

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א'.  
הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה,  
המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את  
התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם  
רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי  
שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים  
שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים  
להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם  
לחויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר  
[www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול, בשביל התירגול...**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.Gool.co.il](http://www.Gool.co.il)  
כתב ופתר - ברק קנדל ©

## תוכן

|         |  |
|---------|--|
| 3.....  | פרק 1 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות               |
| 7.....  | פרק 2 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן         |
| 11..... | פרק 3 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית             |
| 15..... | פרק 4 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים                   |
| 18..... | פרק 5 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית           |
| 23..... | פרק 6 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית         |
| 27..... | פרק 7 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית          |
| 31..... | פרק 8 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית      |
| 34..... | פרק 9 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות                    |
| 39..... | פרק 10 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים |
| 45..... | פרק 11 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית          |
| 49..... | פרק 12 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה            |
| 52..... | פרק 13 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית          |
| 61..... | פרק 14 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת       |
| 66..... | פרק 15 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים               |
| 72..... | פרק 16 - המשתנה המקרי הדו מימדי - קומבינציות לנאריות         |

## פרק 1 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

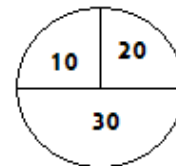
### רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.  
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בשי"ח.  
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד ( פתרון בהקלטה).

### תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא:
  - 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
  - 70 משפחות עם מכונית אחת.
  - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
  - 20 משפחות עם 3 מכוניות.
 בוחרים באקראי משפחה מהישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.  
 בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
2. מהאותיות  $C, B, A$  יוצרים קוד דו תווי.
  - א. כמה קודים ניתן ליצור?
  - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
  - ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות  $B$  מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
 

כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של  $A$ .

**פתרונות:****שאלה 3**

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 2    | 1    | 0    | x    |
| 0.75 | 0.20 | 0.05 | P(x) |

**שאלה 4**

|       |       |      |     |      |
|-------|-------|------|-----|------|
| 4     | 3     | 2    | 1   | x    |
| 0.343 | 0.147 | 0.21 | 0.3 | P(x) |

**שאלה 5**

|       |       |       |       |      |
|-------|-------|-------|-------|------|
| 3     | 2     | 1     | 0     | X    |
| 0.504 | 0.398 | 0.092 | 0.006 | P(x) |

**שאלה 6**

10

## פרק 2 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

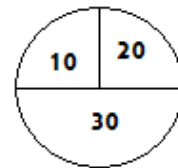
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**תוחלת** – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

**שונות** – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

**סטיית תקן** – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בשי"ח.

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
| 30  | 20   | 10   | x    |
| 0.5 | 0.25 | 0.25 | P(x) |

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

**תרגילים:**

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

|        |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| $X$    | -30 | 0   | 20  | 40  |
| $p(X)$ | 0.4 | 0.1 | 0.3 | 0.2 |

מהי התוחלת, השונות וסטיית התקן של  $X$ ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את  $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת וסטיית תקן של  $X$ .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .



5. נתונה פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

|     |   |     |   |        |
|-----|---|-----|---|--------|
| 8   | 6 | 4   | 2 | $x$    |
| 0.2 |   | 0.3 |   | $P(x)$ |

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את  $V(X)$ .

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5- ו 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10 . מצא את פונקצית ההסתברות.

**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

**שאלה 3**

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

**שאלה 4**

א.

|     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5   | 4   | 3   | 2   | 1   | x    |
| 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | P(x) |

ב . תוחלת: 3

שונות 2

**שאלה 5**

א.

|     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 8   | 6   | 4   | 2   | x    |
| 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 | P(x) |

ב . 5.16

**שאלה 6**

|     |     |     |      |
|-----|-----|-----|------|
| 5   | 0   | -5  | x    |
| 0.2 | 0.6 | 0.2 | P(x) |

### פרק 3 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

#### רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. ( כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

#### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

#### דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונויות של הרווח במשחק?

#### פתרון ( בהקלטה)

חישבנו קודם ש:

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

**תרגילים:**

1. סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שסיים היא 3.5 עם שונות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4.  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-  $E(X) = 4$  ו-  $V(X) = 3$ .  
 $Y$  הינו משתנה מקרי חדש עבורו  $Y = 7 - X$ .  
חשב את:  $E(Y)$  ו-  $V(Y)$ .
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.  
להלן התביעות האפשריות והסתברותן:  
בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).  
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.  
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.  
אחרת אין תביעה בכלל.  
החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.  
נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית באלפי ₪  
א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.  
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6. יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

|    |   |     |     |     |     |        |
|----|---|-----|-----|-----|-----|--------|
| 10 | 9 | 8   | 7   | 6   | 5   | $X$    |
|    |   | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | $P(x)$ |

7.35. כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 35.

