

2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x)-f'(x)=f''(x)$ לכל x, וכן $f(a)=f(b)=0$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל x בקטע.

3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a,b), כך ש-$f''(x)<0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a)=f(b)=0$.
א. הוכיחו כי $f(x)>0$ בקטע (a,b).
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות **3-1** הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

1) $x^3e^{-x} \le \frac{27}{e^3}$ (לכל x)

2) $xe^{-\sqrt{x}} \le 1$, $(x \ge 0)$

3) $0 \le x^2e^{x-1} \le 1$, $(x \le 1)$

4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים.
הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:
$(2)\ \ b(1-a) > \frac{1}{4}$, $(1)\ \ a(1-b) > \frac{1}{4}$

הערת סימון: $[a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$; $(a,b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי ב

פרק 5 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x.
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x.
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x.
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות y'' (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.
א. הביעו את y באמצעות x.
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

1) $8,8,8$

2) 1

3) א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

4) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

שאלות

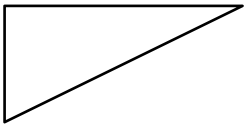
1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

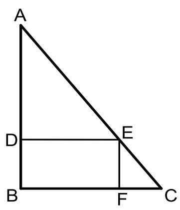
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

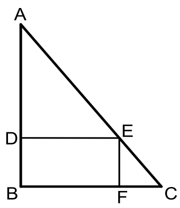
3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



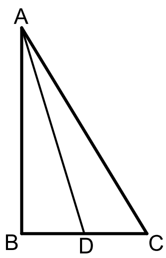
4) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: AB = 20 ס"מ, BC = 16 ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל
השטח הגדול ביותר.



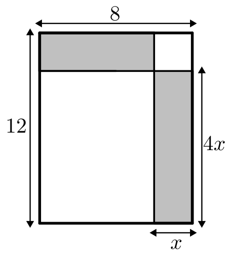
5) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל
השטח הגדול ביותר.



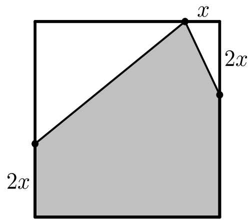
6) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבור אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ,
כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$
על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את x, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של x,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

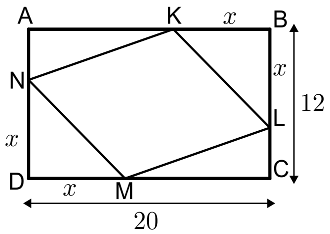


9) הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות x את סכום שטחי
המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות x,
כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

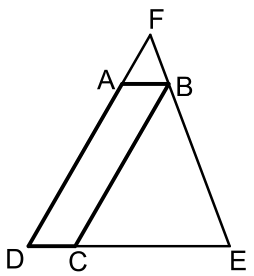


10) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB = 2$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב- x.

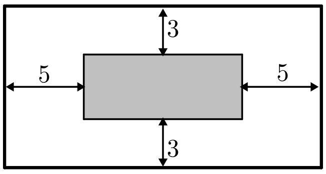
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?



11) חיים הוא אחד מעובדי חברת ׳דפוס יהלום בע״מ׳.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס״מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס״מ מצדי הקרטון (ראה איור).

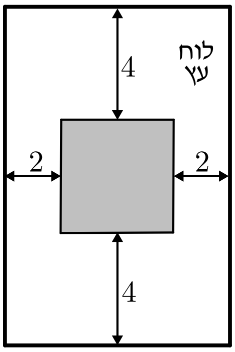


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
״יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ״ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?״.

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

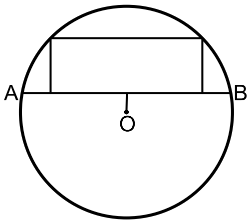
12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ״ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס״מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס״מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

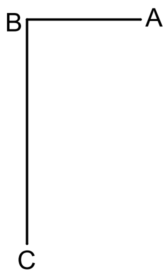
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס״מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס״מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

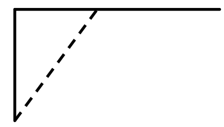


14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

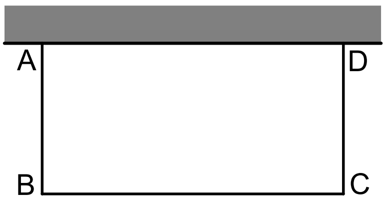
15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק״מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ״ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ״ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.



