תרגיל

לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2

נגדיר $\langle u,v\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- R^2.

פתרון

1. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \quad : \forall u,v,w\in V$.

$$u=(a,b)\ ,\ v=(c,d)\ ,\ w=(e,f)$$

$$\langle u+v,w\rangle = \left\langle (\underbrace{a+c}_{x_1},\underbrace{b+d}_{x_2}),(\underbrace{e}_{y_1},\underbrace{f}_{y_2})\right\rangle$$

$$=2\underbrace{(a+c)}_{x_1}\underbrace{e}_{y_1}-\underbrace{(a+c)}_{x_1}\underbrace{f}_{y_2}-\underbrace{(b+d)}_{x_2}\underbrace{e}_{y_1}+\underbrace{(b+d)}_{x_2}\underbrace{f}_{y_2}$$

$$=2ae+2ce-af-cf-be-de+bf+df$$

$$\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle = \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle =$$

$$=2ae-af-be+bf+2ce-cf-de+df$$

2. $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle \quad : \forall u,v\in V,\alpha\in F$.

$$\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$$

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

$$\langle \alpha u,v\rangle = \langle \alpha(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle (\alpha x_1,\alpha x_2),(y_1,y_2)\rangle$$
$$=2\alpha x_1y_1-\alpha x_1y_2-\alpha x_2y_1+\alpha x_2y_2=\alpha\left(2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2\right)$$
$$=\alpha\langle u,v\rangle$$

3. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad : \forall u,v\in V$.

4. $0\le\langle u,u\rangle \quad : \forall u\in V$, וכן $\langle u,u\rangle=0 \Leftrightarrow u=0$.

דרך נוספת

$$\langle u,v\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

שקול ל

$$\langle u,v\rangle = u^T A v = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה חיובית לחלוטין :

$$\det(2) > 0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

ולכן ההגדרה מהווה מכפלה פנימית

תרגיל

לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2

נגדיר $<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- R^2.

פתרון

שקול ל

$$\langle u,v\rangle = u^T Av = (x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

המטריצה לא חיובית לחלוטין:

$$\det(1)>0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}=-5<0$$

ולכן ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

תרגיל

לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2

נגדיר $< u,v >= x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- R^2.

פתרון

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2$$

$$\langle u,v\rangle = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$|1|>0 \ , \ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & k \end{vmatrix} > 0$$

$$k+9>0$$

$$k>-9$$

תרגיל

לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- R^3

נגדיר $<u,v>=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה

מכפלה פנימית ב- R^3.

פתרון

$$\langle u,v\rangle=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$$

$$\langle u,v\rangle=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(x_1+x_3k,x_2,x_1k+x_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$|1|>0\ ,\ \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}>0\ ,\ \begin{vmatrix}1&0&k\\0&1&0\\k&0&1\end{vmatrix}>0$$

$$1-k^2>0$$

$$k^2<1$$

$$-1<k<1$$

תרגיל

נתונים שלושה וקטורים ב- R^3 : $u=(1,-2,2)$, $v=(3,-2,6)$, $w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- R^3 , חשב:

$a)\ <u,v> \quad b)\ <u,w> \quad c)\ <v,w> \quad d)\ <u+v,w> \quad e)\ \|u\|$

$f)\ \|v\| \quad g)\ \|u+v\| \quad h)\ d(u,v) \quad i)\ \hat{u} \quad j)\ \hat{v}$

פתרון

$a)\ <u,v>=(1,-2,2)\cdot(3,-2,6)=(1)(3)+(-2)(-2)+(2)(6)=19$

$b)\ <u,w>=(1,-2,2)\cdot(5,3,-2)=(1)(5)+(-2)(3)+(2)(-2)=-5$

$c)\ <v,w>=(3,-2,6)\cdot(5,3,-2)=(3)(5)+(-2)(3)+(6)(-2)=-3$

$d)\ <u+v,w>=(4,-4,8)\cdot(5,3,-2)=(4)(5)+(-4)(3)+(8)(-2)=-8$

$<u+v,w>=<u,w>+<v,w>=(-5)+(-3)=-8$

$e)\ \|u\|=\sqrt{<u,u>}=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{(1,-2,2)\cdot(1,-2,2)}=\sqrt{1+4+4}=3$

$f)\ \|v\|=\sqrt{<v,v>}=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{(3,-2,6)\cdot(3,-2,6)}=\sqrt{9+4+36}=7$

$g)\ \|u+v\|=\sqrt{<u+v,u+v>}=\sqrt{(4,-4,8)\cdot(4,-4,8)}=\sqrt{16+16+64}=\sqrt{96}$