- השלימו את פונקציית ההסתברות.
- חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

- מצא את ערכו של  $A$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- חשב את  $E(X^3)$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $\frac{X}{2} - 4$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

תוחלת: 14 שונות: 32

**שאלה 2:**

תוחלת: 8 שונות: 12

**שאלה 3:**

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

**שאלה 4:**

תוחלת: 3

שונות: 3

**שאלה 6:**ב.  $V(X) = 1.8275$ **שאלה 7:**א.  $10 = A$ 

$$E(X) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$V(X) = 1$$

$$E(X^3) = 35.4 \quad \text{ג.}$$

$$V(X^3) = 616.84$$

$$E(y) = -2.5 \quad \text{ד.}$$

$$V(y) = 0.25$$

## פרק 4 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

### רקע:

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?





**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת: 9

שונות: 15

**שאלה 3**

תוחלת: 22

סטיית תקן: 5

**שאלה 4**

תוחלת: 90

שונות: 275

**שאלה 5**

$$A = \frac{12}{25} = 0.48$$

א.

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת  $2.92n$ שונות  $1.1136n$

## פרק 5 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

### רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי :  
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות : " הצלחה" ו" כישלון " כמו : מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי  $n$  פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.  
 מגדירים את  $X$  להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול.  
 נסמן ב  $p$  את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב  $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש :  $X \sim B(n, p)$  .

פונקציית ההסתברות של  $X$  :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad ; \quad 0! = 1 \quad \text{כאשר}$$

לגודל :  $\binom{n}{k}$  ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים :

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי  $n$  פעמים.
- (3)  $X$  – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

**דוגמה**: (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

**תרגילים:**

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את  $X$  להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ?
  - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
  - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
  - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את  $X$  כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

- מהי ההתפלגות של  $X$ ? הסבירו.
- מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
- מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
- מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
  - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
  - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
  - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

| השכלה     | נמוכה | תיכונית | תואר I | תואר II ומעלה |
|-----------|-------|---------|--------|---------------|
| פרופורציה | 0.1   | 0.6     | 0.2    | 0.1           |

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
  - מה התוחלת של מס' בעלי השכלה הנמוכה?

5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
8. מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. נגדיר את  $X$  – מספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את  $E(x^2)$ .

**פתרונות :****שאלה 2:**

ב. 0.2335

ג. 0.1493

ד. תוחלת : 7

סטיית תקן : 1.449

**שאלה 7 :**

א. 0.401

ב. תוחלת : 8.025

סטיית תקן : 2.193

**שאלה 3 :**

א. 0.5314

ב. 0.0984

ג. 0.1143

ד. תוחלת : -18

סטיית תקן : 14.697

**שאלה 8 :**

7.5

**שאלה 4:**

א. 0.1789

ב. 2

**שאלה 5 :**

א. 0.1956

ב. 0.4253

**שאלה 6 :**

א. 0.85

ב. 0.182

ג. תוחלת : 82 נקודות

שונות : 91.8 נקודות

## פרק 6 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

### רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.  
 $X$  – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.  
 נסמן ב  $p$  את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב-  $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

### פונקציית ההסתברות:

$$k = 1, 2, \dots, \infty \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{:תוחלת}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{:שונות}$$

### תכונות חשובות :

אם  $X$  מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי  $X$  הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו,  
 $P(X = n + k) / X > k = P(X = n)$

$$P(X > k) = q^k$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים ש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק.  
 ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?
- ד. אם הוצאו יותר מ- 3 כדורים. מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

### תרגילים:

1. קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
  - א. שידגום 3 מוצרים.
  - ב. שידגום 4 מוצרים.
  - ג. שידגום 5 מוצרים.
  - ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
  - ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.
  
2. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
  - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
  - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
  - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
  - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
  
3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
  - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
  - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
  - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
  - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
  
4. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
  - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
  - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?



5. אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התוויית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגת שוקולד?
- ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

**פתרונות :****שאלה 2 :**

א. 0.009

ב. 0.0001

ג. תוחלת : 1.111

שונות : 0.1234

ד. תוחלת : 44.4

שונות : 308.5

**שאלה 3 :**

א. 0.999

ב. 0.875

ג. 0.03125

ד. 1

**שאלה 4 :**

א. 0.1029

ב. 9.72

**שאלה 5 :**

א. 0.06

ב. 0.7176

ג. 0.0729

ד. 9.487 משחקים

**שאלה 6 :**

א. 0.015

ב. 0.0215

ג. תוחלת  $63\frac{1}{3}$  , שונות  $2777\frac{7}{9}$ ד. תוחלת  $\frac{2}{3}$  , שונות 1.054

## פרק 7 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

### רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.  $\lambda$  - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim pois(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

### התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

### תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר  $\lambda$  פורפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

### דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

### תרגילים:

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
  - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
  - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
  
2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
  - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
  - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
  - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
  
3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
  - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
  - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
  
4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
  - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
  - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
  
5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
  - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
  - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
  - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

**שאלה 2:**

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

**שאלה 3:**

א. 4

ב. 0.407

**שאלה 5 :**

א. 0.2388

ב. 0.2196

ג. 0.6948

**שאלה 6 :**

א. 16.7

ב. 0.0708

## פרק 8 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

### רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה  $N$  פריטים, מתוכם  $D$  פריטים בעלי תכונה מסוימת- פריטים אלה נקראים "מיוחדים".