16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



תשובות סופיות

1) $4\sqrt{3}$ ס״מ.

2) א. 2.5 ס״מ.

3) א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

4) $S=$ 80 סמ״ר.

5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

6) 4 ס״מ, 16 ס״מ.

7) $x=2.75$

8) $x=6$

9) א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $S=$.

10) א. $\text{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

11) א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

12) א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

13) 92 ס״מ.

14) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

15) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

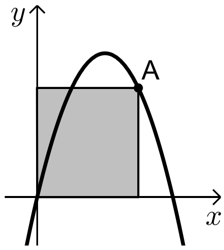
16) $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

17) $4\cdot 6$

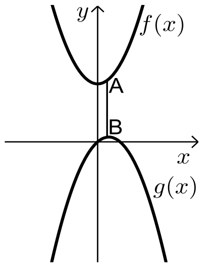
בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

שאלות

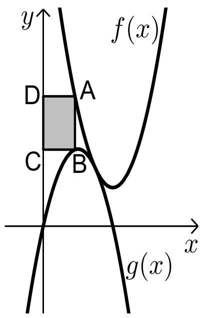
1) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



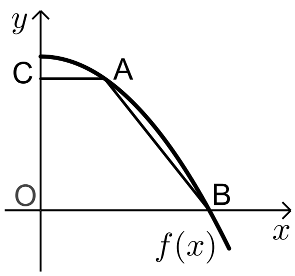
2) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$, כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



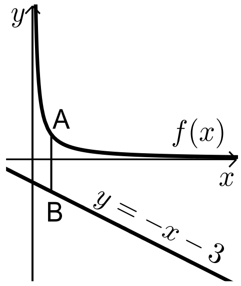
3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור).
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

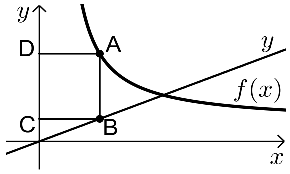


5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$, ונתון הישר: $y=-x-3$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.



הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD.
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

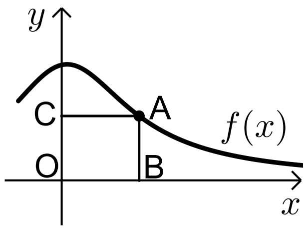
א. הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצאו את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y=2x$.
בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.
מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

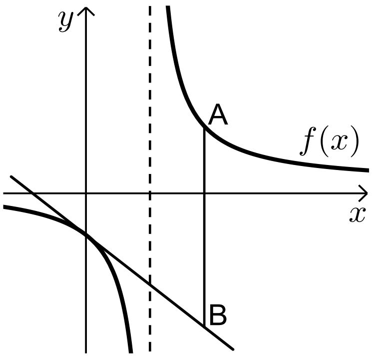
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x\geq 0$.



מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?



9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

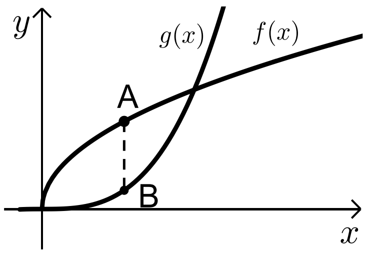
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

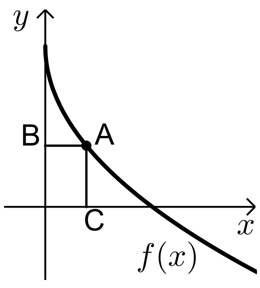
מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מַקְצֶה על הצירים הוא מינימלי.



11) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



12) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים $AB+AC$.

