

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס יסודות ההסתברות. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשות האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל **פתרונות מלאים** לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולל מוגש בסרטוני וידאו המלויים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכיים בצורה מובנית, שיטתית ו פשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמא לחצו כאן.

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מובהק במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

از אם אתם עוסקים מיד בעבודה, סובלים מליקויות למידה, רוצים להציגו או פשוטओhbim ללמידה בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחווית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוtin, היכנסו עכשו לאתר

.www.gool.co.il



אנו מחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול, בשביל התירגול...

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - ברק קנדל ©

תוכן

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות.....	3
פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכלולים	8
פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלת.....	19
פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה.....	23
פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זרים.....	27
פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה.....	30
פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ולא החזרה.....	33
פרק 8 - קומבינטוריקה - שאלות מסכימות.....	37
פרק 9 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחד.....	44
פרק 10 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחד.....	47
פרק 11 - דיאגרמת עצים, נסחתה ביחס ונוסחת ההסתברות השלהמה.....	51
פרק 12 - תלות ואי תלות בין מאורעות.....	57
פרק 13 - שאלות מסכימות בהסתברות.....	61
פרק 14 - המשטנה המקרי הבודד - פונקציית ההסתברות.....	65
פרק 15 - המשטנה המקרי הבודד - תוחלת, שונות וסטיטית תקן.....	69
פרק 16 - המשטנה המקרי הבודד - טרנספורמציה ליניארית.....	73
פרק 17 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים.....	77
פרק 18 - התפליגוות בדידות מיוחדות - התפליגות בינוימית.....	80
פרק 19 - התפליגוות בדידות מיוחדות - התפליגות גיאומטרית.....	85
פרק 20 - התפליגוות בדידות מיוחדות - התפליגות אחדה.....	89
פרק 21 - התפליגוות בדידות מיוחדות - התפליגות פואסונית.....	92
פרק 22 - קירוב פואסוני להתפליגות הבינוימית.....	96
פרק 23 - המשטנה המקרי הבודד - שאלות מסכימות.....	99
פרק 24 - המשטנה המקרי הרציף - התפליגויות כלוליות (שימוש באינטגרלים).....	104
פרק 25 - התפליגוות רציפות מיוחדות - התפליגות מעירבית.....	114
פרק 26 - התפליגוות רציפות מיוחדות - התפליגות אחתה.....	118
פרק 27 - התפליגוות רציפות מיוחדות - התפליגות נורמלית.....	121
פרק 28- משטנה דו מימדי בדיד - פונקציית ההסתברות משותפת.....	130
פרק 29 - משטנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים.....	135
פרק 30 - המשטנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות	141
פרק 31 - קומבינציות לנאריות להתפליגות נורמלית.....	144
פרק 32 - התפליגות הדגימה - ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי.....	147
פרק 33 - התפליגות הדגימה- התפליגות סכום הצפויות המדגם ומשפט הגבול המרכזי	156
פרק 34 - התפליגות הדגימה- התפליגות מספר ההצלחות במדגם - הקרוב הנורמלי להתפליגות הבינוימית	160

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע:

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתבקשת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.
למשל : תוצאה בהטלת קובייה , מזג האוויר בעוד שבועיים .

מרחב מודגם : כלל התוצאות האפשרות בניסוי המקרי :

בホテלת קובייה : $\{1,2,3,4,5,6\}$.
מזג האוויר בעוד שבועיים : { נאה, שרבי, מושלג, גשם, מעונן חלקית, אביך }

מאורע : תת קבוצה מסוימת מרחב מודגם . מסומן באותיות :A,B,C,:;

בホテלת קובייה , למשל , לקבל לפחות 5 :
 $A = \{5,6\}$
 $B = \{2,4,6\}$ לקבלת תוצאה זוגית :

גודל מרחב המודגם : מספר התוצאות האפשרות במרחב המודגם :

בホテלת הקובייה : $|\Omega| = 6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשרות במאורע עצמו .

בホテלת הקובייה : $|B| = 3$ $|A| = 2$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשרות במרחב המודגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בホテלת הקובייה : $\bar{B} = \{1,3,5\}$ $\bar{A} = \{1,2,3,4\}$

מרחב מודגם אחיד (סימטרי) : מרחב מודגם בו לכל התוצאות במרחב המודגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל , קובייה הוגנת , אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא .

הסתברות במרחב מודגם אחיד :

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

במרחב מודגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה :

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5 ?

$$p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית ?

הסתברות במרחב לא אחיד :

$$\frac{f}{n}$$

يוחשב לפי השכיחות היחסית :

להלן הפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

X	מספר התלמידים – השכיחות-f
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

a. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שנבחר בכיתה קיבל את הציון 8 ?

b. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שנבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

הסתברות למאורע משלים :

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעبور את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכיב את כל המיללים האפשריות.
 - רשום את המקרים למאורע :
 - במילה נמצאת האות E.
 - במילה האותיות שונות. - רשום את המקרים למאורע \bar{A} .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגמים של הניסוי. האם המרחב מדגם שהוא אחיד?
 - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים :
 - סכום התוצאות 7.
 - מכפלת התוצאות 12. - חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטיו הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים :

מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 - מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 - מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן" :

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראיית מן היישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחותה מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמיים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

-A - התקבל פעם אחת עץ.

-D - התקבל לפחות פעם אחת.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

פתרונות: **שאלה 2**

$$\text{ג. הסיכוי ל-} A = \frac{1}{6}$$

$$\text{הסיכוי ל-} B = \frac{1}{9}$$

 שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

 שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

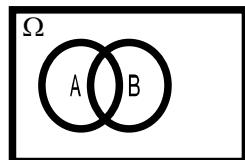
פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

ركע:

פעולות חיתוך :

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחたちים , חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך :

$$A \cap B$$



מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B.

בהתלט קובייה , למשל, לקבל לפחות 5 :

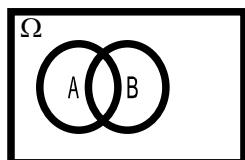
$B = \{2, 4, 6\}$ לקבלת תוצאה זוגית :

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולות איחוד :

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימן הוא : $A \cup B$ נוטנת את

אשר נימצא ב- A או B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהתלט קובייה , למשל, לקבל לפחות 5 :

$B = \{2, 4, 6\}$ לקבלת תוצאה זוגית :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

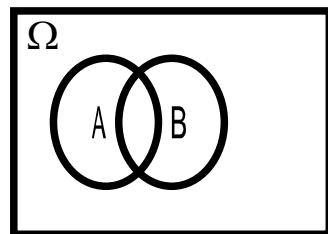
דוגמה (הפתרו נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ו מבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעبور את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעبور את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

- א. מה ההסתברות שלו לעبور את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
- ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני מבחנים?
- ג. מה ההסתברות לעبور לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



חוקי זה מרגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

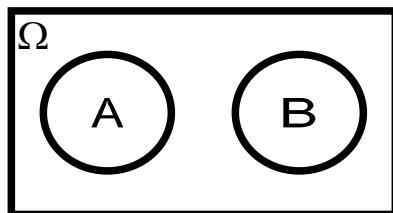
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסט:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מלה משותף : לא יכולים להתרכש בו זמןית.



$$A \cap B = \{ \}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

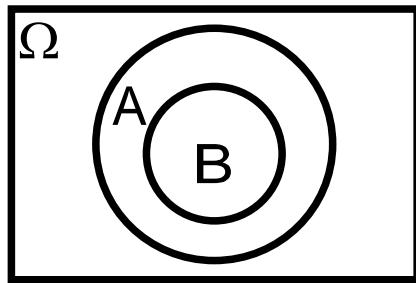
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל , בהטלת קובייה

$A = \{5, 6\}$ לקבלת לפחות 5 :

$B = \{3\}$ לקבלת 3 :

$$A \cap B = \{ \}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B - מוכלota בתוך המאורע- A .

$$B \subset A$$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

: לדוגמה

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
 נגידר את המאורעות הבאים :
 E- במילה נמצאת האות E.
 F- במילה אותיות שונות.
 A. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
 B. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגידר את המאורעות הבאים :
 A- לעبور את המבחן בסטטיסטיקה.
 B- לעبور את המבחן בכלכלה.
 העזר בפעולות חיתוך , איחוד ומשלים בלבד כדי להגיד את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת ווּן את השטח המתאים :
 א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
3. נתבקשתם לבחר ספרה באקראי. נגידר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגידר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
 א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
 $A =$
 $B =$
 $\bar{B} =$
 $A \cap B =$
 $A \cup B =$
 ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונותם הוא Ω או ϕ או A .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\overline{A}$$

$$A \cap \phi$$

$$A \cup \phi$$

$$A \cap \Omega$$

$$A \cup \Omega$$

$$A \cap \bar{A}$$

$$\bar{\phi}$$

$$A \cup \bar{A}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים:

A = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B = אדם גובהו מתחת ל- 1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\bar{A} \cap B$

ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה. \overline{A}

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

- A- אדם דובר עברית.
- B- אדם דובר ערבית.
- C- אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך שלוש הפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוביי 2 שפות בדיקן (מחשפות הניל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות שתשתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקומות העבודה מסוימים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמיים. 10% מהעובדים הין נשים אקדמיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות היום 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קופיות אדומה ושחורה. נגידר את המאורעות הבאים :

A-בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשchorה 2.

B-סכום התוצאות משתי הקופיות 6.

C-מכפלת התוצאות בשתי הקופיות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

$$p(\bar{A} \cap B)$$

12. מטבח הוטל פעמיים. נגידר את המאורעות הבאים :

A-קיבלו עץ בהטלה הראשונה.

B-קיבלו לפחות עץ אחד בשתי הנטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

$$\begin{aligned}P(A) &= 0.3 \\P(B) &= 0.25 \\P(A \cup B) &= 0.49\end{aligned}$$

- א. חשב את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$
- ב. האם A ו- B מאורעות זרים?
- ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap \bar{B}$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש $P(B)=0.2$ ו- $P(A)=0.3$ – ו- A ו- B מאורעות במרחב מודגם. נתון ש –

א. האם יתכן ש $p(A \cup B) = 0.4$?

ב. האם יתכן ש $p(A \cup B) = 0.6$?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי ?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי ?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבו בבנק הפלטלים. ל- 28% חשבו בבנק לאומי ול- 15% חשבו בבנק מזרחי. כמו כן נתנו כי 6% מחזיקים חשבו בבנק לאומי ובבנק הפלטלים. ל- 5% חשבו בבנק פולטלים ומזרחי. ול- 4% חשבו בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל- 1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבו בנק בשלושת הבנקים יחד.
- א. מה אחוז האזרחים להם חשבו בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו ייחס חשבו בבנק פולטלים ולאומי אבל לא בנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבו בפולטלים או במזרחי אבל לא בנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבו בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם לבדוק חשבו בנק באך אחד מהבנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבו בנק באך אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבו בנק לפחות אחד מהבנקים הללו?
19. חברת מסויימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו- 7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באך אחד משלושת הרכטים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad .20$$

21. A ו- B מאורעות במרחב המדגם האם נכוון לומר שהסיכוי שיתרחש בבדיקה מאורע אחד הוא :
- $$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

פתרונות: **שאלה 7**

- א. 0.24
ב. 0.04
ג. 0.16

 שאלה 8

- א. 10%
ב. 50%
ג. 50%

 שאלה 9

- א. 0.2
ב. 0.3
ג. 0.3

 שאלה 10

- א. לא.
ב. כן.
ג. כן.
ד. לא.

 שאלה 11

- א. כן
ב. 3

 שאלה 12

התשובה הנכונה ג

 שאלה 13

- א. 0.05
ב. 0.95

 שאלה 14

- א. 0.06
ב. לא זרים

ג. 0.43

 שאלה 18

- א. 0.19
ב. 0.05
ג. 0.31
ד. 0.46
ה. 0.12
ו. 0.41
ז. 0.59

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודלו של מרחב המדגמים.

אם לתחליק יש k שלבים : n_1 אפשרויות לשלב הראשון , n_2 אפשרויות לשלב השני ... n_k

אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתחליק כולו יהיה : $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה ווגם מטבע? (הסביר בהקלטה)

למשל, כמה לווחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלי והיתר ספרות? (הסביר בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכיים הבאים :
 - א. הטלת קובייה פעמיים.
 - ב. מספר תלת ספרתי.
 - ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בניים ועשר בנות.
 - ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2. בمساعدة מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטרכוט, צזה עוף בגריל, לוזניה בשנית ולוזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה וليمונדה.
 - א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפरיט הזה?
 - ב. אדם מזמין ארוחה אקראיית. חשב את ההסתברויות הבאות :
 1. בארוחה סלט ירקות, לוזניה בשנית וليمונדה.
 2. בארוחה סלט, לוזניה ותה.

3. בוחרים באקראי מספר בין חמישה ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
 - א. המספר הוא זוגי.
 - ב. במספר כל הספרות שוונות.
 - ג. במספר כל הספרות זהות.
 - ד. במספר לפחות שתי ספרות שוונות.
 - ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - ו. המספר הוא פליינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאלו באותה צורה).