בוחרים מאותה אוכלוסייה  $n$  פריטים ללא החזרה.

$X$  – מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.

משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים  $(N, D, n)$  יסומן על ידי:  $X \sim H(N, D, n)$ .

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

### התוחלת של ההתפלגות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N}$$

### השונות של ההתפלגות:

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

בכתה 40 תלמידים מתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?

ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

### תרגילים:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
  - ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
  - ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
  
2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את  $X$  להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$  בנוסחה ולא בטבלה.
  - ב. מה התוחלת וסטיית התקן של  $X$ ?
  - ג. חשבו את ההסתברות הבאה:  $P(X = 2 | X > 1)$
  
3. זהה בסעיפים הבאים את ההתפלגות וחשב לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
  - נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
  - אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
    - א. האוכלוסייה גדולה מאד.
    - ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
  
4. בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו- 5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
  - א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
  - ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?



**פתרונות:****שאלה 2**

- ב. תוחלת: 1.5  
סטיית תקן: 0.748  
ג. 0.9

**שאלה 1**

- ב. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$  שונות:  $\frac{5}{9}$   
ג. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$  שונות:  $\frac{20}{27}$

## פרק 9 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

### תרגילים:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $X$ .

ב.  $W = 2X - 4$ , חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $W$ .

ג.  $T = X + Y$ , חשב את התוחלת של  $T$ . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של  $T$ ?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכוונה (במכוונה א' ובמכוונה ב'). הסיכוי

שלו לנצח במשחק במכוונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכוונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את

המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסוניית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
  - יהי  $X$  - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של  $X$ ?
  - מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
  - ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?
6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית.
- חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
    - הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
    - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
    - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
  - ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
  - ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
  - ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.
- נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?
  - בוחרים באקראי שקית אחר שקית במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8. מבחן בנוי משני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
- ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
- ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
- ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?
9. יהי  $X$  משתנה מקרי המקיים  $E(X) = 2$  וכן  $V(X) = 1$ . חשב  $E(X - 5)^2$ .
10. הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו  $P$ . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות ששניים מהם יעברו את המבחן הנהיגה גבוה פי  $8/3$  מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.
- א. חשבו את ערכו של  $P$ .
- תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
- ב. מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?
- ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?
- ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?
- ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?
11. רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע  $n$  צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי  $P$  ימינה ביחידה אחת ובסיכוי  $1-P$  שמאלה ביחידה אחת. נסמן ב- $X$  את המספר עליו עומד הרובוט לאחר  $n$  צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של  $X$  באמצעות  $P$  ו- $n$ .
12. למטבע יש סיכוי  $P$  לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות  $P$ ).
- ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות  $P$ .
- ג. לאילו ערכי  $P$  המשחק כדאי?

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. תוחלת: 2

ב. סטיית תקן: 1

א. תוחלת: 0

ב. סטיית תקן: 2

א. תוחלת: 4.5

ב. סטיית תקן: לא ניתן

**שאלה 2:**

א. 0.03

ב. תוחלת: 0.15, שונות 0.1875

א. 0.1328

**שאלה 3:**

א.

|     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5   | 4   | 3   | 2   | 1   | x    |
| 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | P(x) |

א. תוחלת: 3

ב. שונות: 2

א. תוחלת: 1.5

ב. שונות: 0.5

**שאלה 4:**

א. 0.9975

א. 0.0172

א. 1.0025

**שאלה 5:**

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

**שאלה 6:**

ב. תוחלת: 1.5

שונות: 0.61

ג. תוחלת: 0

סטיית תקן: 4.68

**שאלה 7:**

א. 0.4348

ב. 0.0923

**שאלה 8:**

א. 2.013

ב. 0.5256

ג. תוחלת: 8

שונות: 1.6

ד. תוחלת: 10.5

שונות: 3.475

**שאלה 9:**

10

**שאלה 10:**

א. 0.6

ב. 0.0384

ג. 0.0256

ד. תוחלת: 0.67

שונות: 1.11

ה. 0.24

**שאלה 12:**

$$\text{ב. } \frac{1-2p^2}{p}$$

$$\text{ג. } 0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

## פרק 10 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים

### רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב  $f(x)$ .

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1. בקורס הנוכחי לא נבצע אינטגרציה כדי לחשב את השטחים, אלא נשתמש בצורות הנדסיות מקובלות.

### ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים:

$$S_{triangle} = \frac{h \cdot a}{2} \quad \text{שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2}$$

$$S_{rectangle} = a \cdot b \quad \text{שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b)}$$

משוואת קו ישר:

$$y = mx + n$$

$m$  = שיפוע.

$n$  = נקודת החיתוך עם ציר ה-y.

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: } (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית  $(X_1, Y_1)$  ושיפועו ידוע  $m$ :

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

### פונקציית התפלגות מצטברת:

היא פונקציה הנותנת במשתנה רציף את הסיכוי ליפול מתחת לערך מסוים:

$$F(t) = P(X \leq t)$$

כמו כן:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad P(X > t) = 1 - F(t)$$

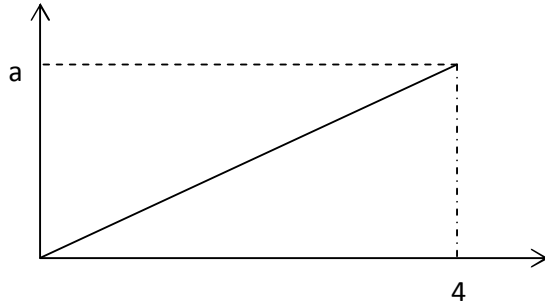
**אחוזונים :**

האחוזון ה- $P$  הוא ערך ( נסמן אותו :  $x_p$  ) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא  $P$ . כלומר :

$$p(X \leq x_p) = p$$

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

בשרטוט שלפניכם נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה  $X$ .  $X$  הינו זמן ההמתנה למענה קולי בדקות.



א. מצאו את ערכו של  $a$ .

ב. רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ג. חשבו את הסיכוי שזמן ההמתנה נמוך מ-2 דקות.

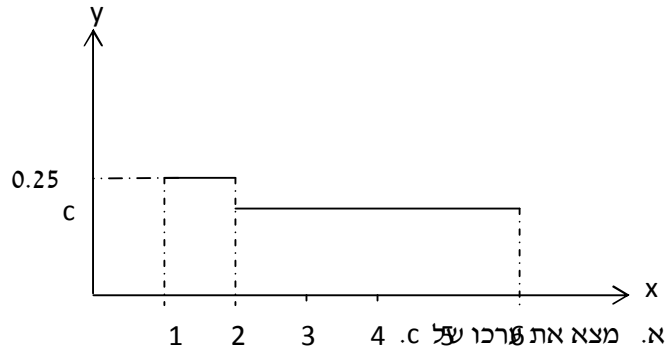
ד. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ה. מהו האחוזון ה-80 של ההתפלגות?



**תרגילים:**

1.  $X$  הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את  $c$  ורכבו על  $c$ .

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1.  $P(x < 4)$

2.  $P(x > 1.5)$

3.  $P(1.5 < x < 5)$

4.  $P(5 < x < 10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף  $X$  שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

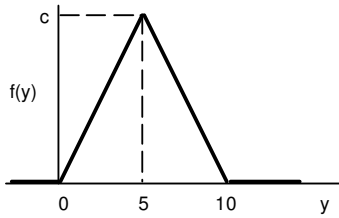
ידוע ש-  $P(0 < X < 1) = 1/4$ .

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של  $X$ .

ב. מצאו את החציון של  $X$ .

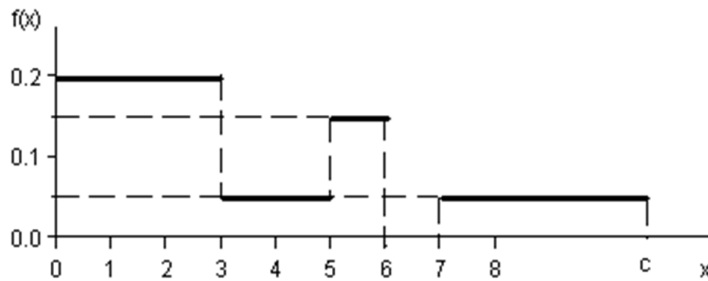
ג. מה הסיכוי ש-  $X$  קטן מ- 0.5?