ב. מצאו את ערכו של t, עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

13) נתונות הפונקציות $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצאו את ערכו של b, שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) $A(2,2)$

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ

7) $1\cdot 2$

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

11) $A(1,2)$

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$

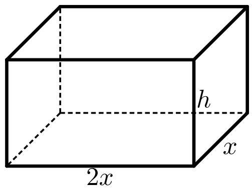
13) $b=1$

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

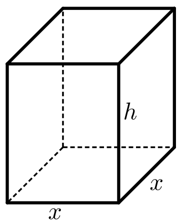
1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x
מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

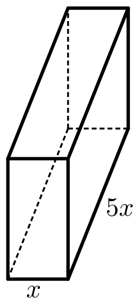


3) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא x.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

א. הביעו את h באמצעות x.
ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות x.
ג. מה צריך להיות ערכו של x, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?

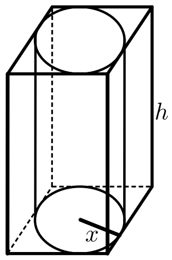


4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.



5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h.
ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.
א. הביעו באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
ב. הביעו באמצעות x
1. את נפח הגליל.
2. את נפח התיבה.
ג. מצאו את x, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$ ס"מ.
2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.
3) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$
4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.
5) $8 \cdot 6 \cdot 3$ ס"מ.
6) $V = \frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח.
7) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$
8) שאלת הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

1) נתונים שני מספרים חיוביים, p ו- q, שסכומם a.
הראו, שכאשר מתקיימים $\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl, כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט)

בעיית קיצון עם תנועה

3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.
לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $48+\frac{v^2}{200}$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום,
היא יכולה לקבל מחיר של $p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.
א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.
א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
ב. אם $x=20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.
א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$.
א. מצאו את תחום הפונקציה.
ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.
א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7) פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8) פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x=100$.
איזו מסקנה ניתן להסיק?

9) פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x=100$.

ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$,
ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

11) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$, ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

12) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=-0.15Q+50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13) ליצרן פונקציית ביקוש $Q=\frac{5000-50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

14) ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q=10$,
העלות הכוללת היא 225 ₪.

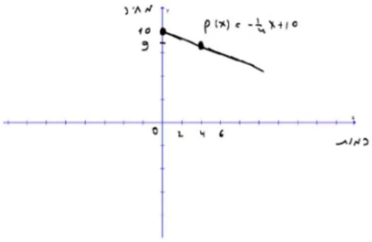
15) הוכיחו:
א. שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
הסבירו את המשמעות הגרפית.
ב. שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

16) $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.
א. האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
ב. האם יתכן להפך?
ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17) מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2, בהתאמה.
אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי
כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y}=\frac{p_2^2}{p_1^2}$.
ב. חשבו את x ו- y עבור הייצור מקסימלי, אם נתון:
$p_1=3{,}000$ ₪, $p_2=100$ ₪, $A=372{,}000$ ₪.

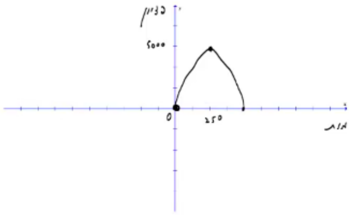
תשובות סופיות

1) א. 9   ב. 7   ג. 16   ה. $x(p)=40-4p$ ד.

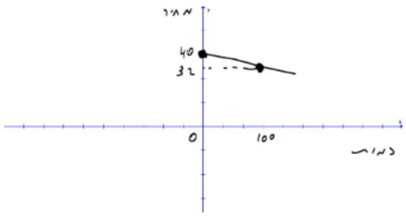


2) א. $R(x)=-0.6x^2+120x$, בתחום: $x\geq 0$.   ב. 2,160   ג. 2,160

3) א. $x\geq 0$ ב.



ג.



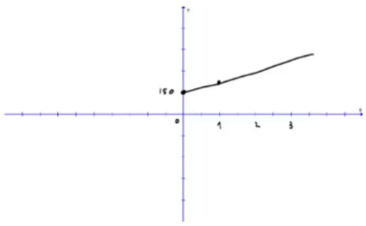
4) א. $x\geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x)=-0.04x^2+100x$,
הפדיון הממוצע: $AR(x)=-0.4x+100$ $x>0$.   ג. $R'(x)=-0.08x+100$
ד. $1,250$; הפדיון המקסימלי: $62,500$.