4. חמישה אנשים אקרים נכנסו למעלית לבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
 - א. כולם ירדו בקומה החמישית?
 - ב. כולם ירדו באותו קומה?
 - ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
 - ד. ערן ודני ירדו בקומה הששית והיתר בשאר הקומות?

5. במלגה חמישה עשר חברי כניסה. יש לבחור שלושה חברי כניסה לשלווה תפקדים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם:
 א. חבר כניסה יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 ב. חבר כניסה לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6. מטילים קובייה 4 פעמים.
 א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהיה זהות?
 ב. מה ההסתברות של התוצאות תהיה שונות?
 ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה זהות?
 ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7. יש ליצור מילה בת חמיש אותיות לא בהכרח עם משמעותיות ה-ABC (26) אותיות) בת 5 אותיות.

- א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A, ו-L?
 ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום (מילה אשר משמאליימין, ומימין לשמאן נקראת אותו הדבר).

8. יוצרים קוד עם 2 ספרות (モוטר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a)

- א. בקוד אין את הספרה 5.
 ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9. במשחק מזל יש למלא טופס בו ח משבצות. כל משבצת מסומנת בסימון 7 או בסימון X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס המשחק המזל?

פתרונות: **שאלה 2**

- 36 .א
1/36 .1 .ב
1/9 .2

 שאלה 1

- 36 .א
900 .ב
70 .ג
90 .ד

 שאלה 4

- 0.00003 .א
0.00024 .ב
0.20508 .ג
0.01047 .ד

 שאלה 3

- 0.5 .א
0.3024 .ב
0.0001 .ג
0.9999 .ד
0.6976 .ה
0.01 .ו

 שאלה 6

- 1/216 .א
5/18 .ב
13/18 .ג
215/216 .ד

 שאלה 5

- 3,375 .א
2,730 .ב

 שאלה 9

- 2^n

 שאלה 7

- 0.5417 .א
 $\frac{1}{26^4}$.ב
0.0015 .ד

פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d ? (הਪתרו בחקלה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d , כך שהאותיות a,b יהיו ברצף?

(הਪתרו בחקלה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d , כך שהאותיות b,a יופיעו בתור

הרצף ba ? (הਪתרו בחקלה)

תרגילים:

1. חשבו בכמה אופנים :
 - א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
 - ב. אפשר לסדר חמישה חילילים בטור?

2. סיירו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
 - א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
 - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות שני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצת השני של המדף?

3. בוחנים 5 בניים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים להם אותו ציון.
 - א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
 - ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים, אם מדרגים בניים ובנות בנפרד?

4. מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
 - א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

- שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
- ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
- ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
- ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיה בקצת המדף (כל ספר בקצת אחר)?

5. אדם יצר בגנו שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הרץ את הפלייליסט באקראי.
 - א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים במקשה אחת?
 - ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
 - ג. מה ההסתברות שהשירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכן גם השירים בצרפתית)?

6. 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת קולנוע בכיסאות 1-8.
- א. מה ההסתברות שיושי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
 - ב. מה ההסתברות שהבניים יתיישבו במקומות האיזוגיים?
 - ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
 - ד. מה ההסתברות שהבניים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

פתרונותות : **שאלה 1**

א. 24

ב. 120

 שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.8

ג. 0.022

 שאלה 3

א. 362,880

ב. 2,880

 שאלה 4

א. 3,628,800

ב. 0.2

ג. 0.8

ד. $\frac{1}{45}$ **שאלה 5**א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$ **שאלה 6**

א. 0.75

ב. 0.014

ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

רקע:

תמורה עם חזרות :

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה , ש- n_1 מהם זהים מסוג 1 , n_2 זהים מסוג 2, ..., n_r זהים מסוג r :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

למשל ,

כמה מילימ ניתן ליצור מכל האותיות הבאות : W W T T K K ? (תשובה בהקלטה)

תרגילים:

1. במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות :

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות ב ע ב ע ג ?

3. בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתी נורות כחולות.
כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4. רוצים ליצר מספר מכל הספרות הבאות : 1,2,2,2,6
כמה מספרים ככלא אפשר ליצר?

5. במשחק בול פגעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגעה?

6. כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ 10 דגלים שונים ניתן ליצר אם 4 דגלים הם לבנים , 3 כחולים , 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווים צבע זהים זה לזה לחלווטין .

פתרונות:

90 .3

20 .4

$$\frac{1}{210} .5$$

12,600 .6

פרק 6 - קומבינטוריקה - דוגמה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

רקע:

מבחן סדר בדוגמה עם החזרה

מספר האפשרויות בדגםת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמבחן סדר הוא : n^k .

למשל, בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה ליאציג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?

$$n = 10$$

$$k = 3$$

$$10^3 = 1,000$$

מבחן סדר ללא החזרה

מספר האפשרויות בדגםת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המבחן סדר ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו :

$$(n)_k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

למשל, שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 ליאציג ועוד בו תפקידים שונים. תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

תרגילים:

1. במלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשולשה תפקידיים שונים.
 א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתקidis אחד. כמה קומבינציות יישן לחלוקת התפקידים?
 ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתקidis אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת
 התפקידים?

2. במשחק מזל יש 4 משבצות ממושפרות מ-D-A (A עד D). בכל משבצת יש למלא ספרה
 (9-0). הזוכה הוא זה שניחס נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאם.
 א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
 ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
 ג. מה ההסתברות שהתואצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3. קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו
 התאריך?

4. שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעה היא שבסינגפור ישנים 5
 מלונות הילטון.
 א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
 ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. כמה דרכים ניתן
 להרכיב את הוועד אם:
 א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתקidis אחד.
 ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתקidis אחד.

פתרונותות :**שאלה 1 :**

א. 8000

ב. 6840

שאלה 2 :

א. 0.0001

ב. 0.6561

ג. 0.3439

שאלה 3 :

0.476

שאלה 4 :

א. 0.04

ב. 0.48

פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ולא חוזרת

רקע:

מבחן לא סדר בדגימה ללא חוזרת

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מנתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות
לסדר העצמים הנדונים ואין חוזרת:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה

מן תוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

הערות

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} .1$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n .2$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 .3$$

תרגילים :

1. בכיתה 15 בנות ו-10 בניים. יש לבוחר 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הклассה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות אס-
- אין שום הגבלה לבחירה.
 - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בניים ירכיבו את המשלחת.
 - לא יהיו בניים במשלחת.
2. סטודנט מעוניין לבוחר 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפני רשותה של 10 קורסים לבחירה :
- 5 במקצועות מדעי הרוח.
 - 3 במקצועות מדעי החברה.
 - 2 מתחומי המתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - כמה בחירות יש לו בוחן 3 קורסים הם מדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא מדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 מדעי הרוח, 2 מדעי החברה ו-1 מתמטיקה?
3. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבוחר לשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהשלחת תורכב רק מבנות?
 - מה ההסתברות שבשלחת תהיה רק בת אחת?
 - מה ההסתברות שבשלחת תהיה לפחות בת אחת?
4. במשחק הלווטו יש לבוחר 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היוטר מספר זוגי אחד?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5. בחפיית קלפים ישנו 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו- 13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 10-2, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא גווקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (לא החזרה).

- א. מה ההסתברות שעוזד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
- ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים קיבל את הקלה אס-לב?
- ג. מה ההסתברות שעוזן קיבל קלפים שחורים בלבד וועוד קיבל שני קלפים שחורים בדיקון?
- ד. מה ההסתברות שעוזן קיבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס או נס מס' 1)?

6. במכלה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכלה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
- ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
- ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

7. ח 2 בנים ו- ח 2 בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלו ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
- ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

פתרונותות:

<u>שאלה 2</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 252	א. 53,130
ב. 100	ב. 20,475
ג. 100	ג. 3003
ד. 60	

<u>שאלה 4</u>	<u>שאלה 3</u>
א. 0.02	א. 0.1117
ב. 0.187	ב. 0.1445
ג. 0.972	ג. 0.9819
ד. 0.00246	

<u>שאלה 8</u>	<u>שאלה 6</u>
$\binom{2n}{n}^2$.א	6.45•10 ⁻⁵ .א
$\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$.ב	2.58•10 ⁻⁴ .ב
	0.3225 .ג

פרק 8 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמוֹת

1. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם :
 - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתקidis אחד.
 - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתקidis אחד.
 - ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2. במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים לשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
 - א. בשלחת ארבע ממשימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ב. כמו בסעיף א. רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים לשלחת שבה כוללם אותו התפקיד.

3. מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
 - א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
 - ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחילה בספרה ונגמר בספרה?
 - ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
 - ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברכף?

4. בארכונית 4 מגירות. ילד התבקש ע"י אימו לסדר 6 משחקים בארכונית. הילד מכניס את המשחקים באקרוי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל המשחקים יחד.
 - א. מה ההסתברות שהילד יכנס את כל המשחקים למגירה העליונה?
 - ב. מה ההסתברות שהילד יכנס את כל המשחקים לאוותה מגירה?
 - ג. מה ההסתברות שה"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
 - ד. מה ההסתברות שה"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5. בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"היליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן באקרים מפלגה כלשהי.
- מה הנסיבות שכל ה-6 יבחרו אותה מפלגה?
 - מה הנסיבות שמלגת "ירוקים" לא קיבל קולות?
 - מה הנסיבות שמלגת ה"ירוקים" קיבל בדיקן 3 קולות וכל מפלגה אחרת קיבל קול בלבד?
 - מה הנסיבות שמלגת "hirukim" קיבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" קיבל 2 קולות ומפלגת "hilichud" קיבל 2 קולות?
6. 5 חברים נפגשו הם רצו לראות סרט. באפשרותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקרים.
- מה הנסיבות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
 - מה הנסיבות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיימי"?
 - מה הנסיבות שכל אחד יבחר סרט אחר?
 - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
 - מה הנסיבות שיוסי וערן יבחרו את "הנוסע השמיימי" וכל השאר סרטים אחרים?
 - מה הנסיבות שהנוסע השמיימי לא יבחר על ידי אף אחד מהחברים?
 - לקחו את 8 הסרטים וייצרו מהם רשימה. נתנו שברשימה 3 סרטים אימה, מה הנסיבות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטים אימה בראצף?
7. בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים, השנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול לבחור רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצור הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
 - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
 - בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8. 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות.

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההשיבה :

א. ללא הגבלה.

ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.

ג. שני גברים בקצת אחד ושני הגברים האחרים בקצת שני.

9. בהגירה ישנים 10 מספרים מ-1 עד 10. בו חורים באקראי 5 מספרים. מה הסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10. 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות. כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

א. מה הסתברות שככל אחד יורד בתחנה אחרת?

ב. מה הסתברות שבDIRECT 3 ירדו בתחנה החמישית?

ג. מה הסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?

ד. מה הסתברות שכולם ירדו בתחנות 5, 6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11. ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו-4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה. 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?

ב. מה הסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?

ג. מה הסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה הסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).

ה. מה הסתברות שהזוג כהן יישבו כך שככל אחד בכיוון נסעה מנוגד?

ו. מה הסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה הסתברות שככל הגברים יישטו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון

הנסיעה?

ח. מה הסתברות שככל זוג ישב אחד מול השני?

12. סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) והאותיות ABC (26 אותיות).
כל TWO יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.

א. כמה סיסמאות שונות יש?

ב. כמה סיסמאות שונות יש לבדוק כל התווים שונים?

ג. כמה סיסמאות שונות יש לבדוק לפחות ספרה אחת ולפחות אותן אחת?

13. מתוך קבוצה בת CH אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובה בפתרונות.

א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.

ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.

ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.

14. שני אנשים מטילים כל אחד מטבע CH פעמים.
בטא באמצעות CH את הסיכוי של כל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

15. יוצרים קוד עם CH ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות:
(בטאו את תשובהיכם בפתרונות CH).

א. בקוד אין את הספרה 5.

ב. בקוד מופיעה הספרה 3.

ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

פתרונותות:**שאלה 1**

- א. 102,400,000
 ב. 78,960,960
 ג. 658,0088

שאלה 2

- א. 810,000
 ב. 657,720
 ג. 27,405

שאלה 3

- א. 14,040,000
 ב. 1,404,000
 ג. 5,616,000
 ד. 8,424,000

שאלה 4

- א. 0.00024
 ב. 0.00098
 ג. 0.05933
 ד. 0.75000

שאלה 5

- א. 0.00098
 ב. 0.17798
 ג. 0.02929
 ד. 0.02197

שאלה 6

$$\frac{1}{4096} \text{ נ.}$$

$$\frac{1}{32,768} \text{ ב.}$$

0.205 ג.

0.795 ד.

0.0105 ה.

0.5129 ו.

0.1071 ז.

שאלה 7

4200 א.

50,400 ב.

604,800 ג.

שאלה 8

604,800 א.

2,880 ב.

2,880 ג.

שאלה 9

0.238

שאלה 10

0.1512 א.

0.014 ב.

0.059 ג.

$$\frac{62}{10^6} \text{ ט}$$

שאלה 11

- 40,320 .א.
0.1071 .ב.
0.2142 .ג.
0.0357 .ד.
0.5714 .ה.
0.1429 .ו.
0.0143 .ז.
0.0095 .ח.