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $Y$  :



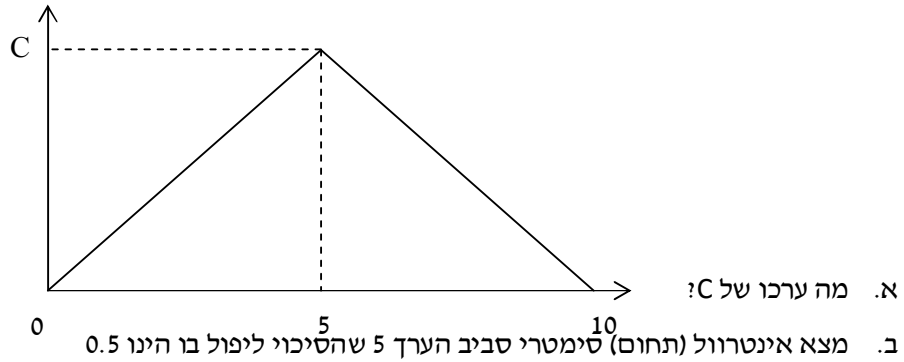
- א. מצאו את  $c$ .  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .  
 ג. חשבו את ההסתברויות:  $P(Y > 4)$ ,  $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$ ,  $P(Y \leq 3.0)$ ,  $P(Y = 7.0)$ .  
 ד. מצאו את העשירון התחתון  $y_{0.1}$ , הרבעון התחתון  $y_{0.25}$  והחציון של  $Y$ . הסיקו מהו העשירון עליון  $y_{0.9}$ .

4. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $X$  :



- א. מצאו ערך  $c$  שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:  $P(1.0 < X \leq 5.0)$ ,  $P(X \geq -2.0)$ ,  $P(X \geq 4)$ .

5. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :



6. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה :

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?  
 ב. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?  
 ג. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

**פתרונות :****שאלה 1 :**

$$1. \text{ א. } \frac{3}{16} \cdot \text{ד. } \frac{1}{3}$$

**שאלה 2 :**

$$\text{א. } c=0.5 \quad b=2$$

$$\text{ב. } 1.41$$

$$\text{ג. } 0.0625$$

**שאלה 3**

$$\text{א. } 0.2$$

$$\text{ג. } 0, 0.18, 0.125, 0.32$$

$$\text{ד. העשירון התחתון: } 2.24$$

$$\text{הרבעון התחתון: } 3.54$$

$$\text{החציון: } 5$$

$$\text{העשירון העליון: } 7.76$$

**שאלה 4**

$$\text{א. } 10$$

**שאלה 5**

$$\text{א. } C=0.2 \quad \text{ב. } 5 \pm 1.46$$

**שאלה 6**

$$\text{א. } 0.0498$$

$$\text{ב. } 0.6321$$

$$\text{ג. } 115.13$$

## פרק 11 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית

### רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.  $\lambda$  - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן ( אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ כאשר } \lambda > 0$$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ לכל } x \geq 0$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון:  $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ- 9 שעות?

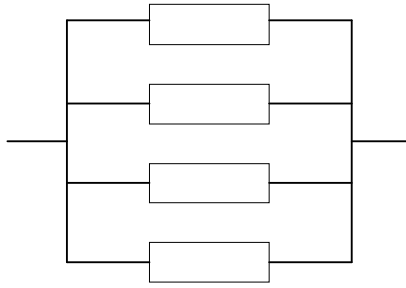
ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

### תרגילים:

1. הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
  - א. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
  - ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
  - ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.
  
2. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
  - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
  - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
  - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?
  
3. משך הזמן  $X$  (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
  - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
  - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
  - ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
  - ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?
  
4. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
  - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
  - ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
  - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט :



- על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.  
 אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.  
 א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?  
 ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא  $K$  ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של  $A$  ₪.  
 מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

**פתרונות:****שאלה 1:**

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

**שאלה 2:**

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

**שאלה 3:**

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד. 69.08

**שאלה 4:**

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

**שאלה 5:**

א. 0.8403

ב.  $A0.0588 > K$



## פרק 12 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

### רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין  $a$  לבין  $b$ .

$$X \sim U(a, b)$$

### פונקציית הצפיפות :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

### פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

### התוחלת :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

### השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה : (הפתרון בהקלטה)

$X$ -משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

א. מה הסיכוי ש- $X$  קטן מ-25?

ב. מה התוחלת והשונות של  $X$ ?

**תרגילים:**

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור,  $X$ , מתפלג  $U(13, 16)$ .
  - א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?
  - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
  - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?
  
2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
  - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
  - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
  - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?
  