5) א. פונקציית הפדיון: $R(x)=-6x^3+240x^2+1800x$,
הפדיון השולי: $R'(x)=-18x^2+480x+1800$.   ב. לא.
ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: $108,000$.

6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right)=10\cdot 33\frac{1}{3}-\frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יחי', בערך.

7) א.



ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,
גם כאשר הוא אינו מייצר.   ב. 170
ג. 250   ד. $MC(x)=5$

8) א. 21.6   ב. 100   ג. 18 ₪ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ₪ בערך.

9) א. $C(100)=1240,\quad C(101)=1250.804$ ב. 10.8
ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת.   ד. גדל.

10) הכמות: 800, המקסימום: $38,200$.

11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

12) 25

13) הכמות: 800, המקסימום: $38,200$.

14) $TC(Q)=0.02Q^3+20Q+5$

15) שאלת הוכחה.

16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

17) א. שאלת הוכחה. ב. $x=4,\quad y=3600$

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**)?

3) אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?

4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר.
על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

1) א. 200 ב. $93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
2) 70 ₪ ל-350 דקות.
3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪
4) 40
5) 75 אג'.
6) מחיר הכרטיס: 30 ₪, ההכנסה המקסימלית: 3,600 ₪.
7) 4,500 ₪.
8) שאלת הוכחה.
9) 350

אינפי ב

פרק 6 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

5) נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

6) $e^{x-1}=x$

7) $\arctan x-x=0$

8) $\ln(x+5)-4=x$

9) $x^2+x\sin x=1-\cos x$

10) תהי f פונקציה גזירה לכל x, המקיימת: $f(1)=2$, $f(0)=1$, $f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

11) $e^x-5x=0$

12) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

13) $1+4x^4=8x^3$

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

14) $ax^2+bx+c=0$

15) $ax^3+bx^2+cx+d=0$

16) $x+a\cos(bx)=1$

17) $ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$ $\left(n>4,\ odd\right)$

18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר a קבוע ממשי.

19) הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר a קבוע ממשי.

20) הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

21) נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.
א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.
ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.
מה מספר השורשים של הפולינום?

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}>1$, $\frac{1}{ab}<-1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) אם $a=0$, למשוואה אין פתרון. אם $a\neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

פתרו את המשוואות הבאות:

4) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

5) $k^3+2k^2-3k+20=0$

6) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

7) $k^3-6k^2+12k-8=0$

8) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

9) $k^3-k^2+k-1=0$

10) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

11) $7x^3-33x^2+21x+61=0$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב : $x=0.8459$.

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

1) $1+4x^4=8x^3$

2) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

תשובות סופיות

1) פתרון מדויק $x=-1$.

2) פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.

אינפי ב

פרק 7 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

משפט רול

שאלות

1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\qquad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\qquad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

2) נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה c, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0,x_1,x_2, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

4) תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

6) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי g מוגדרת על ידי $g(x)=\left(x^2-1\right)f(x)$.
הראו כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, g',
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

8) הוכיחו:
אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, ויש פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $2\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

10) אם $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\ldots+\dfrac{c_{n-1}}{n}+\dfrac{c_n}{n+1}=0$ $\left(c_i\in\mathbb{R}\right)$,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

12) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\neq g'(x)f(x)$.
הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

15) תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

16) נתון כי f,g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי x_0 נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת אחת ויחידה - x_0.

במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a,b), ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

19) נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).

נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.

20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b).
ידוע כי $f(a)\ge g(a)$ ו- $f'(x)>g'(x)$ ב- (a,b).
הוכיחו כי $f(x)>g(x)$ ב- $(a,b]$.