 שאלה 14

$$\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

פרק 9 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחד

רקע:

לעתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

הסתברות של A בהינתן Sh B כבר קרה:

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמדובר במרחב מדגם אחד:}$$

למשל, (פתרוון בהקלטה)

מטילים קובייה.

נדיר :

A – התוצאה זוגית.

B – התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את :

$$P(A|B)$$

תרגילים:

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שההתוצאה שהתקבלת זוגית?

3. מטילים צמד קוביות.

נדיר :

A – סכום התוצאות בשתי ההצלחות הינו 7

B – מכפלת התוצאות 12

$$P(A|B)$$

חשבו את

4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבלו שתהוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת 4. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בניים בקרוב הילדים?

8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרוב הילדים?

השאלות הבאות משלבות קומבינטוריקה:

9. בכיתה 6 בניים ו-7 בנות. נבחרו ארבעה ילדים מהכיתה.

אם ידוע שנבחרו 2 בניים ושתי בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10. חמישה חברים יצאו לbijt קולנוע והתיישבו זה ליד זה באקראי במקומות מספר 5 עד 9. אם ידוע שען ודין התיישבו זה ליד זה. מה ההסתברות שהם יושבים במקומות מספר 6 ו-7?

פתרונות: **שאלה 1**

0.2

 שאלה 2

1/3

 שאלה 3

0.5

 שאלה 4

0

 שאלה 5

1/6

 שאלה 6

2/11

 שאלה 7

1/3

 שאלה 8

3/4

 שאלה 9

2/3

 שאלה 10

1/4

פרק 10 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונח : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במקרה : הסיכוי למאורע נתון שהתרחש :

למשל,

נקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15%

מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאיות.

אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם המכונית החדשה אירופאית? (פתרון בחלקתא)

תרגילים:

- .1 תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ובחן בסטטיסטיקה :
נדיר את המאורעות הבאים : A- עבר את המבחן בסטטיסטיקה .B – עבר את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעبور את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
- התלמיד עבר בסטטיסטיקה , מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - התלמיד עבר בכלכלה , מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ה תלמיד עבר בכלכלה , מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ה תלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה תלמיד עבר לפחות אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?
- .2 במדינה שתי חברות טלפונ סלולריי "سوفט" ו"בל". 30 מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "سوفט". 15% מהתושבים הבוגרים אין טלפונ סלולרי בכלל.
א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
ב. נבחר אדם רשום אצל חברת "سوفט", מה ההסתברות שהוא גם רשום בחברת "בל"?
ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "سوفט"?
ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "سوفט"?
- .3 במכלה שני חנינונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 00:08 יש סיכוי של 60% שבחניון הגודל יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבחניון החנינונים יש מקום.
א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 00:08 רק בחניון הגודל של המכלה?
ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 00:08, מה הסיכוי שבחניון הגודל יש מקום?
ג. אם בשעה 00:08 בחניון הגודל אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
ד. נתון שלפחות באחד מהחנינונים יש מקום בשעה 00:08, מה ההסתברות שבחניון הגודל יש מקום?
- .4 נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאיים, מתוך השכירים 20 הם אקדמיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמיים.
א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנוטונים.
ב. נבחר אדם אקרי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמי?
ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמי?
ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמי?
ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

- .5. חברת מסויימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
- הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו- 7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בכלל שלושת הcredיטיסים הנ"ל.
- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

פתרונות: **שאלה 1**

- א. 0.833
 ב. 0.9375
 ג. 0.0625
 ד. 0.5
 ה. 0.789

 שאלה 2

- א. 5%
 ב. 0.0833
 ג. 0.786
 ד. 0.6875

 שאלה 3

- א. 0.4
 ב. $\frac{2}{3}$
 ג. 0.25
 ד. $\frac{6}{7}$

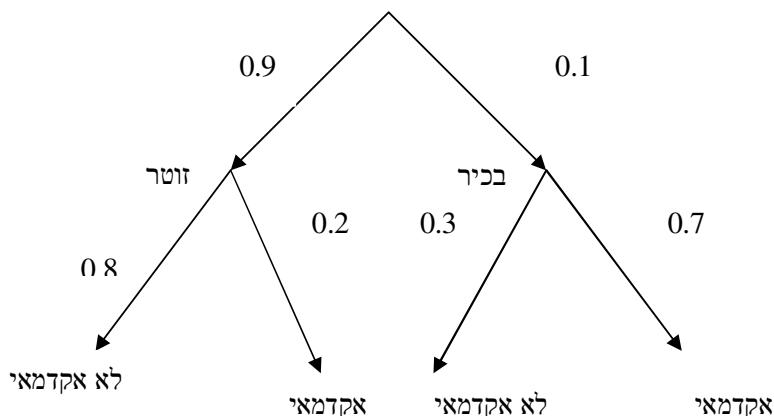
פרק 11 - דיאגרמת עצים, נוסחת ביסס ונוסחת ההסתברות השלמה

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשויות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלולה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון :

למשל,
בחברה מסויימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים .
מבין הבכירים 70% הם אקדמיים ומ בין הזוטרים 20% הם אקדמיים.

נشرط עז שיתאר את הנתונים , השלב הראשון של העז אינו מותנה בכללם ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון .



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מתוך חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמי ?

$$0.1 \times 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמי ?

$$0.9 \times 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתווך הענף הכפלו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמי ?

$$0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$$

ד. נבחר אקדמי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר ?

מדובר כאן על שאלת בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרו של היחסורות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה

מאורע כלשהו, A_1, \dots, A_n חלוקה מומצאה של Ω .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

נוסחת בייס

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j)P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקיית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

באותו זמן מסויימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת משח החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת משח החורף הוא 40% והסיכוי לקשיש יחלה בשפעת משח החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת משח החורף?

ב. מה האחוז האנשים שיחלו בשפעת משח החורף?

ג. נבחר אדם שחלה משח החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת משח החורף?

3. בצד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בצד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כ- $\frac{1}{2}$, מוציאים ממנו כדור ומבליל להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות שני ה כדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם ה כדורים שהווצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהווצה יהיה באותו צבע?

4. חברת סלולר מסוגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי 10% מה לקוחות בני נוער, 70% מה לקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונטען שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיון?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לבן נוער?

5. כדי להתקבל למקומות העבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, ככלומר אם נכשלתם בבחן מסויים איןכם ניגשים לבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.
מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולמים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולמים בשפעת בזמן החורף.

30% מההתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולמים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ- 4 האזורים: A B C D.

אם אנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-1.0 בכל שהאנייה מתקרבת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי אנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי שאנייה התגלגה ע"י הרדאר?

ב. אם אנייה התגלגה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם אנייה התגלגה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהוא לא נמצא באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובಹסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במקרים הללו, אדם לא יכול לבחوت ביותר ממחלה אחת מבין במקרים הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולמים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במקרה C, B הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מקרה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיעו לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולם במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולם במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלת מסוימת את התשובה הוא ק, אם הוא לא יודע את התשובה הוא מוחש. במקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאה יש ק תשבות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10. אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך למשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:

א. Dolb, Ronit, Dolb

ב. Ronit, Dolb, Ronit

בכל משחק מישחו חייב לנצח (אין תיוק). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איך אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

פתרונותות: **שאלה 1**

א. 2/7

ב. 23/49

 שאלה 2

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

 שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

 שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

 שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

 שאלה 9

$$\frac{kp}{1 + (k - 1)p}$$

 שאלה 10

אפשרות א עדיפה

פרק 12 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A.

הדבר גורר גם החפק: $P(A|B) = p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב- B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A/B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במדויק שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצלחה בניסוי הראשון הוא 0.7 והסיכוי להצלחה בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצלחה בשני הניסויים יחד?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18$$

הרחבה: אי תלות בין ח מאורעות

ח מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון :

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תליה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח בבחן הראשון הוא

0.7 והשני 0.4.

א. מה הסיכוי להצלח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3. מדינה מסויימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבעה בדיקות בלתי תלויות לפני שיוקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעبور בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסויימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש $P(A \cup B) = 0.9$:
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים? $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$

7. הוכיחו אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

证:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- .א. אם $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$ אזי המאורעות בלתי תלויים.
- .ב. מאורע A כלול במאורע B . $0 < p(A) < 1$, $P(A) > 0$ לכן $p(A/B) < p(B)$.
- .ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.
- .ד. A ו- B מאורעות תלויות שסיכוייהם חיובים לכן A ו- B מאורעות זרים.
- .ה. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

פתרונותות : **שאלה 1**

כג

 שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

 שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

 שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

 שאלה 8

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

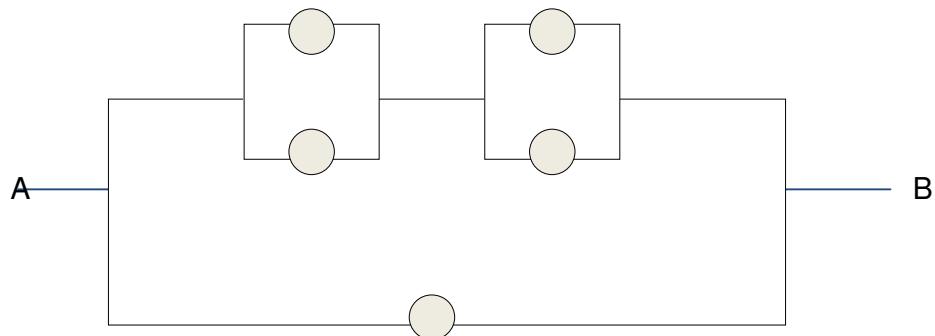
פרק 13 - שאלות מסכימות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראיית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
- ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
- ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם המכונית החדשה אירופאית?
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלב'A' ו-40% במחלב'B' והיתר במחלב'C'. 3% מתוצרת מחלב'A' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלב'C' 10%. כמו כן ידוע שבמדינה "שומקום" בסך הכל 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שmagiu למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
- ב. אם רכש חלב חמוץ במרקול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלב'A'?
- ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלב'A'?
- ד. האם המאירוע: "חולב חמוץ" ו- "יוצר במחלב'A'" בלתי תלויים?
3. רוני ורונה יצאו לבנות במרכזי בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
 בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
 בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
 בהסתברות של 0.7 הם ייצאו לפחות אחד מהם, באולינג/קפה.
 א. מה ההסתברות שהם ייצאו רק לבאולינג?
 ב. האם המאירוע "lezat labaueling" לезת לבאולינג" לезת לבית קפה" זרים?
 ג. האם המאירוע "lezat labaueling" לезת לבאולינג" לезת לבית קפה" תלויים?
 ד. מה ההסתברות שיום אחד הם ייצאו רק לבאולינג וביום לאחר מכן לא ייצאו אף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עבר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמיים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתוואר.
- מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 - אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 - מה אחוז הסטודנטים שפזרים מהתוואר?
 - nbcharo 2 סטודנטים אקראים רוניית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסויימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכל 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 - nbcharo אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 - נגדיר את המאורעות הבאים :
- A- נבחר אדם מובטל
B- נבחר גבר
האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות رجالים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדייהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטייל אותו פעמיים. נסמן ב-A את החלטה הראשונה ראש, ב- B את ההחלטה השנייה ראש.
- חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
 - האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
 - ידעו שבהחלטה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הווגן?

- .7. עורך מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסםמודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב מסוומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה לפחות אחת מהמודעות.
- א. מה אחוז האנשים מלאה שמעוניינים לרכוש רכב מסוומש יראו את 2 המודעות?
 ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
 ג. האם המאירועות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לעורך בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לעורך בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לעורך בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם מעוניין לרכוש רכב מסוומש יתקשר לעורך?
 2. אדם מעוניין לרכוש רכב מסוומש התקשר לעורך. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

.8. נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלויhhh בהסתברות P .

כדי שהמערכת תפעל צריך לעبور זרם מהנקודה A לנקודה B.
 הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P + (1-P)(2P - P^2)^2$$

פתרונות: **שאלה 1**

- א. 0.25
 ב. 0.75
 ג. 0.6
 ד. 0.5 .

 שאלה 2

- א. 0.2
 ב. 0.267
 ג. 0.524
 ד. המאורעות תלויים.

 שאלה 3

- א. 0.2
 ב. המאורעות אינם זרים.
 ג. המאורעות הללו תלויים.
 ד. 0.06

 שאלה 4

- א. 0.94
 ב. 0.255
 ג. 0.03 .
 ד. 0.168 .

 שאלה 5

- א. 15%.
 ב. 0.692
 ג. לא זרים ותלויים.

 שאלה 6

- א. 0.65
 ב. A ו-B תלויים.

ג. 0.5384

 שאלה 7

- א. 8%
 ב. 0.733
 ג. תלויים.
 ד. 0.478 .1 .
 א. 0.15 .2

פרק 14 - המשטנה המקרי הבודד - פונקציית ההסתברות

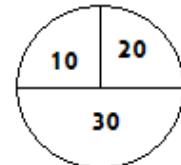
רקע:

משטנה מקרי בודד : הנו משטנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשטנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשטנה את ההסתברות שלו.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמורה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד (פתרו בהקלטה).