3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 110-100 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
  - א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
  - ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
  - ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

פתרונות:שאלה 2:א.  $X \sim U(0,10)$ 

ב. 0.6

ג. 10

שאלה 1:

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב.  $1/3$ ג.  $2/3$ שאלה 3:

א. 0.2

ב.  $\frac{2}{7}$ 

ג. 109

## פרק 13 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות  $Z$ .

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

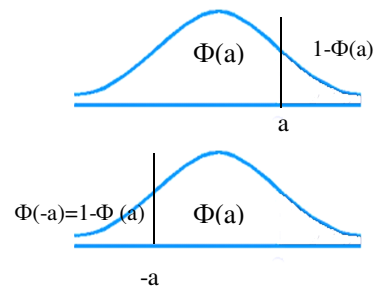
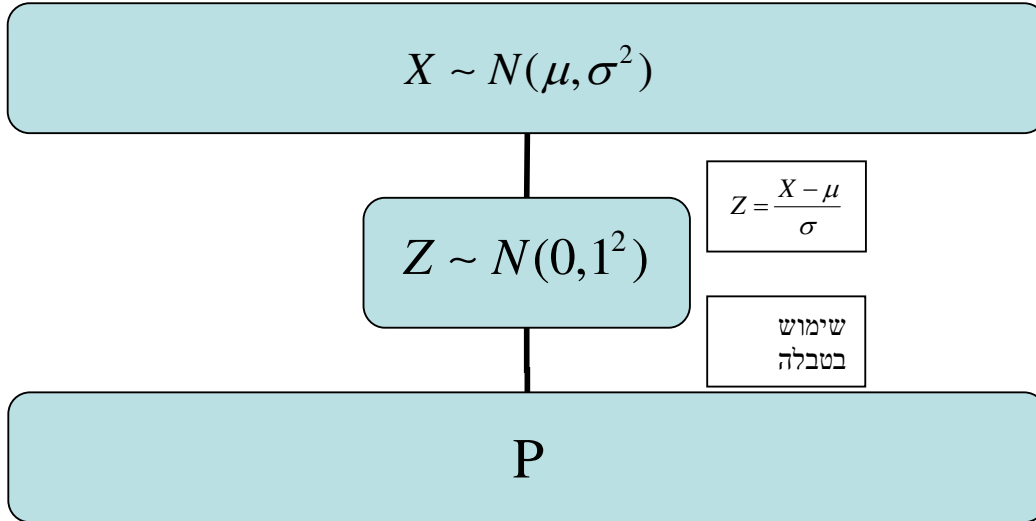
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.

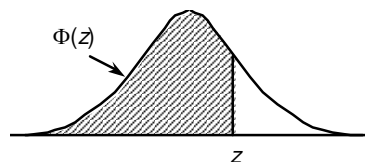
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



### טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



| z   | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

| z         | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291  | 3.891   | 4.417    |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|----------|
| $\Phi(z)$ | 0.90  | 0.95  | 0.975 | 0.99  | 0.995 | 0.999 | 0.9995 | 0.99995 | 0.999995 |

**דוגמה:** (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל-92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

### תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
  - א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
  - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
  - ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
  - ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
  - ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
  
2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
  - א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
  - ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
  - ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
  - ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
  
3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג.
  - א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
  - ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
  - ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
  - ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
  - ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל- 140 ק"ג?
  
4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
  - א. מצאו את העשירון העליון.
  - ב. מצאו את האחוזון ה-95.
  - ג. מצאו את העשירון התחתון.



5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - מהו האחוזון ה- 20?
  - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
  - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
  - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
  - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
  - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?  
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

| <u>שאלה 3</u> | <u>שאלה 1</u> |
|---------------|---------------|
| א. 26.43%     | א. 89.25%     |
| ב. 89.44%     | ב. 2.28%      |
| ג. 39.44%     | ג. 0          |
| ד. 0.383      | ד. 50%        |
| ה. 100%       |               |

| <u>שאלה 7</u> | <u>שאלה 5</u> |
|---------------|---------------|
| א. 500        | א. 119.2      |
| ב. 100        | ב. 80.8       |
| ג. 0.3446     | ג. 112.6      |
| ד. 733        | ד. 87.4       |
| ה. 267        |               |

| <u>שאלה 9</u> | <u>שאלה 8</u> |
|---------------|---------------|
| א. 0.1587     | א. 3          |
| ב. 0.0228     | ב. בממוצע.    |
| ג. 0.8563     | ג. 1          |
| ד. 0.3975     |               |

| <u>שאלה 11</u> | <u>שאלה 10</u> |
|----------------|----------------|
| א. 0.1359      | א. 1925        |
| ב. 0.675       | ב. 0.2266      |
| ג. 100         | ג. 0.1587      |
| ד. 0.25        |                |

## פרק 14 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקצית הסתברות משותפת

### רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים.

נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית.

בפונקציה שכזו יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית :  $Y$  ו  $X$ .

### דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.

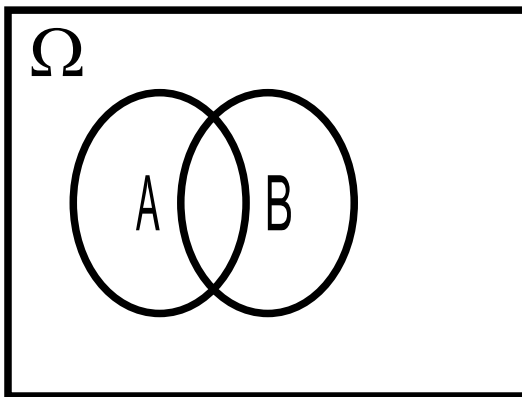
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי  $X$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $Y$  ו  $X$ .