$\|u+v\|=\sqrt{<u+v,u+v>}=\sqrt{<u,u>+<u,v>+<v,u>+<v,v>}=\sqrt{9+19+19+49}$

$h)\ d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{<u-v,u-v>}=\sqrt{(-2,0,-4)\cdot(-2,0,-4)}=\sqrt{4+0+16}=\sqrt{20}$

$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{<u-v,u-v>}=\sqrt{<u,u>-<u,v>-<v,u>+<v,v>}=\sqrt{9-19-19+49}$

$i)\ \hat{u}=\frac{u}{\|u\|}=\frac{(1,-2,2)}{3}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

$j)\ \hat{v}=\frac{v}{\|v\|}=\frac{(3,-2,6)}{7}=\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

תרגיל

נתונות שתי מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $<A,B>$.

פתרון

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$<A,B>$$

$$tr(B^TA)$$

$$tr\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

$$tr\begin{pmatrix}55 & 48 & 41\\ 72 & 63 & 54\\ 89 & 78 & 67\end{pmatrix}$$

$$55+63+67$$

$$185$$

תרגיל

נתונות שתי מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $< A,B >=tr(B^T A)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $< A,C >$.

פתרון

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$< A,C >$$

$$tr(C^T A)$$

$$tr\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

$$tr\begin{pmatrix}37 & 33 & 29\\ -50 & -45 & -40\\ -8 & -6 & -4\end{pmatrix}$$

$$37+(-45)+(-4)$$

$$-12$$

תרגיל

נתונות שתי מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $<B,C>$.

פתרון

$$<B,C>$$

$$tr(C^TB)$$

$$tr\begin{pmatrix}3&1\\-5&0\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}$$

$$tr\begin{pmatrix}11&15&19\\-10&-15&-20\\-16&-18&-20\end{pmatrix}$$

$$11+(-15)+(-20)$$

$$-24$$

תרגיל

נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^T A)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $<A,B+C>$.

פתרון

$$<A,B+C>$$

$$<A,B>+<A,C>$$

$$185+(-12)$$

$$173$$

תרגיל

נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $<4A+10B,11C>$.

פתרון

$$<4A+10B,11C>$$

$$<4A,11C>+<10B,11C>$$

$$4\cdot 11<A,C>+10\cdot 11<B,C>$$

$$44(-12)+110(-24)$$

$$-528-2640$$

$$-3168$$

תרגיל

נתונה מטריצה ב- $M_{2x3}[R]$: $A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^T A)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $\|A\|$.

פתרון

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{tr(A^T A)}$$

$$A^T A=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 9 & 6\\ 8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^T A=\begin{pmatrix}149 & 132 & 115\\ 132 & 117 & 102\\ 115 & 102 & 89\end{pmatrix}$$

$$tr(A^T A)=149+117+89=355$$

$$\|A\|=\sqrt{355}$$

תרגיל

נתונה מטריצה ב- $M_{2x3}[R]$: $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $M_{2x3}[R]$ -ב $<A,B>=tr(B^T A)$

חשב: $\|B\|$.

פתרון

$$\|B\|=\sqrt{\langle B,B\rangle}=\sqrt{tr(B^T B)}$$

$$B^T B=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 6\\4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$B^T B=\begin{pmatrix}29 & & \\ & 45 & \\ & & 65\end{pmatrix}$$

$$tr(B^T B)=29+45+65=139$$

$$\|B\|=\sqrt{139}$$

תרגיל

נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^T A)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $d(A,B)$.

פתרון

$$d(A,B)=\|A-B\|=\sqrt{\langle A-B,A-B\rangle}$$

$$=\sqrt{tr\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}}$$

$$=\sqrt{tr\begin{pmatrix}8 & 2\\ 6 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}68 & & \\ & 36 & \\ & & 20\end{pmatrix}}=\sqrt{68+36+20}=\sqrt{124}$$

$$d(A,B)=\|A-B\|=\sqrt{\langle A-B,A-B\rangle}$$
$$=\sqrt{\langle A,A\rangle-\langle A,B\rangle-\langle B,A\rangle+\langle B,B\rangle}=\sqrt{355-185-185+139}$$

תרגיל

נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^T A)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב: $\hat{A}$.

פתרון

$$\hat{A}=\frac{1}{\|A\|}A$$

$$\hat{A}=\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב: $<p,q>$.

פתרון

$$<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx=\int_0^1 (x+3)(3x+1)dx$$

$$=\int_0^1 (3x^2+10x+3)dx=\left[x^3+5x^2+3x\right]_0^1=9$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב: $<p,r>$.