תרגילים:

1. ידוע שביבישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
 50 משפחות אין מחזיקות McMONEY.
 70 משפחות עם McMONEY אחת.
 60 משפחות עם 2 McMONEY.
 20 משפחות עם 3 McMONEY.
 בוחרים באקראי משפחה מהיבישוב, נגידר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.
 בנו את פונקציית ההסתברות של X.
2. מהאותיות A,B,C יוצרים קוד דו טווי.
 א. כמה קודים ניתן ליצור?
 ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
 ג. נגידר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של X.
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ו מבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתון שהסיכוי לעبور את המבחן בכלכלה הנז 0.8 והסיכוי לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הנז 0.9. הסיכוי לעبور את שני המבחנים הנז 0.75. יהיו X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של X.
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחקים את המשחק עד אשר הוא מנצח אך ככל מקרה הוא לא משחקים את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגידר את X להיות מספר הפעם שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של X.
5. חברת ניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט Ai יצליח הינו 0.7 הסיכוי שפרויקט Bi יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט Gi יצליח הינו 0.9. נתון שההצלחה של פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגידר את X להיות מספר הפרויקטים שיצלחו. בנה את פונקציית ההסתברות של X.

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי

כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של A.

7. בגין ילדים 8 ילדים מתוכם 5 בניים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגידיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8. בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורות חדשות של ערוצים 1,2,10.

להלן הנתונים :

20% צופים בערוץ 2.

8% צופים בערוץ 1.

10% צופים בערוץ 10.

כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.

10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלשה.

נגידיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו

את פונקציית ההסתברות של X.

פתרונות **שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

 שאלה 4

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

 שאלה 5

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

 שאלה 6

10

פרק 15 - המשטנה המקרי הבודך - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$\boxed{E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu}$$

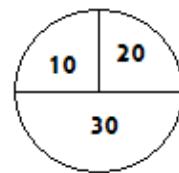
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהילה אינסוף פעמים כמו בממוצע נקבע. התוחלת היא צפי של המשטנה המקרי.

שונות – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

סטיית תקן – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביר התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמורה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 \\ = 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

תרגילים:

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכיה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

40	20	0	-30	X
0.2	0.3	0.1	0.4	$p(X)$

מהי התוחלת, השונות וסטיית התקן של X ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50%
חובו בנק בסניף הפועלים של היישוב. ל-40% חובו בנק בסניף הלאומי של היישוב. ל-20%
מהתושבים הבוגרים אין חובו בנק בישוב. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חובו.

חשב את $E(X)$

3. ידוע של- 20% מהמשפחות יש חיבור לוויין בبيתם. בסקר אדם מבחן לראיון משפחה המחויבת
ללוויין. הוא מטלפן באקרי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחויבת ללוויין. בכל
מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X .

4. לאדם צורר מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את
המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסחה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו
שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		$P(x)$

$$\text{כמו כן נתון ש: } E(X) = 4.2$$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5 ו 10. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.

מצא את פונקציית ההסתברות.

7. להלן ההתפלגות של המשתנה מקרי X .

X	P
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{4}$

מהו ערך K שייתן ערך מינימלי לשונות של X .

פתרונות: **שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

 שאלה 3

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

 שאלה 4

.א

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

 שאלה 5

.א

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

 שאלה 6

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

 שאלה 7

2.33

פרק 16 - המשטנה המקרי הבודך - טרנספורמציה ליניארית

רקע

מצב שבו מבצעים הכפלת קבועה או הוספה של קבוע על המשטנה המקורי. (כולל גם חלוקה של קבוע והחיסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

או:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

שלבי העבודה:

1. נזחה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התוצאות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזחה את ערכי a ו b .
4. נציב בנוסחאות שלילם בהתאם לממדים שנשאלים.

דוגמה - הרולטה:

בහמץ לנוטני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 לפ' מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק ?

פתרון (בહקלה)

чисובנו קודם :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

תרגילים:

1. סטודנט ניגש ל- 5 קורסים הסטטוסטר. נניח שככל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שישים היא 3.5 עם שונות 2.

2. תוחלת סכום הזכיה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכיה במשחק. עלות השתתפות המשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח המשחק?

3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטיית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$. Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $X = 7 - Y$.
חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

5. אדם החליט לבטח את רכבו, שוויי רכבו 100,000 ₪.
להלן התוצאות האפשריות והסתברותן:
בהתברות של $1/1000$ תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי ממחצית משווי הרכב.
בהתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רביע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל.
החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית באלפי ₪
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הניל?

6. יהי X מספר התשובות הנכונות ב מבחון בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה :

10	9	8	7	6	5	X
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(x)$

כמו כן נתון שצפוי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

א. השלימו את פונקציית ההסתברות.

ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.

ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא : כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה מופחתת נקודה. מהי התוחלת והשונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי קלשוי :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

א. מצא את ערכו של A .

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את $E(X^3)$

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא : $\frac{X}{2} - 4$

פתרונות: **שאלה 1:**

תוחלת: 14 שונות: 32

 שאלה 2:

תוחלת: 8 שונות: 12

 שאלה 3:

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

 שאלה 4:

תוחלת: 3

שונות: 3

 שאלה 6:ב. $V(X) = 1.8275$ **שאלה 7:**א. $10 = A$

$$E(X) = 3$$

$$V(X) = 1 \quad .\text{ב}$$

$$E(X^3) = 35.4$$

$$V(X^3) = 616.84 \quad .\text{ג}$$

$$E(y) = -2.5$$

$$V(y) = 0.25 \quad .\text{ד}$$

פרק 17 - תוחלת ובדוקות של סכום משתנים מקרים

רקע:

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקרים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקים מזול בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכיה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכיה של המשחק השני היא 2. עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכיה הכלול של שני המשחקים יחד?

תרגילים:

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות

5. ידוע שההשקות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.

מה התוחלת והשונות של הרווח הכללי מהשקה בשתי המניות יחד?

2. X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי

סטיית התקן של $X+Y$?

3. אדם משחק בשני משחקים מולבלים תלויים זה בזה:

X = סכום הזכיה במשחק הראשון.

Y = סכום הזכיה במשחק השני.

נתון:

$$\sigma(X) = 3 \quad E(x) = 10$$

$$\sigma(Y) = 4 \quad E(y) = 12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכיה בשני המשחקים?

4. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ש' הוא חצי וב-10 ש' רבע כך גם ב- 20 ש'. מה היא התוחלת

והשונות של סכום הזכיה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים.

5. נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

$$P(X = K) = \begin{cases} \frac{A}{K-1} & K = 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את ערכו של A .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

ג. נלקחו ח' משתנים מקרים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות ח' את תוחלת
והשונות של סכום המשתנים.

פתרונות: **שאלה 1**

תוחלת : 9

שונות : 15

 שאלה 3

תוחלת : 22

סטיית תקן : 5

 שאלה 4

תוחלת : 90

שונות : 275

 שאלה 5

$$A = \frac{12}{25} = 0.48$$

א.

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

פרק 18 - התפלגותים בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

רקע:

נגידר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנה ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כשלון" כמו: מוצר פגום או תיקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבח וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.

מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכל.

נסמן ב q את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב p את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$

פונקציית ההסתברות של X :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \quad ; \quad 0! = 1$$

לගודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$\text{תוחלת: } E(X) = np$$

$$\text{שונות: } V(X) = npq$$

שימוש לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.

2) חוזרים על הניסוי תפעמים.

3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכל.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבודוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדרשו ושיש להם רישיון נהיגה?

תרגילים:

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלה. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה.
נדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

- א. מהי ההסתברות של X?
- ב. מה ההסתברות שהיא בדיקן מובטל אחד?
- ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
- ד. מה ההסתברות של שלושה יעבדו במדגם?
- ה. מה ההסתברות של לפחות אחד יהיה מובטל?
- ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי.נדיר את X כמספר האנשים שנדרגו עם סמארט-פון.

- א. מהי ההסתברות של X? הסבירו.
- ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
- ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
- ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר האנשים שנדרגו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונית מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב- 20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמර נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

- א. מה ההסתברות שייפסיד בכל המכונות?
- ב. מה ההסתברות שיזכה בבדיקה בשתי מכונות?
- ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה- 30 ₪ שהשקייע?
- ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרוחות נטו של המהמר (הזכויות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו :

השכלה	نمוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראים מעל גיל 30 מהמדינה הניל.

- א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
- ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5. במכלה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם וمبין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכלה.

א. השומר בשער המכלה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכלה. מה ההסתברות שבקרוב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכלה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכלה ברכבם?

6. בבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש לבחן והסıcıוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מוחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שرك אחת מהן נכונה.

א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכונה?

ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיקת 16 שאלות?

ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה שגגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7. 5% מקו היוצר פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטרון. בכל קופסה 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.

א. מה ההסתברות שב קופסה אקראית לפחות מוצר אחד?

ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר אחד?

8. מטילים מטבח הוגן 5 פעמים. נגדיר את X – מספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את $E(X)$.

פתרונותות : **שאלה 7 :**

- א. 0.401
 ב. תוחלת : 8.025
 סטיית תקן : 2.193

 שאלה 2 :

- ב. 0.2335
 ג. 0.1493
 ד. תוחלת : 7
 סטיית תקן : 1.449

 שאלה 8 :

7.5

 שאלה 3 :

- א. 0.5314
 ב. 0.0984
 ג. 0.1143

ד. תוחלת : -18

סטיית תקן : 14.697

 שאלה 4 :

- א. 0.1789
 ב. 2

 שאלה 5 :

- א. 0.1956
 ב. 0.4253

 שאלה 6 :

- א. 0.85
 ב. 0.182
 ג. תוחלת : 82 נקודות
 שונות : 91.8 נקודות

פרק 19 - התפליגיות בדידות מיוחדות - התפליגות גיאומטרית

רקע:

חוורים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.

X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.

נסמן ב k את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

פונקציית ההסתברות:

$$k = 1, 2, \dots \infty \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$\text{תוחלת: } E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{שונות: } V(X) = \frac{q}{p^2}$$

תכונות חשובות :

אם X מתפלג על פי התפליגות גיאומטרית, אז X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו,

$$P(X = n+k) / P(X > k) = P(X = n)$$

$$P(X > k) = q^k$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים יש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק.

ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי התפליגות של מספר הcadורים שהויצאו?
- ב. מה ההסתברות שהויצאו בבדיקה 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהויצאו יותר מ 5 כדורים?
- ד. אם הויצאו יותר מ- 3 כדורים . מה הסיכוי שהויצאו בבדיקה 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הcadורים שהויצאו?

תרגילים:

1. קו ייוצר המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. שידוגם 3 מוצרים.
- ב. שידוגם 4 מוצרים.
- ג. שידוגם 5 מוצרים.
- ד. שידוגם יותר מ-7 מוצרים.
- ה. שידוגם לא פחות מ-8 מוצרים.

2. צילום שבוצע במכון הרנטגן "Y-RAY-X" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא יוצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.

- א. מה ההסתברות שיצטלים בסך הכל 3 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שהצטלים יותר מ-4 פעמים?
- ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצלומים שייבצע?
- ד. כל צילום עולה למכון 50 נק. אדם משלם על צילום תקין 100 נק. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".

- א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
- ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
- ג. אם ידוע שבשתי הטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלוי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
- ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלוי"?

4. 30% מהמכוניות בארץ הן ב泝 לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.

- א. מה ההסתברות שביוום מסוים בדיקת מחצי מהמכוניות בחניון יהיה לבן?
- ב. מה תוחלת מספר הימים שייעברו מהיום עד לראונה מחצי מהמכוניות בחניון יהיה לבן?

5. אדם משחקים במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שি�יחק את המשחק 10 פעמים.
מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בבדיקה 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות ששישחק את המשחק בבדיקה 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באירועים אוטומוט. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התוויות על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

- א. מה ההסתברות שייאכל לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?
- ב. אם הוא דוגم פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דוגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצור 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדוגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדוגם האדם?