נחשב את כל ההסתברויות המשותפות :

$$p(x=0, y=0) = 0.05$$

$$p(x=0, y=1) = 0$$

$$p(x=1, y=0) = 0.15$$

$$p(x=1, y=1) = 0.05$$

$$p(x=2, y=0) = 0$$

$$p(x=2, y=1) = 0.75$$

| $y \backslash X$ | 0    | 1    | 2    |
|------------------|------|------|------|
| 0                | 0.05 | 0.15 | 0    |
| 1                | 0    | 0.05 | 0.75 |

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

| $Y \backslash X$ | 0    | 1    | 2    | $P_Y$ |
|------------------|------|------|------|-------|
| 0                | 0.05 | 0.15 | 0    | 0.2   |
| 1                | 0    | 0.05 | 0.75 | 0.8   |
| $P_X$            | 0.05 | 0.2  | 0.75 | 1     |

### משתנים בלתי תלויים:

$X$  ו  $Y$  יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו-  $Y$  אפשריים התקיים הדבר הבא :

$$p(x = k, y = l) = p(x = k) \cdot p(y = l)$$

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

למשל , בדוגמה הזאת :

$$p(x = 2, y = 1) = 0.75 \neq p(x = 2) \cdot p(y = 1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$$

ככלל אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים. שאז הרי התנאי לא מתקיים.  
אך אם אין אפס בטבלה אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

**תרגילים :**

1. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר . הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 03 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר . אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר , אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ – 3 משחקים. נגדיר את  $X$  להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת  $Y$  מספר המשחקים שהאדם שיחק.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.
- ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?
- ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר , מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2. להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים :

| $Y \setminus X$ | 0   | 1    | 2    | $P(Y)$ |
|-----------------|-----|------|------|--------|
| 2               |     | 0.08 | 0.12 | 0.4    |
| 3               | 0.1 | 0.05 |      |        |
| 4               |     |      |      | 0.45   |
| $P(X)$          |     | 0.4  | 0.2  |        |

- א. השלם את ההסתברויות החסרות בטבלה.
- ב. האם  $X$  ו- $Y$  תלויים ?
- ג. מצא את הסתברות ש- $Y=3$  , אם ידוע ש- $X=1$  .
3. מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא  $1/10$ . מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקורת איכות. יהיו:  $X$  – מספר המוצרים בחבילה,  $Y$  – מספר המוצרים הפגומים בחבילה.
- א. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו 3.
- ב. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו  $K$  כלשהו.
- ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.
- ד. בנה את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4. מתוך כד עם שלושה כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים ללא החזרה. נגדיר:  $X$  - המספר הקטן מבין השניים;  $Y$  - המספר הגדול מבין השניים.
- א. חשבו את ההתפלגות של  $(X, Y)$ .
- ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימאלי 8?
- ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = 4$ . מצאו  $E(X | Y = 4)$ .

5. ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב:
- ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב.
- ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב.
- ל-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.
- יהי  $X$  - מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון.
- יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור:

1- אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.

0- אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

- ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?



**פתרונות:****שאלה 1:**

ב. 2.4

ג. התוחלת 1.348 השונות 0.575

**שאלה 2:**

ב. תלויים

ג. 0.125

**שאלה 4:**

ב. 0.5

ג. תוחלת 2

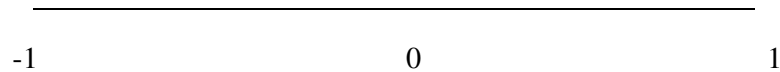
**שאלה 5:**

ג. 0.75

## פרק 15 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

### רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים .  
 על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב  $\rho$  .  
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1 .



מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה :  $y = ax + b$  .

מתאם חיובי מלא ( מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי ( מקדם מתאם -1) .

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט .

### חישוב מקדם המתאם :

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} : \text{ הנוסחה של מקדם המתאם היא}$$

השונוות המשותפת :

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונוות המשותפת :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) .1$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X) .2$$

**משתנים בלתי מתואמים :**

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.  
 משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין בינם התאמה לינארית.  
 משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין בינם קשר ולכן הם גם בלתי מתואמים , אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

**השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם**

$$\rho[(aX + b), (cY + d)] = \begin{cases} \rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר , טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר בינם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם :  
 תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.  
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.  
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.  
 יהי  $\bar{X}$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.  
 יהי  $\bar{Y}$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.  
 נחשב את מקדם המתאם :

| $Y \backslash X$ | 0    | 1    | 2    | $P_Y$ |
|------------------|------|------|------|-------|
| 0                | 0.05 | 0.15 | 0    | 0.2   |
| 1                | 0    | 0.05 | 0.75 | 0.8   |
| $P_X$            | 0.05 | 0.2  | 0.75 | 1     |

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 2    | 1    | 0    | x    |
| 0.75 | 0.20 | 0.05 | P(x) |

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

|   |       |
|---|-------|
| y | $P_y$ |
| 0 | 0.2   |
| 1 | 0.8   |

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.  
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y? :

### תרגילים:

1. הסיכוי שסטודנט יעבור את מועד א בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך להיות 0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2. ואז הסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
  - נגדיר את  $X$  להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט.
  - נגדיר את  $Y$  להיות מספר הנבחנים שנכשל בהם.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פוני ההסתברות השולית.
  - ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
  - ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
  - ד. האם המתאם בין  $X$  ל- $Y$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבר ללא חישוב.
  - ה. חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ .
  - ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
  
2. מטילים מטבע שלוש פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות ואת  $Y$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  ואת פונקציית ההסתברות השולית.
  - ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים?
  - ג. מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ . האם המשתנים מתאומים?
  - ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
  - ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
  
3. מפזרים שלושה כדורים שונים בשלושה תאים.
  - נגדיר את המשתנים הבאים:
 
$$X = \text{מספר הכדורים בתא הראשון.}$$

$$Y = \text{מספר הכדורים בתא השני.}$$
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
  - ב. האם המשתנים בלתי מתאומים?

4. מטילים קובייה הוגנת פעמיים.

יהי:  $X$  = ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות

$Y$  = מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. חשבו את מקדם המתאם של  $X$  ו- $Y$ .

ג. מצאו את ההתפלגות של  $Y$  בהינתן ש- $X=2$ .

5. בבניין בן 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט

לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים :

$X$  - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.

$Y$  - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ ?

ד. מה יהיה מקדם המתאם :

1. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

2. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון שקלים, כל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון

שקלים. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

**פתרונות :****שאלה 1 :**

ג . 0.994

ה . 0.963

**שאלה 2 :**

ב. תלויים.

ג. מקדם המתאם : 0.5. מתואמים

ד . 0.25

ה . 0.5

**שאלה 3 :**

ב. מתואמים

**שאלה 4 :**

ב. 0.252

**שאלה 5 :**

ב. X ו-Y מתואמים.

ג.  $\frac{2}{3}$ ד. 1.  $-\frac{2}{3}$ 

ד. 2. (-1)

ה.  $-\frac{2}{3}$

**פרק 16 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות**

**רקע:**

**תוחלת ושונות של סכום משתנים :**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot COV(X, Y)$$

**תוחלת ושונות של הפרש משתנים :**

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot COV(X, Y)$$

**קומבינציות לינאריות:**

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים :

$$W = (aX + b) + (cY + d)$$

$$COV[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

עבור שני משתנים מקריים נתון :

$$\mu_X = 80$$

$$\sigma_X = 15$$

$$\mu_Y = 70$$

$$\sigma_Y = 20$$

$$COV(X, Y) = 200$$

- מצא את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- מצא את התוחלת והשונות של  $Y - X$ .
- מצא את השונות ומה התוחלת של המשתנה  $W = 2X + 3Y$



**תרגילים:**

1. נתונה פונקצית ההסתברות המשותפת הבאה:

| $Y \setminus X$ | 1   | 2   | 3   | $P(Y)$ |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|
| 2               |     | 0.1 | 0.3 | 0.6    |
| 3               | 0.2 |     | 0.1 |        |
| $P(X)$          |     |     |     |        |

א. השלם את ההסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשב את השונות המשותפת.

ה. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2. מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100 עם סטיית

תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון

הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק

המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי

ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות

הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3. נתון:  $\text{Var}(X-2Y)=2$  .  $\text{Var}(X+2Y)=3$  . חשבו:  $\text{Cov}(X, Y)$ .

4. מטילים קובייה  $n$  פעמים.

נגדיר את המשתנים הבאים:

$X$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

$Y$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות  $n$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

ב. תלויים

ג. מתואמים.

ד.  $-0.1$ ה. תוחלת:  $4.4$ , שונות:  $0.84$ ו. תוחלת:  $-0.4$ , שונות:  $1.24$ **שאלה 2:**א.  $240$ ב. תוחלת:  $190$  שונות:  $1105$ ג. תוחלת:  $10$  שונות:  $145$ ד. תוחלת:  $1710$  שונות:  $2785$ **שאלה 3:** $-0.125$ **שאלה 4**

$$\frac{-n}{36}$$