תשובות סופיות

1) א. כן, $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

14) א. 0 ב. שאלת הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

1) $\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}$ $\quad (0<a<b)$

2) $\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$ $\quad (0<a<b)$

3) $(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b}$ $\quad (a<b)$

4) $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ $\quad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$

5) $\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$ $\quad (0<a<b)$

6) $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$ $\quad (0<a<b<1)$

7) $\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}$ $\quad (0<a<b)$

8) $\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2}$ $\quad (0<a<b<1)$

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $(0<a<b)$

10) $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $x<\tan x<\dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ $(x>0)$

3) $x<\arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$ $(x>0)$

5) $x<\operatorname{arctanh}(x)<\dfrac{x}{1-x^2}$ $(0<x<1)$

6) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

7) $1+x<e^x<1+xe^x$ $(x>0)$

8) $\sin x\le x$ $(x>0)$

9) $\tan x<4x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5$

3) $\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכיחו כי $f(2)=8$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכיחו כי $4\le f(2)\le 10$.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה c, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכיחו שקיימת נקודה m בקטע (a,b), כך ש- $f''(m)<0$.

4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), כך ש- f' חסומה בקטע (a,b).
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b) מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a,b).
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b),
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5) נניח כי f רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- f' מונוטונית עולה.
א. הוכיחו כי $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

6) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- (a,∞).
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

7) נניח כי f גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

8) תהי f פונקציה גזירה לכל x.
הוכח:
א. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.
ב. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).
ג. ייתכן שהגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.
ד. אם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.
ה. אם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

9) נניח כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

11) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

12) תהי f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$.
הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש-$c_2\neq c_3$ ו-$f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.
נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו-$(1,f(1))$,
חותך את הגרף של f בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.
הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש-$f''(x_0)=0$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח ש-f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f'_+(a)$ קיים וש-$f'_+(a)=L$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.
נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b).
א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי f קבועה ב-$[a,b]$.
ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי f לינארית ב-$[a,b]$.

17) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתון כי f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).
ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב-$[a,b]$.
ב. הוכיחו כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.
א. הוכח כי f' לא חסומה בקטע.
ב. האם בהכרח f' שואפת ל-∞ או $-\infty$?

תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

שאלות

1) הוכיחו שלכל $1 \le a < b$ מתקיים $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

2) הוכיחו כי עבור כל a, b המקיימים $0 < a < b < 1$,
מתקיים $\frac{b}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{a}{1+a^2}$.

3) הוכיחו כי עבור כל a, b המקיימים $1 < a < b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{a}}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{b}}{1+b^2}$.

4) הוכיחו כי $|\tan y - \tan x| \le 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5) הוכיחו כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0,1)$.

6) הוכיחו שלכל $x \ne 0$ מתקיים $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

7) תהי f פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$.
הוכיחו שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.

8) תהי f פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$, ויהי n מספר טבעי כלשהו.
הוכיחו שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

9) יהיו a ו-b מספרים חיוביים כלשהם.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.

(10 תהי f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$, כאשר $a \ge 0$.

הוכיחו שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_2)}{2c_2} = \frac{f'(c_1)}{a+b}$.

(11 תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכיחו שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$

קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט דרבו

שאלות

1) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases}$?

2) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$?

3) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$?

4) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם f' לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$?

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם f' לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה f גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ 4x & x<1\end{cases}$?

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם f' לא רציפה ב- x_0, אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$?

8) האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$?

9) תהי f פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכיחו שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\frac{1}{4}$.

10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי f מונוטונית בקטע (a,b).

11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?

הוכיחו או הפריכו זאת.

12) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\leq f'(x)\leq 2$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=x^2+x$.

13) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\leq f'(x)\leq 1$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$.

14) תהי f פונקציה גזירה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, המקיימת $0 \le f'(x) \le 1$, לכל x בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודה x בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כך ש- $f'(x)=\sin x$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $f(0)=f(1)=0$.
הוכיחו שקיים x ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רציונלי השונה מ-0.

תשובות סופיות

1) לא.
2) לא.
3) לא.
4) לא.
5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
8) לא.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.