פתרונותות : **שאלה 2 :**

א. 0.009

ב. 0.0001

ג. תוחלת : 1.111

שונות : 0.1234

ד. תוחלת : 44.4

שונות : 308.5

 שאלה 3 :

א. 0.999

ב. 0.875

ג. 0.03125

ד. 1

 שאלה 4 :

א. 0.1029

ב. 9.72

 שאלה 5 :

א. 0.06

ב. 0.7176

ג. 0.0729

ד. 9.487 ממשחקים

 שאלה 6 :

א. 0.015

ב. 0.0215

ג. $2777\frac{7}{9}$ תוחלת , שונות $63\frac{1}{3}$ ד. 1.054 תוחלת , שונות $\frac{2}{3}$

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

התפלגות זו הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות.
הערכים המתאפשרים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = K) = \frac{1}{b-a+1}$$

$$K = a, a+1, \dots, b$$

$$\text{תוחלת: } E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{שונות: } V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

תרגילים :

- .1. במשחק הלווטו 45 כדורים ממושפרים מס' 1 ועד מס' 45. נתבונן במשתנה X המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- חשבו את $P(X = 2)$
 - חשבו את $P(X \leq 30)$
 - חשבו את $P(X > 41 | X \leq 10)$
 - חשבו את $P(X = k)$
- .2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל- 100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
- מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
 - הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר :
 - מה ההסתברות שלושה מהם יבחרו מספר גדול מ- 80?
 - מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו? - יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
 - מהי ההסתפוגות של X ?
 - מה התוחלת של X ?
 - קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב- 4 הטלות?
- .4. בצד 10 כדורים שرك אחד צבע אדום. אדם מוציא כדור ללא החזרה עד אשר מתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר ה כדורים שהויצאו?
- .5. יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל- 50 כולל.
- מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
 - מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ- 20?
 - אם נבחר מספר גדול מ- 20 מה ההסתברות שהוא קטן מ- 28?
- .6. הוכח שאם $E(X) = \frac{a+b}{2}$ אז מתקיים ש $X \sim U(a,b)$

פתרונותות :**שאלה 1 :**

$$\frac{1}{45} \text{ א. תשובה :}$$

$$\frac{30}{45} \text{ ב. תשובה :}$$

ג. תשובה : 0.6

שאלה 2

א. תוחלת : 50.5

סטטיסטית התקן : 28.87

ב. 1. תשובה : 0.08192

ב. 2. תוחלת : 303 סטטיסטית התקן : 70.71

שאלה 4 :

תוחלת 5.5

שונות : 8.25

פרק 21 - התפלגויות בדים מיוחדות- התפלגות פואסונית

רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.
 λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הניל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.
 ככלומר, כמה במסמך אירועים קוראים ביחידת זמן.

$$X \sim pois(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חיבת להופיע כנתון בשאלת וכאן לא יהיה צורך לזיהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots \infty$$

התוחלת והשונות של התפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של התפלגות:

- בהתפלגות זו הפרמטר λ פורפרצionaliy לאינטראול הזמן שעליו דנים.
- אינטראולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

- במועד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
- א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבשני דקות יגיעו 12 פניות?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכך 12 פניות?
 - ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

תרגילים:

1. בМОוד טלפוני מתאפשרות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסוני.
 א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 ג. מה ההסתברות שבדקה יתרו לכל היתר 2 פניות?
 ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסוני עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנים 5 עמודים.
 א. מה ההסתברות שהחלק זה בדיק 18 טעויות?
 ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכל בכל החלק ישן 15 טעויות?
 ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכל 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסוני עם סטיית תקן של 2 תאונות בשבוע.
 א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנה שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיק שבוע אחד בו יהיו תאונות דרכים קטלניות?

4. לחנות AMPM השכונתי מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסוני עם ממוצע של 2 ל Kohot לדקה.
 א. מה ההסתברות שבדקה כלשי יהיו בדיק 3 Kohot?
 ב. מה ההסתברות שבדקה כלשי יגיע לפחות ל Kohot אחד?
 ג. מה ההסתברות שבדקה כלשי יהיו לכל היתר שני Kohot?
 ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסוני עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר מתקבל שעה עם בדיק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-20:08 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-10:08 היו

בדיק 6 חשבונות?

פתרונותות : **שאלה 1 :**

- א. 0.0337
 ב. 0.9933
 ג. 0.1246
 ד. 5

 שאלה 2 :

- א. 0.084
 ב. 0.099
 ג. 0.151

 שאלה 3 :

- א. 4
 ב. 0.407

 שאלה 5 :

- א. 0.2388
 ב. 0.2196
 ג. 0.6948

 שאלה 6 :

- א. 16.7
 ב. 0.0708

פרק 22 - קירוב פואסוני להסתברות הבינומית

רקע:

אם ($X \sim B(n, p)$ עבור n גדול ו- k קטן) ניתן לקרב את ההסתברות להיות פואסונית כאשר

$$\lambda = np$$

כאשר פונקציית ההסתברות של ההסתברות הפואסונית כזכור היא :

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

הערה : יש הטענים, כי n 'גדול' ו- k 'קטן' משמעו : $np \geq 10$ ו- $p \leq 0.1$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בקו ייצור המוני 10% מהמוצריים כחולים . בוחרים באקראי 20 מוצריים מקו הייצור .
חשבו את ההסתברות שמתוך המוצריים שיבחרו בדיק 1 יהיה כחול .
פעם לפי ההסתברות הבינומית ופעם לפי הקירוב הפואסוני .

תרגילים:

1. במדינת שומקום 10% מהאוכלוסייה מובטלה . נגמו 10 תושבים אקרים מאותה מדינה. חשבו את הסיכוי שבמדגם יהיה לכל היוטר מובטל אחד. השוו את התוצאה לקרוב הפואסוני.
2. מקו ייצור המוני נגמו 1000 מוצרים. ידוע ש- 5% מהמוצרים בקו הייצור פגומים. מה הסיכוי שבמדגם יתקבלו 45 מוצרים פגומים?
3. 1% מההתושבים באוכלוסייה גدولת חולים במחללה מסויימת . בסניף קופת חולים נרשמו 2000 תושבים אקרים. חשב לפי הקרוב הפואסוני שבדיווק 18 מהם יהיו חולים.
4. בעיר ניו יורק ישם כתשעה מיליון תושבים מתוכם 900 אלף אסיאתים . מה בקרוב ההסתברות שמתוך 100 תושבים אקרים לפחות שני אסיאתים?

פתרונותות :**שאלה 1 :**

ללא קירוב 0.7361 עם קירוב : 0.7358

שאלה 2 :

0.0458

שאלה 3 :

0.0844

שאלה 4 :

0.9995

פרק 23 - המשטנה המקרי הבודד - שאלות מסכימות

תרגילים:

1. נתון ש :

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

- א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של X .
- ב. $4 - 2X = W$, חשב את התוחלת וסטיית התקן של W .
- ג. $Y = X + T$, חשב את התוחלת של T . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?
2. ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים. משחק אחד בכל מכונה (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לניצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לניצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.
- א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?
- ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שעורך ניצח בשני המשחקים בבדיקה פעם אחת מתוך חמישה?
3. לאדם צורר מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת שלו בביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
- א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
- ב. חשב את התוחלת והשונות של X .
- ג. כל ניסיון לפתח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכלול לפתיחה הדלת?
4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסוני בקצב של 6 התקלות ביום.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלת אחת?
- ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בבדיקה 6 ימים בהם לפחות תקלת אחת?
- ג. מה תוחלת מספר הימים שייעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלת אחת?

5. בעל חנות גודלה בקניון שם לב ש-40% מהמטופרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמטופרים הנרכשים עבור ילדים הם מטופרת חוץ, וכן גם 60% מהמטופרים הנרכשים עבור נשים זו מוצר מטופרת חוץ.
- א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מטופרת חוץ?
- ב. יהיו X - מספר המטופרים שימכרו בחנות זו מפתיחה ביום א' בובוקר, עד (וכול) שלראשונה יימכר מוצר מטופרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
- ג. מהי תוחלת מס' המטופרים מטופרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מטופרת הארץ?
- ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מטופרים. מה ההסתברות שבדיווק 3 מהם הם מטופרת חוץ?
-
6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "חכבי" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.2.
ידעו כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
- ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרוחות (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
-
7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם טוב. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמיים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיקת 5 סוכריות.
- א. נבחרה שקית וננתן שבשקית פחות מ- 3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכרית אדומה אחת?
- ב. בוחרים באקרים שקיית אחר שקיית במטרה למצוא שקיית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 השקיות?

8. מבחן בניו שני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התוכנן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשלק אחת נכון. בחלק זה הוא מנסה את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבדיקה כולה?

9. יהיו X משתנה מקרי המקיים $2 = E(X) \text{ ו } 1 = E(X^2)$. חשב $E(X - 5)^2$.

10. הסיכוי לעبور מבחן הנהיגה הינו P . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות לשניים מהם

יעברו את מבחן הנהיגה גבוהה פי 3/8 מהסיכוי שככל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P .

תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עבר אותה.

ב. מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק ב מבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שייאלץ לגשת לפחות לחמשה מבחנים בסך הכל?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשולשה מבחנים ועודין לא עבר. מה ההסתברות שבסוף דבר יעבור ב מבחן הנהיגה החמישי?

11. רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע χ צעדים ובכל צעד הוא נזקקי P ימינה ביחידת אחת ובסקיי $P-1$ שמאליה ביחידת אחת. נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר χ צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- χ .

12. למטרע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטרע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקרים לפי מספר הפעמים שהטלו את המטרע מההתחלת ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רוחת המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרוחת באמצעות P .

ג. אילו ערכי P המשחק כדאי?

פתרונות: **שאלה 1:**

א. תוחלת: 2

סטיית תקן: 1

ב. תוחלת: 0

סטיית תקן: 2

ג. תוחלת: 4.5

סטיית תקן: לא ניתן

 שאלה 2:

א. 0.03

ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875

ג. 0.1328

 שאלה 3:

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

שונות: 2

ג. תוחלת: 1.5

שונות: 0.5

 שאלה 4:

א. 0.9975

ב. 0.0172

ג. 1.0025

שאלה 5 :

- א. 0.375
ג. 0.6
ד. 0.282

 שאלה 6 :

- ב. תוחלת : 1.5
שונות 0.61
ג. תוחלת : 0

סטיטית תקן : 4.68

 שאלה 7 :

- א. 0.4348
ב. 0.0923

 שאלה 8 :

- א. 2.013
ב. 0.5256
ג. תוחלת : 8

שונות : 1.6

- ד. תוחלת : 10.5
שונות 3.475

 שאלה 9 :

10

 שאלה 10 :

- א. 0.6
ב. 0.0384
ג. 0.0256

ד. תוחלת : 0.67

שונות : 1.11

ה. 0.24

 שאלה 12 :

$$\frac{1 - 2p^2}{p}.$$

$$0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

פרק 24 - המשטנה המקרי הרציף - התפלגיות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה עוסק בהתפלגות של משתנים מקרים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בנגדוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשטנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנדרשת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כleshuv (x) f.

השיטה שמתוחת לפונקציית הצפיפות נותנת את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשיטה הכלול שמתוחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

פונקציית התפלגות מצטברת:

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

כמו כן :

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad p(X > t) = 1 - F(t)$$

תוחלת של משתנה רציף :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$$

שונות של משתנה רציף:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת של פונקציה של X :

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

אחוזוניים :

ה אחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו : x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר :

$$p(X \leq x_p) = p$$

ריענון מתמטי:נוסחאות לחישוב שטחים:

שטח משולש : גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2 :

$$S_{triangle} = \frac{h \cdot a}{2}$$

שטח מלבן : אורך(a) כפול רוחב(b) :

$$S_{rectangle} = a \cdot b$$
משוואת קו ישר:

$$y = mx + n$$

m = שיפוע.

n = נקודת החיתוך עם ציר ה-y.

שיעור של ישר העובר דרך שתי נקודות : $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודת ספציפית (X_1, Y_1) ושיעורו ידוע m :

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + c$$

$$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} \right| - \cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

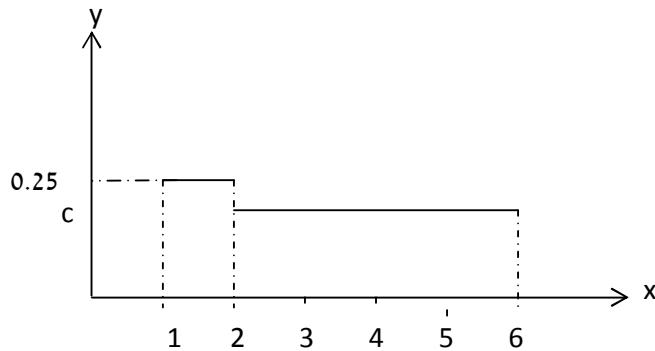
$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

תרגילים:

1. X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמפורט בשרטוטו :



א. מצא את ערכו של c .

ב. בנה את פונקציית ההסתברות המוגדרת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות :

$$P(x < 4) \quad .1$$

$$P(x > 1.5) \quad .2$$

$$P(1.5 < x < 5) \quad .3$$

$$P(5 < x < 10) \quad .4$$

ד. מצא את החכיזון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא :

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

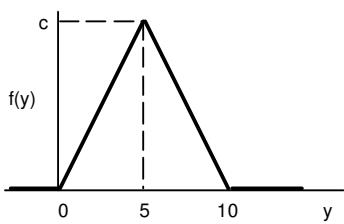
$$\text{ידוע ש } P(0 < X < 1) = 1/4$$

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X .

ב. מצאו את החכיזון של X .

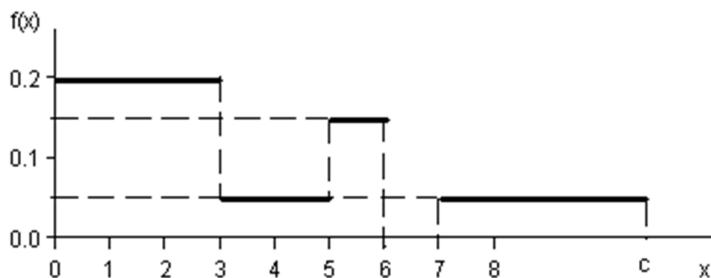
ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y :



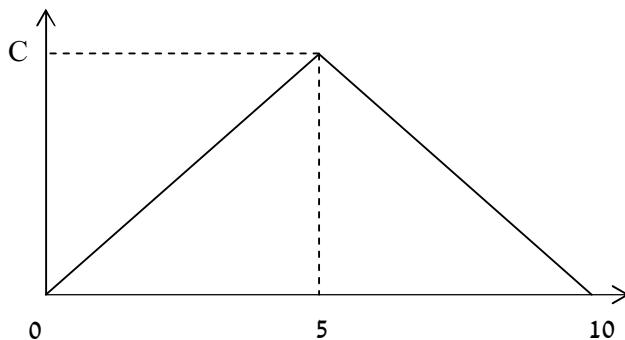
- מצאו את c .
- מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
- חשבו את הסתברויות : $P(Y>4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$.
- מצאו את העשרון התיכון $y_{0.1}$, הרבעון התיכון $y_{0.25}$ והחציון של Y . הסיקו מהו העשרון עליון $y_{0.9}$.

4. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



- מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.
- מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת .
- חשבו את הסתברויות הבאות : $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

5. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :



- א. מה ערכו של C ?
- ב. מצא אינטגרול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכון ליפול בו הינו 0.5.

6. נתונה פונקציית צפיפות $f(X) = \frac{2}{x}$ פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

- א. מצא את ערכו של K.
- ב. בנה את פונקציית ההסתפלגות המצטברת.
- ג. חשב את הסיכון ש-X לפחות 1.5.
- ד. מצא את העשרון התחתיון של ההסתפלגות.
- ה. מה התוחלת של X?

7. נתונה פונקציית צפיפות הבאה : $f(X) = AX^2(10 - X)$ $0 < X < 10$ A הינו קבוע חיובי.

- א. מצא את A.
- ב. חשב את $P(x > 5 | x > 2)$.
- ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

$$f(x) = 0.5 \cdot e^{2x}$$

$$-\infty \leq X \leq \ln(c)$$

8. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X :

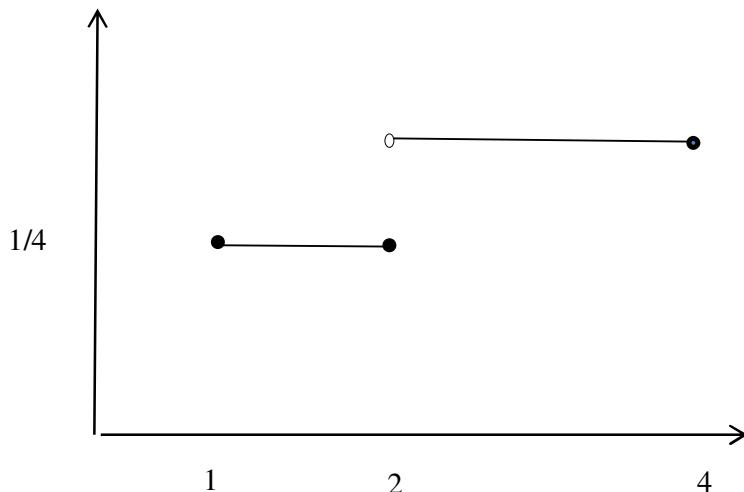
א. מצא את ערכו של c .

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המיצטברת של ההסתפלגות.

ג. חשב $P(X > 0)$.

ד. מהו הרביעון העליון של ההסתפלגות?

9. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :



א. רשם את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ב. בנה את פונקציית ההסתפלגות המיצטברת.

ג. מצא את החציון של ההסתפלגות.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.

ה. חשב את $E(X^3)$.

10. במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות

הבא :

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?

ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיק חצי שעה?

ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראים מסווג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור

שליהם יהיה גדול מ 20 דקות?

11. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתי מתפלג עם פונקציית ההתפלגות

המצטברת הבאה :

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
- ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאלאז לחכות בסך הכל לפחות מרביע שעה?
- ד. מהו הזמן ש90% מה לקוחות מחכים מתחתיו?

12. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b .
- ב. חשבו את התוחלת של X .
- ג. Y הוא משתנה אינדיקטורי המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y ?

13. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של K .
- ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ג. חשבו $p(x > 2.5)$

14. להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

א. מצא את פונקציית ההסתפלגות המוגדרת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההסתפלגות.

ג. מצא את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

פתרונות: שאלה 2 :

- b=2 c=0.5
א. 1.41
ב. 0.0625
ג.

 שאלה 1 :

$$3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16}$$

 שאלה 4 :

10. א

 שאלה 3 :

0.2. א

ג. 0.32, 0.125, 0.18

ד. העשרון התיכון : 2.24

הרביעון התיכון : 3.54

החציון : 5

העשרון העליון : 7.76

 שאלה 6 :

$$\frac{1}{e^2}$$
. א

ג. 0.189

ד. 1.051

ה. 1.297

 שאלה 5 :

C=0.2. א

$$5 \pm 1.46$$
. ב

 שאלה 8 :

א. 2

ג. 0.75

ד. 0.549

 שאלה 7 :

א. 0.0012

ב. 0.7067

ג. תוחלת : 6, שונות : 4

שאלה 9 : שאלה 10 :

$$\frac{7}{27}$$

א.

$$2\frac{2}{3}$$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ב.

$$3.704$$

ג.

$$23.4375$$

ה.

 שאלה 12 :

$$\frac{2}{3}$$

א.

$$0.0498$$

ב.

$$5.22$$

ג.

$$0.6321$$

ד.

$$\frac{2}{9}$$

 שאלה 14 :

ב. תוחלת :

 שאלה 13 :

$$\frac{1}{6}$$

$$0.229$$

ג.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות :

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

פרק 25 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.
λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$$() \sim X \text{ כאשר } 0 > \lambda$$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגום או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ לכל } x \geq 0$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא :

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון : $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

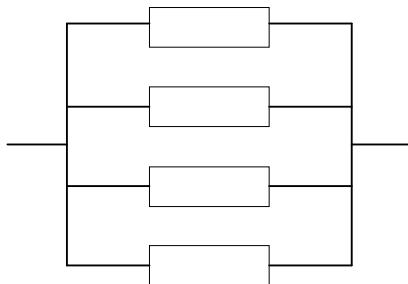
דוגמה : (פתרון בהקלטה)

- אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.
- מה ההסתברות ששוללה תחזיק מעמד לפחות 9 שעות?
 - מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?
 - אם סוללה כבר חייה מעל שעתים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכל?

תרגילים:

1. הזמן שŁוקח במערכת עד שתתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
- מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-5.0 שעה?
 - מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
 - מץ את הזמן החזיני להתרחשויות התקלה במערכת.
2. הזמן שעובר בכיביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
- מה סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - מה הסתברות שהטאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - מהי ההסתברות שהטאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?
3. משך הזמן X (בדיקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
- מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך לפחות מרבע שעה?
 - מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רביע שעה לחצי שעה?
 - אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
 - מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?
4. בממוצע מגיעים לחדר מיוון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
- שוליה המזקירה הגעה לחדר המיוון. מה ההסתברות שזמן המתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
 - אם שוליה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתינה יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשישי יש להמתינה פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפעילים במקביל כמוראה בشرطו:



- על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהרכיבים יהיה תקין.
אורך החים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שניות.
- מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שניות לפחות?
 - משמעותי להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספה רכיב היא K ש. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שניות נגרם הפסד של A ש. מה התנאי שבו יהיה כדי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות: **שאלה 1 :**

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

 שאלה 2 :

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

 שאלה 3 :

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד. 69.08.

 שאלה 4 :

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

 שאלה 5 :

א. 0.8403

ב. K>0.0588

פרק 26 - התפלגיות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b .

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

התוחלת:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה: (פתרונות בהקלטה)

X- משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל- 40.

- א. מה הסיכוי ש- X קטן מ-25?
- ב. מה התוחלת והשונות של X?

תרגילים:

1. משך (בדיקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג ($U(13, 16)$.
 א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של משך הפסקה?
 ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ- 15 דקות?
 ג. מהי ההסתברות שמשך הפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
 א. הסבר כיצד מתפלג זמן המתנה לרכבת?
 ב. אם זמן המתנה לרכבת ארוך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ- 8 דקות?
 ג. מה תוחלת מספר הימים שייעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגבייע מתפלג אחד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
 א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגבייע יהיה מעל 108 גרם?
 ב. נתון שהגלידה בגבייע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
 ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגבייע?

פתרונות: **שאלה 2 :**

$$X \sim U(0,10)$$

א. 0.6

ב. 10

 שאלה 1 :

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$ **שאלה 3 :**

א. 0.2

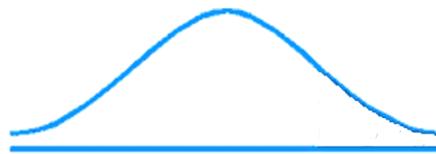
ב. $\frac{2}{7}$

ג. 109

פרק 27 - התפלגות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנו משתנים רציפים מסוימים שנוהג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראה כmo פעמן:



לעומתה זו קוראים גם עוקמת גaus ועוקמה אחת נבדلت מהשניה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלו. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

נוסחת פונקציית הצפיפות:

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטיים שמתוחת לעוקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל ההתפלגות נורמלית לסטנדרטית על ידי תהליך הנקרא **תקנון**.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא ההתפלגות נורמלית שהממוצע שלו הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא מסומן באות Z .

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי נוסחה הבאה :

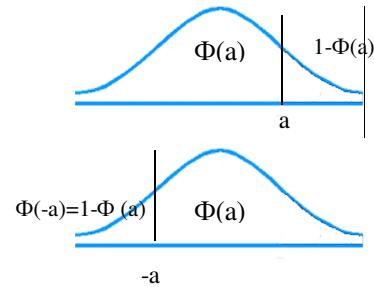
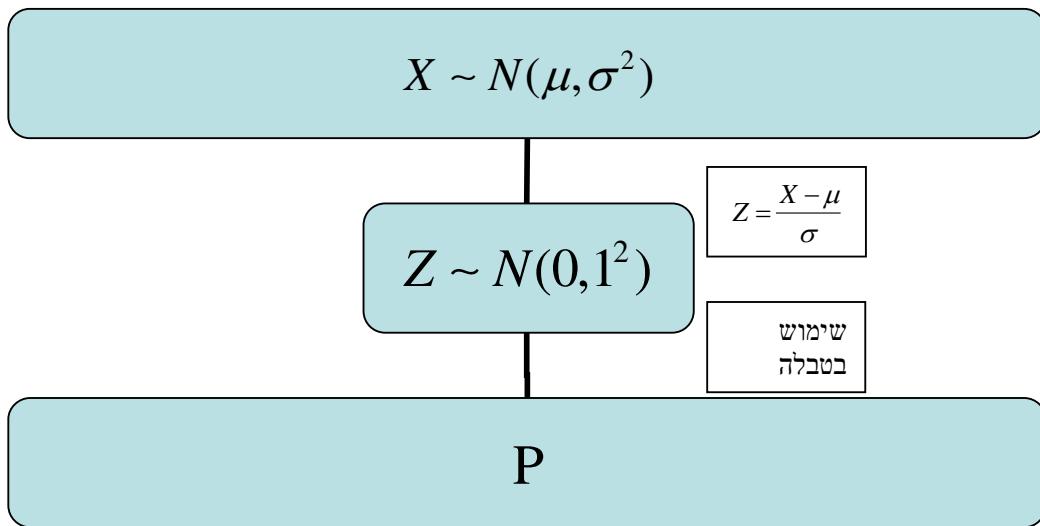
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי התקנון מקבלים ערך הנקרא **ציון תקו.**

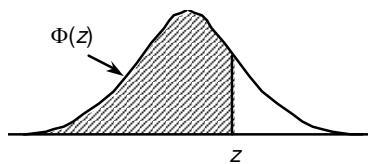
ציון התקון משמשו בכמה סטיות תקו הערך סוטה מוה ממוצע.

לאחר חישוב ציו התקון של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



טבלת ההסתפוגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערבי ($\Phi(z)$)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה: (הפתרו בહקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרת בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל של 90% מהחפיסות בכו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם בדיקן 173.6 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
2. נתון שהזמן שלוקח לטיפול רפואי מסוימת מהטיפול נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבעות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן הטיפול תזריר יותר משעה?
 - מה אחוז מהקרים שבחון הטיפול תזריר בין 35 ל-37 דקות?
 - מה הסיכוי שהטיפול תזריר בדיקן תוך 36 דקות?
 - מה שיעור המקרים שבחון ההשפעה של הטיפול תסתיים מ-30 דקות לפחות מ-3 דקות?
3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
 - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
 - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמוצע ללא יותר מ- 4 ק"ג?
 - מה הסיכוי שאדם אكري ישקל מתחת ל – 140 ק"ג?
4. משקל תינוקות ביום היולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
 - מצאו את האחוזון ה-95.
 - מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטיליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
- מה העשירון העליון של הציונים ב מבחן האינטיליגנציה?
 - מה העשירון התיכון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש- 20% מהבוחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה- 20?
 - מהו הציון ש- 5% מהבוחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש 33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שלחחים בבקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יהיה פחות מ- 460 שעות?
 - מהו המאון העליון של אורך חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים קצר ביותר נשלחים לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשילוח מכשיר לבדיקה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבועות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. החותפלוגיות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
- ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?
- א. בעשרון העליון.
 - ב. בממוצע.
 - ג. בשונות.
- ג. לאיזו התפלגות סטיתת התקן הקטנה ביותר?
- א. 1
 - ב. 2
 - ג. 3
 - ד. אין לדעת.
9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטיית התקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות רבע השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו 10:08 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:09. מה הסיכוי שיאהר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסעה הכוללי יהיה פחות מ- 50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמשה ימי עבודה) בדיקות פעם אחת יהיה זמן הנסעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטיית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתים אב. הסתברות שלפחות אחד מהם מוצאי בחודש מעלה-ט 0.98976 .
- מה ערכו של ט?
 - מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעלה-ט?
 - מסתבר שנפה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשתי של כל בתים אב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המונגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
 - מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
 - ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שייהו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
 - בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיקן היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונותות :

<u> שאלה 3</u>	<u> שאלה 1</u>
26.43% א.	89.25% א.
89.44% ב.	2.28% ב.
39.44% ג.	0 ג.
0.383 ד.	50% ד.
100% ח.	

