אותות ומערכות - מענה חלקי מאוד



תוכן העניינים

1. התמרת פורייה 1
2. טורי פורייה 21

אותות ומערכות - מענה חלקי מאוד

פרק 1 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

1. מבוא כללי 1
2. נוסחת כיווץ והזזה 3
3. נוסחת הנגזרת 5
4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה 6
5. נוסחת המומנט 8
6. נוסחת ההתמרה ההפוכה 10
7. נוסחת התמרה כפולה ..... (ללא ספר)
8. משפט פלנשראל 11
9. משפט הקונבולוציה 12
10. תרגילים מסכמים 16

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה
$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב-$g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.

ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.

ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+2\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-2\right]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+6\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-6\right]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+\left[x+3\right]^2}\right\}$$

8) א. $$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

ב. $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

ג. $$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\frac{i}{\pi}\frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{256}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2)
$$\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1\end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & else \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \le 0$.

3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - f''(t)\right) g(x-t)\, dt = 2f(x)$$

5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t)\, dt = e^{-|x|} + |x| e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

2) $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

4) $g(x) = e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x) = e^{-|x|}$

7) א. $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ ב. הוכחה.

8) $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y)e^{-|x-y|}dy = x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A\\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש-$f'(x), x\cdot f'(x), f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le|x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^\infty\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

אותות ומערכות - מענה חלקי מאוד

פרק 2 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי 21
3. טור פורייה מרוכב 22
4. משפט פרסבל 23
5. רימן לבג 26
6. משפט דיריכלה 27
7. המשכה זוגית ואי זוגית 29
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה 30
9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה 33
10. טור פורייה בקטע כללי 34
11. משפט הקונבולוציה 36
12. גרעין דיריכלה 38
13. גרעין פייר וממוצעי סזארו 40
14. גרעין פוואסון 42
15. תרגילים מסכמים 43

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ e^{x^2} & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0 & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$.

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_ne^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π:

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi \le x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2 dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le \pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}\frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi}\sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}\,ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}\,dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $\sin(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n}\cos\left([2k-1]x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$ ג. הוכחה. $f(x)\sim\frac{3}{2}$

3) א. $x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^k c_n)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{.4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)\,dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל-$h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית-2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$

2) א. $b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) א. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|\, 4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\pi [2k-1] x\right)$

5) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$

6) א. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos\left([2k-1]\pi x\right)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right)$

8) $\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin\left([2k-1]x\right)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות-2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות-2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x$, $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5) $$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001}.

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

אזי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi \le t \le \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$.

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{\left[\alpha-n\right]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו- $f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב- f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$- אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו- $f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0