פתרון

$$<p,r>=\int_0^1 p(x)\cdot r(x)dx=\int_0^1 (x+3)(x^2-4x-1)dx$$

$$=\int_0^1 (x^3-4x^2-x+3x^2-12x-3)dx=$$

$$=\int_0^1 (x^3-x^2-13x-3)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-13\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-6.5-3=-9.583333$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב: $<p,q+r>$.

פתרון

$$\langle p,q+r\rangle=\langle p,q\rangle+\langle p,r\rangle=9+(-9.58333)=-0.58333$$

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

$$<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$$

$$\langle p,q+r\rangle=\langle x+3,x^2-x\rangle=\int_0^1(x+3)\cdot(x^2-x)dx=\int_0^1[x^3+2x^2-3x]dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{3+8-18}{12}=-\frac{7}{12}=-0.58333$$

$$\langle p,q+r\rangle=\langle p,q\rangle+\langle p,r\rangle=9+(-9.5833)=-0.5833$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב: $\|p\|$.

פתרון

$$\|p\|=\sqrt{\langle p,p\rangle}$$

$$\langle p,p\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot p(x)dx=\int_0^1 (x+3)^2\,dx=\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_0^1=\frac{4^3}{3}-\frac{3^3}{3}=\frac{37}{3}$$

$$\|p\|=\sqrt{\frac{37}{3}}$$

$$\|q\|=\sqrt{\langle q,q\rangle}$$

$$\langle q,q\rangle=\int_0^1 q(x)\cdot q(x)dx=\int_0^1 (3x+1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{4^3}{9}-\frac{1^3}{9}=\frac{63}{9}=7$$

$$\|p\|=\sqrt{7}$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב : $d(p,q)$.

פתרון

$$d(p,q)=\|p-q\|=\|-2x+2\|$$

$$\sqrt{\int_0^1(-2x+2)(-2x+2)dx}$$

$$\sqrt{\int_0^1(-2x+2)^2dx}$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{-2}\frac{(-2x+2)^3}{3}\right]_0^1}$$

$$\sqrt{0-\frac{1}{-2}\frac{8}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$d(p,q)=\|p-q\|=\sqrt{\langle p-q,p-q\rangle}=\sqrt{\langle p,p\rangle-\langle p,q\rangle-\langle q,p\rangle+\langle q,q\rangle}=$$

$$=\sqrt{37/3-9-9+7}$$

תרגיל

נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

ב- $C[0,1]$ חשב: $\hat{r}$.

פתרון

$$\hat{r}=\frac{r}{\|r\|}$$

$$r(x)=$$

$$\|r\|=\sqrt{\langle r,r\rangle}$$

$$\langle r,r\rangle=\int_0^1 r(x)\cdot r(x)dx=\int_0^1 (x^2-4x-1)(x^2-4x-1)dx$$

$$\int_0^1 (x^4-4x^3-x^2-4x^3+16x^2+4x-x^2+4x+1)dx$$

$$\int_0^1 (x^4-8x^3+14x^2+8x+1)dx$$

$$\left[\frac{x^5}{5}-8\frac{x^4}{4}+14\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{1}{5}-2+\frac{14}{3}+4+1=3+\frac{1}{5}+4+\frac{2}{3}=7+\frac{13}{15}$$

תרגיל

הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$.

פתרון

$$\|u+v\|^2$$

$$\langle u+v,u+v\rangle$$

$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$$

תרגיל

הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$.

פתרון

$$\|u-v\|^2$$

$$\langle u-v,u-v\rangle$$

$$\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle-\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$$

תרגיל

הוכח: $.< u-v, u+v >= \|u\|^2 - \|v\|^2$

פתרון

$$< u-v, u+v >$$

$$\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle$$

$$\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2 - \|v\|^2$$

תרגיל

הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$

(תן פירוש גיאומטרי לתוצאה ב- R^2).

פתרון

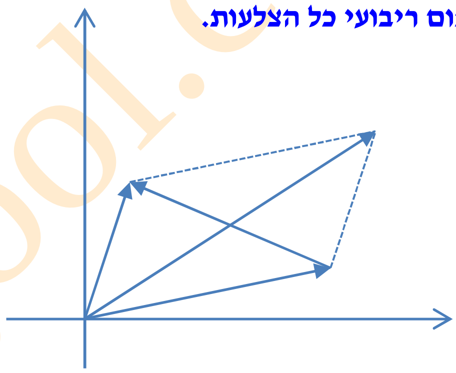
$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$$

$$\left(\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2\right)+\left(\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2\right)$$

$$+2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

במישור ובמרחב: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים

שווה לסכום ריבועי כל הצלעות.