<u> שאלה 7</u>	<u> שאלה 5</u>
500 א.	119.2 א.
100 ב.	80.8 ב.
0.3446 ג.	112.6 ג.
733 ד.	87.4 ד.
267 ח.	

<u> שאלה 9</u>	<u> שאלה 8</u>
0.1587 א.	3 א.
0.0228 ב.	ב. בממוצע.
0.8563 ג.	1 ג.
0.3975 ד.	

<u> שאלה 11</u>	<u> שאלה 10</u>
0.1359 א.	1925 א.
0.675 ב.	0.2266 ב.
100 ג.	0.1587 ג.
0.25 ד.	

פרק 28- משתנה דו מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת

רקע:

התפלגות דו מממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים.

נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו מממדית.

בפונקציה שכזו יש התפלגות של שני משתנים בו זמינות : X ו Y .

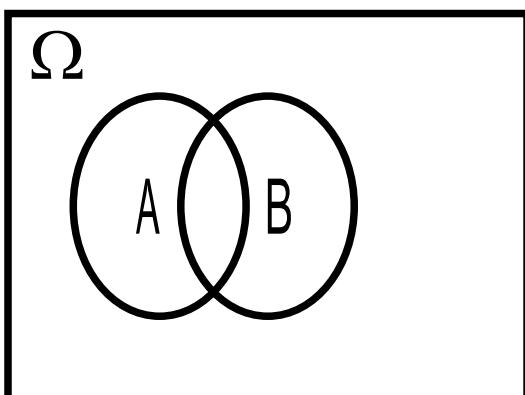
דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ובבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתנו שהסיכוי לעبور את המבחן בכלכלה הנז 0.8 והסיכוי לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הנז 0.9.

הסיכוי לעبور את שני המבחנים הנז 0.75
יהי X - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי Y - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרית.

. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו Y .



נחשב את כל ההסתברויות המשותפות :

$$\begin{aligned} p(x=0, y=0) &= 0.05 \\ p(x=0, y=1) &= 0 \\ p(x=1, y=0) &= 0.15 \\ p(x=1, y=1) &= 0.05 \\ p(x=2, y=0) &= 0 \\ p(x=2, y=1) &= 0.75 \end{aligned}$$

\backslash y	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

שימוש לביטויים כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שלויות:

\backslash	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

משתנים בלתי תלויים:

X ו-Y יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו-Y אפשריים התקיימים הדבר הבא :

$$p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$$

משמעות פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אז הם תלויים.

למשל, בדוגמה זוالت :

$$p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2) \cdot p(y=1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$$

כלל אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מיידי שהמשתנים תלויים. שאז הרוי התנאי לא מתקיים.

אך אם אין אפס בטבלה אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

תרגילים :

1. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר . הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.03 לניצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא מקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר . אותו אדם החליט שיפטיק לשחק ברגע שהייתה לו 100 דולר , אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ – 3 משחקים. נגידר את X להיות הכספי שברשות האדם בזאתו מהקזינו ואת Y מספר המשחקים שהאדם שיחק.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשלויות.
 - מה תוחלת מספר המשחקים שיחק האדם?
 - אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר , מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2. להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשלויות של שני משתנים מקריים בדים :

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

- הLEM את ההסתברויות החסרות בטבלה.
 - אם X ו- Y תלויים ?
 - מצא את הסתברות $Y=3$, אם ידוע ש- $X=1$.
3. מפעל משוק מוצר הנארז בחבילות בגודלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצריים ושלושה מוצריים. ההסתברות ש מוצר מסוים יהיה פגום היא $1/10$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצריים לשם בקורסית אינכוט. יהיו $-X$ מספר המוצריים בחבילה, $-Y$ מספר המוצריים הפגומים בחבילה.
- מה ההסתברות של המשתנה Y בהינתן X הינו 3 .
 - מה ההסתברות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.
 - מהי תוחלת מספר המוצריים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצריים? נמקו.
 - בנה את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4. מתוך כד עם שלושה כדורים ממושפרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים **לא** החזרה. נגיד: X - המספר הקטן מבין השניים; – Y המספר הגדל מבין השניים.
- חשבו את ההסתלגות של (Y, X) .
 - אם המספר המינימלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימלי 8?
 - חשבו את ההסתלגות המותנית של X בהינתן $4 = Y$. מצאו $E(X / Y = 4)$.

5. בישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת

המתגוררת בישוב:

ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב.

ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב.

ל-95% יש חשבון לפחות אחד מהסניפים.

יהי X – מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון.

יהי Y – משתנה אינדיקטור:

1- אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.

0- אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבו בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

פתרונות: **שאלה 2:**

ב. תלויים

ג. 0.125

 שאלה 1:

ב. 2.4

ג. התוחלת 1.348 השוונות 0.575 **שאלה 5:**

ג. 0.75

 שאלה 4:

ב. 0.5

ג. תוחלת 2

פרק 29 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמנה הлиינארית בין שני המשתנים.
על ידי מקדם המתאים הליינארי שמסומן ב- ρ .
מקדם מתאים זה מקבל ערכים בין -1 ל 1.

-1 0 1

מקדם מתאים 1 או 1 אומר שקיים קשרlienar מוחלט ומלא בין המשתנים שנייתן לבטא על ידי
 $y = ax + b$.

מתאים חיובי מלא (מקדם מתאים 1) אומר שקיים קשרlienar מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו
מתאים שלילי מלא אומר שקיים קשרlienar מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאים -1).

מתאים חיובי חלק אוומר שכך משתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת
נוסחהlienar שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאים שלילי חלק אוומר שכך
משתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחהlienar שמקשרת את X ל- Y
באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאים :

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

השונות המשותפת :

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונות המשותפת :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X).1$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X).2$$

משתנים בלתי מתואמים :

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שאינם מוקדם המתאים שלהם אפס וכך שדבר כזה יקרה השנוות המשותפת צריכה להתאפס.

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שככל אין בין התאמה לינארית.

משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין בהם קשר ולכון הם גם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מוקדם המתאים

$$\rho[(aX + b), (cY + d)] = \begin{cases} \rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עצמת הקשרبينם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

נחזיר לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ו מבחן בסטטיסטיקה.

כמו כן נתון שהסיכוי לעبور את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעبور את שני המבחנים הנו 0.75

יהי X - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי Y - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרית.

נחשב את מוקדם המתאים :

\backslash Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 * 0.05 + 1 * 0.2 + 2 * 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 * 0.05 + 1^2 * 0.2 + 2^2 * 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

y	P_y
0	0.2
1	0.8

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב- 3 נקודות אקדמיות.
מה יהיה מקדם המתאים בין נקודות הזכות שייצבור למשתנה Y?

תרגילים:

1. הסיכוי שסטודנט עבר את מועד א' בטטיטטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעبور את המבחן מוערך להיות 0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2. אז הסיכוי שלו לעبور את מועד ג' הוא 0.7.
- נגידר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט.
- נגידר את Y להיות מספר הנבחנים שנכשל בהם.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.
- ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
- ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
- ד. האם המתאים בין X ל-Y מלא או חלק? חיובי או שלילי? הסבר ללא חישוב.
- ה. חשבו את מקדם המתאים בין X לבין Y.
- ו. האם המשתנים הם בלתי מתואימים?
2. מטילים מטבע שלוש פעמים. נגידר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי הטלות הראשונות ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי הטלות האחרונות.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X וY ואת פונקציית ההסתברות השוליות.
- ב. האם X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים?
- ג. מהו מקדם המתאים בין X ל-Y. האם המשתנים מתואמים?
- ד. אם בשתי הטלות הראשונות יצא בדיק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי הטלות האחרונות יצא שני עצים?
- ה. אם בשתי הטלות הראשונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי הטלות הראשונות יצא עץ אחד?
3. מפזרים שלושה כדורים שונים בשלושה תאים.
- נגידר את המשתנים הבאים:
- X = מספר ה כדורים בתא הראשון.
- Y = מספר ה כדורים בתא השני.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
- ב. האם המשתנים הם בלתי מתואימים?

4. מטילים קובייה הוגנת פעמיים.
 יהיו: X = הנטלה הגדולה מבין שתי התוצאות
 Y = מס' הנטלות בהן יצאת תוצאה זוגית.
 א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
 ב. חשבו את מקדם המתאים של X ו- Y .
 ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן $-2=X$.
5. בבניין בן 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אין. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגידר את המשתנים הבאים:
 X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
 Y - מספר הדירות האי זוגיות שנציגו.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציית ההסתברות השולית.
 ב. האם המשתנים מתואמים?
 ג. מה מקדם המתאים בין X לבין Y ?
 ד. מה יהיה מקדם המתאים:
 1. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנציגו.
 2. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנציגו.
 ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון שקלים, כל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון שקלים. מה המתרחש בין עלות הדירות שנציגו למספר הדירות הזוגיות?

פתרונות: **שאלה 1 :**

- ג . 0.994
ה . 0.963

 שאלה 2 :

- ב. תלויים.
ג. מקדם המתאים : 0.5. מתואמים
ד. 0.25
ה. 0.5

 שאלה 3 :

- ב. מתואמים

 שאלה 4 :

- ב. 0.252

 שאלה 5 :

- ב. X ו-Y מתואמים.

$$\frac{2}{3} \text{ ג.}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ ד. } 1.7$$

$$(-1) \cdot 2.7$$

$$-\frac{2}{3} \text{ ה.}$$

פרק 30 - המשטנה המקורי הדו ממדוי - קומבינציות לנאריות

רקע:

תוחלת ושונות של סכום משתנים :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot COV(X, Y)$$

תוחלת ושונות של הפרש משתנים :

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot COV(X, Y)$$

קומבינציות לנאריות:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לנארית של שני משתנים אחרים :

$$W = (aX + b) + (cY + d)$$

$$COV[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

עבור שני משתנים מקריים נתון :

$$\mu_X = 80$$

$$\sigma_X = 15$$

$$\mu_Y = 70$$

$$\sigma_Y = 20$$

$$COV(X, Y) = 200$$

- מצא את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

- מצא את התוחלת והשונות של $X - Y$.

- מצא את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W = 2X + 3Y$

תרגילים:

1. נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

$Y X$	1	2	3	$P(Y)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

א. השלם את הסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשב את השונות המשותפת.

ה. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2. מבחרן בניי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100 עם סטיית

תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאים בין הציון

הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחalk
המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבדיקה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנכобра בחלק המילולי
ושני שקלים עבור כל נקודה שנכобра בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות
הבדיקה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3. נתון: $\text{Cov}(X,Y) = 3$. $\text{Var}(X+2Y) = 2$. $\text{Var}(X-2Y) = ?$

4. מטילים קובייה n פעמים.

נגידר את המשתנים הבאים:

X =מספר הפעמים שהתקבלת התוצאה 6.

Y =מספר הפעמים שהתקבלת התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות n .

פתרונות: **שאלה 1:**

- ב. תלויים.
ג. מתואמים.
ד. -0.1
ה. תוחלת : 4.4 , שונות : 0.84
ו. תוחלת : -0.4 , שונות : 1.24

 שאלה 2:

- א. 240
ב. תוחלת : 190 שונות : 1105
ג. תוחלת : 10 שונות : 145
ד. תוחלת : 1710 שונות : 2785

 שאלה 3:

-0.125

 שאלה 4:

$$\frac{-n}{36}$$

פרק 31 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמלית

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמלית מתפלגת נורמלית עצמה.

דוגמה: (פתרו בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאיישה אקראיית? (0.7823)

תרגילים:

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מאשר אקרה?
2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ל"ח וסטיית תקן של 1000 ל"ח. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ל"ח וסטיית תקן של 1500 ל"ח. מקדם המתאים בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי עולם 8000 ל"ח?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ל"ק.
א. מה התוחלת ומהי השונות של הוצאות היומיות של ירקות במסעדה?
ב. מה ההסתברות שההוצאות היומיות על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ל"ח?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות הוצאות היומיות של המסעדה על ירקות?
4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 1.3 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
5. לדוד משה הייתה חזהה. בחזהה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב- 2 ל"ח וליטר חלב עזה נימכר ב- 3 ל"ח.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ל"ח?
ב. מה הסיכוי שmonths 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחילה ל- 30 ליטר?
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מタンובת העזה?

פתרונות: **שאלה 1**

0.2177

 שאלה 2

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

 שאלה 3

א. תוחלת 300, שנות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

 שאלה 4

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל.

ב. 0.0062

פרק 32 - התפלגות הדגימה - ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

מכיוון שմדגם אחד יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אז ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשי או אוכלוסייה כלשי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:
ממוצע האוכלוסייה נסמן ב μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

a. תוכנות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n . תוכנה זו נכונה רק במקרים מסוימים:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ישיחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקרה גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

ב. דוגמה מהתפלגות נורמללית

אם נדגם מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 ממוצע המדגם גם יתפלג נורמלית :

$$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

משקל תינוק ביום היולדו מתפלג נורמלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-5.3 ק"ג?

ג. משפט הגבול המרבי

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אז עבור מדגם מספיק גדול ($n \geq 30$)

$$\text{ממוצע המדגם מתפלג בקרוב לנורמלית } N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

משקל חפיסת שוקולד בקוו יוצר מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מכו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכילה שסימנו סטטיסטיקה א נדגו שני סטודנטים. נתון שסכום הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מיהי טעות התקן?
2. להלן התפלגות מספר מקלטיו הטלויזייה למשפחה בישראל מסויים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
0	500
1	2500
2	3500
3	3000
4	500
סך הכל	$N = 10000$

- נגידר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.
- בנו את פונקציית ההסתברות של x.
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x.
 - אם נדgos 4 משפחות מהישוב עם החזורה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
3. אם נטיל קובייה פעמים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היולדו מתפלג נורמללית עם ממוצע 3400 גרם וסטטיסטית תקן של 400 גרם
א. מה ההסתברות שתינוק אكريאי בעת הלידה ישקל פחות מ-3800 גרם?

- נתנו כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם עולה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת ללא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו לא חישוב כיצד התשובה לטעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמללית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטטיסטית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיקן 180 ס"מ?
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מהתוחלת הגדלים לפחות מ-5 ס"מ?
- מהו הגובה שהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגמים יהיה נמוך ממנו?

6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבעות. האדם נושא לעבודה במשך שבוע 5 פעמיים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסעה לעבודה מתפלג נורמללית.

- מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- מהו הזמן שהסתברות של 90% ממוצע משך הנסעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
- מה ההסתברות שזמן הנסעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות לפחות 2 דקות?
- כיצד התשובה לטעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נושא לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7. נפח הין בקבוק מתפלג נורמללית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטטיסטית תקן של 10 סמ"ק.

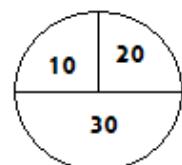
- בארכז 4 בקבוקי הין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארכז יהיה בדיקן 755 סמ"ק?
- בארכז 4 בקבוקי הין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארכז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- בארכז 4 בקבוקי הין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארכז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- בקבוקי הין שבארצנו נזויים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגולש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמללית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

א. מה ההסתברות שסכום המדגם יסטה מהתוחלתו ללא יותר מichiיה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שסכום המדגם יסטה מהתוחלתו ללא יותר מichiיה שגודלו המדגם הוא 16?
ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני ה壽יפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המספרים הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעמים מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ש"ם ומעלה?

10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ש"ם עם סטיית תקן של 3000 ש"ם. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ- 8500 ש"ם?

11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתרבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב- 50 ה擲ות?

12. אורך צינור שפועל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שסכום אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספקו למלאה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימלי, כדי שהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ- 69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרוכז.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שסכום המדגם יהיה קטן מ- 5?

14. נתון ש $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ דגמו 5 תוצאות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם :

לכן $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה : (בחר בתשובה הנכונה)

א. 0.

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש X מתפלג כלשהו עם תוחלת : μ ומשובן σ^2 .

החליטו לבצע מבחן בגודל 200 מתוך ההצלחות הנקבעה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :
(בחר בתשובה הנכונה)

$$X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right) \text{ א.}$$

$$\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right) \text{ ב.}$$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ ג.}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right) \text{ ד.}$$

16. נתון ש $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ אזי : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגם 5 תוצאות מהתפלגות ונגידיר

(בחר בתשובה הנכונה)

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקרים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.

ד. μ ו- \bar{X} יהיו קבועים.

17. משקל חפיסה שוקולד בקוו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקריאיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסה שוקולד בודד ?

ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטוניים בדיק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם ?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית התקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגמים יסטה מתחולתו לפחות מ-2?

19. מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר " במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכוניות אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לפחות שעה 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20. הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 וمبرאים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה , אזי מתכתיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגמים :

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

פתרונות: **שאלה 2**

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

ב. $\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$

$\sigma(\bar{X}) = 0.486$

 שאלה 3

ה. $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

$\sigma(\bar{X}) = 1.21$

 שאלה 4

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

 שאלה 6

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

 שאלה 7

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

שאלה 8

א. 0.5468

ב. 0.6826

 שאלה 9

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

ב. התוחלת : 22.5

השונות : 68.75

ג. התוחלת : 22.5

השונות : 13.75

ד. 0.8997

 שאלה 10

0.0475

 שאלה 11

0.1814

 שאלה 12

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

 שאלה 14

התשובה ב

 שאלה 15

התשובה ד

 שאלה 16

התשובה ג

 שאלה 17

א. 2.429

ב. 0.25

פרק 33 - התפלגות הדגימה - התפלגות סכום תצפויות המדגמים ומשפט הגבול המרצי

רקע:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

כאשר כל התצפויות נדגו בAKERAI מאותה אוכלוסייה.

כלומר, היו X_1, \dots, X_n - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ

ושונותה σ^2 איזי:

a. התוחלת והשונות של סכום התצפויות:

$$E(T) = n\mu$$

$$V(T) = n\sigma^2$$

b. דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \text{ איזי} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ אם}$$

g. משפט הגבול המרצי:

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

איזי עבור מדגם מספיק גדול (פחות 30)

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ש. עם סטיית התקן של 2000 ש. נדגו 100 עובדים מהעיר שמקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

- א. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
- ב. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ש"י אותם עובדים? (0.1587)

תרגילים:

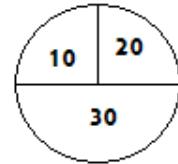
1. המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמללית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקל מתחת ל-65 ק"ג?
 ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
 ג. מה הסיכוי שהמשקל הכללי של 4 אנשים אקראים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
2. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמללית עם תוחלת של 250 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מרוז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במרוז?
 ב. את היין שבмарוז האדם מזג לכלי שקיבלו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגולש מהכללי?
 ג. אם לא היה נתון שນפח היין מתפלג נורמללית. האם התשובה לסעיף א הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב הייתה משתנה?
3. בספר כלשהו 500 עמודים. כצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב 4 דקות עם סטיית התקן של 1 دقيقة.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
 ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
4. במגדל נבנו 40 יחידות דירות. כמו כן נבנו 135 מקומות חניה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידה דירות :
- | | | | | | |
|------------|-----|-----|-----|------|------|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $P(X = x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.25 | 0.15 |

נניח שמספר המכוניות ליחידה דירות בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דירות (אין צורך בתיקון רציפות).

- א. מהי ההסתברות שהיא מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין ?
 ב. בהינתן שיש מקום במגדל לכל המכוניות , מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמורץ מ-

?130

5. בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. אם האדם משחק את המשחק 50 פעמים מה ההסתברות שבסך הכל יזכה בסכום של

1050

שקלים ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לказינו ומשחק את המשחק 50 פעם עד אשר מגיע היום בו הוא
יזכה

ב- 1050 שקלים ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימיםшибלה בקזינו?

6. נתון ש $X_i \sim \exp(\lambda = 1)$, $i = 1, 2, \dots, 100$

$$\text{חשבו את הסיכוי } P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$$

7. אורץ חי סוללה בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = 2x \quad 0 < x < 1$$

ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה מידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספק עבור 35 שעות לפחות?

פתרונות: **שאלה 1**

- א. 0.6915
 ב. 0.8413
 ג. 0.5

 שאלה 2

- א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל
 ב. 0.0062

 שאלה 4

- א. 0.883

 שאלה 5

- א. 0.8997
 ב. תוחלת : 1.111 שונות 0.1239

 שאלה 7

56

פרק 34 - התפלגות הדגימה - התפלגות מספר ההצלחות במדגם -
הקרוב הנורמלי להתפלגות הבינומית

רקע:

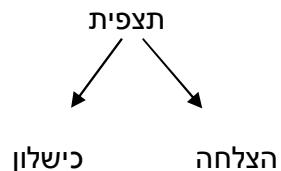
תזכורת על התפלגות בינומית

בפרק זה נדון על התפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).

מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Z .

מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.

כעת מה שמשתנה מהתצפית הוא משתנה דיבוטומי (משתנה שיש לו שני ערכיים).



הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכיישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$.

ממצאים מדגם אקראי בגודל n .

$$Y \sim B(n, p)$$

פונקציית ההסתברות של התפלגות הבינומית היא :

$$\text{תוחלת : } E(y) = np$$

$$\text{שונות : } V(y) = npq$$

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית

אם לפניו התפלגות בינומית : $Y \sim B(n, p)$ ומתקיים ש :

$$n \cdot p \geq 5 .1$$

$$n \cdot (1-p) \geq 5 .2$$

$$y \sim N(np, npq)$$

או :

$$Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות.

הסיבה שעוברים כאן מההתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.

על פי הכללים הבאים :

$$p(Y = a) \cong p(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}) .1$$

$$P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5) .2$$

$$P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5) .3$$

הערות:

- התנאים למעבר מבחן נורמלי הם נזילים, כלומר משתנים מරצחים אחד לשני. התנאי שהציגתי כאן הוא הפופולרי ביותר :

$$n \cdot p \geq 5 . 1$$

$$n \cdot (1-p) \geq 5 . 2$$

- ישנו מרצים שונים את התנאי המחייב הבא :

$$n \cdot p \geq 10 . 1$$

$$n \cdot (1-p) \geq 10 . 2$$

- וישנו מרצים שפשטו התנאי שהם נתונים הוא : $(n \geq 30)$.

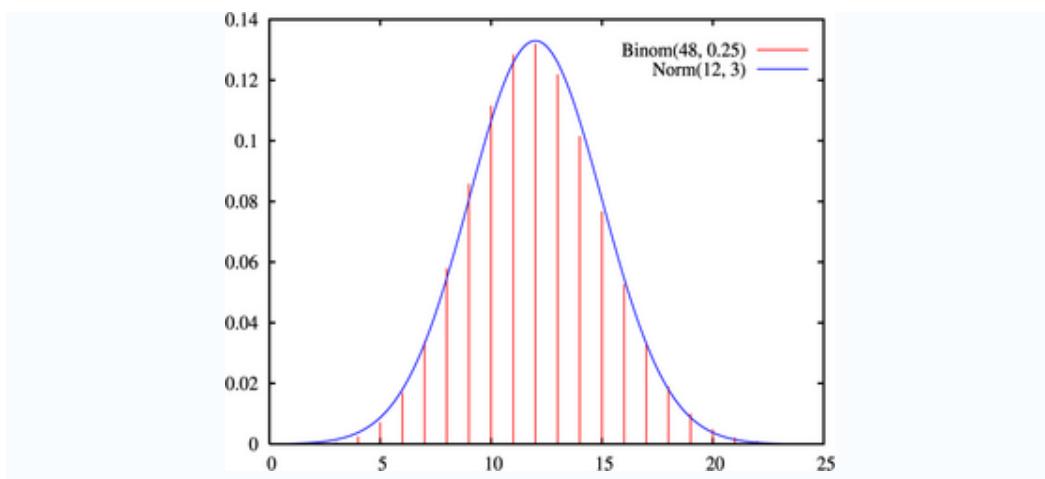
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנדרש לכמ בכיתה כדי לעבור מההתפלגות בינוימית לנורמלית.
- הערכה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנו מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) אני בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינוימית לנורמלית כיון שכח הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון שבקerb אוכלוסיית הנוער 25% זוקקים למשקפיים. נדגו באקראי 48 בני נוער.

א. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זוקקים למשקפיים?

ב. מה הסיכוי שלכל היוטר 13 מתוכם זוקקים למשקפיים?



תרגילים:

- .1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותו אוכלוסייה.
- מה ההסתברות שלושה מהם אקדמיים?
 - מה ההסתברות שלכל היוטר אחד מהם אקדמי?
 - מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- .2. במפעל 10% מהموظרים פגומים. נלקחו 100موظרים באקראי מכו היצור.
- מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6موظרים פגומים?
 - מה ההסתברות שמספר המوظרים הפוגומים יהיה לכל היוטר 11 במדגם?
- .3. ציוני פסיקומטרי בקרוב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקרים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- מטילים מטבע 50 פעמים.
 - מה ההסתברות לקבל לכל היוטר 30 עצים?
 - מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמלי?
- .5. במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשם לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
- מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - מה צריך להיות גודל המטוס כדי שהסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- .6. מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- .7. מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. מההמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היוטר 10?

פתרונות:**שאלה 1**

- א. 0.201
 ב. 0.3758
 ג. התוחלת : 2 , סטיית התקן : 1.2649

שאלה 2

- א. 0.9332
 ב. 0.6915

שאלה 3

0.1611

שאלה 4

- א. 0.9406

שאלה 5

- א. 0.015

שאלה 6

0.8544

שאלה 7

0.8643