תרגיל

הוכח: $< u, v > = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

פתרון

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\right) - \left(\|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{4}4\langle u,v\rangle$$

$$\langle u,v\rangle$$

תרגיל

יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\dots,y_n$ מספרים ממשיים. הוכח כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2\right)$.

פתרון

ניקח שני וקטורים כלשהם ב- R^n עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית בה.

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ו- $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

לפי אי שוויון קושי שוורץ: $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|$

כלומר,

$$\left(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2\right)$$

תרגיל

יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.

הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$

פתרון

ניקח שתי פונקציות f,g ב- $C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית בו

אזי לפי אי שוויון קושי שוורץ : $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$

כלומר $\left|\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\right| \le \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\right)}\sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\right)}$

תרגיל

חשב את הזווית בין שני הוקטורים $v=(-2,1,2)$ $u=(1,2,2)$

ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- R^3.

פתרון

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$$u\cdot v=(1)(-2)+(2)(1)+(2)(2)=4$$

$$\|u\|=\|(1,2,2)\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$

$$\|v\|=\|(-2,1,2)\|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$$

$$\cos\theta=\frac{4}{3\cdot 3}$$

תרגיל

חשב את הזווית בין שני הוקטורים $v=(1,2)$ $u=(3,4)$

ביחס למכפלה הפנימית

$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ב- R^2 .

פתרון

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle (3,4),(1,2)\rangle}{\|(3,4)\|\cdot\|(1,2)\|}$$

$$\left\langle (\underbrace{3}_{x_1},\underbrace{4}_{x_2}),(\underbrace{1}_{y_1},\underbrace{2}_{y_2})\right\rangle = \underbrace{3}_{x_1}\cdot\underbrace{1}_{y_1} - \underbrace{3}_{x_1}\cdot\underbrace{2}_{y_2} - \underbrace{4}_{x_2}\cdot\underbrace{1}_{y_1} + 3\cdot\underbrace{4}_{x_2}\cdot\underbrace{2}_{y_2} = 17$$

$$\|(3,4)\| = \sqrt{\langle (3,4),(3,4)\rangle} = \sqrt{3\cdot3-3\cdot4-4\cdot3+3\cdot4\cdot4} = \sqrt{33}$$

$$\|(1,2)\| = \sqrt{\langle (1,2),(1,2)\rangle} = \sqrt{1\cdot1-1\cdot2-2\cdot1+3\cdot2\cdot2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{17}{\sqrt{33}\cdot3} = \frac{17}{17.2336}$$

$$\theta = 9.44^\circ$$

תרגיל

מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

פתרון

$$\cos\theta=\frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\cdot\|q\|}$$

$$<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx=\int_0^1(2x-1)x^2dx=\int_0^1(2x^3-x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\|p\|=\sqrt{\langle p,p\rangle}=\sqrt{\int_0^1(2x-1)^2dx}=\sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^3}{3}\right]_0^1}=\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\|q\|=\sqrt{\langle q,q\rangle}=\sqrt{\int_0^1\left(x^2\right)^2dx}=\sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1}=\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$\cos\theta=0.173$$

$$\theta=80^\circ$$

תרגיל

מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x2}[R]$.

פתרון

$$\cos\theta=\frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}$$

$$<A,B>=tr\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}6 & *\\ * & -4\end{pmatrix}=2$$

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}13 & *\\ * & 2\end{pmatrix}}=\sqrt{15}$$

$$\|B\|=\sqrt{\langle B,B\rangle}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}4 & *\\ * & 10\end{pmatrix}}=\sqrt{14}$$

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{14}}$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{105}}$$

$$\cos\theta=0.00036$$

$$\theta=89.97^{\circ}$$

תרגיל

הוכח כי הוקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,2,3)$ אורתוגונליים ב- R^3 .

פתרון

$$u \perp v \;\Leftrightarrow\; \langle u,v\rangle = 0$$

$$\langle u,v\rangle = u\cdot v = (1,2,3)\cdot(4,7,-6) = 4+14-18 = 0$$

תרגיל

מצא את ערכו של הקבוע k עבורו הוקטורים

$u=(1,k,3)$, $v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- R^3.

פתרון

$$u \perp v \iff \langle u,v \rangle = 0$$

$$\langle u,v \rangle = u \cdot v = (1,k,3)\cdot(4,7,-6) = 4+7k-18 = 0$$

$$7k = 14$$

$$k = 2$$

תרגיל

מצא וקטור יחידה המאונך לשני הוקטורים

$u=(1,2,3)$, $v=(2,5,7)$ ב- R^3.

פתרון

$$u \perp v \ \Leftrightarrow \ \langle u,v \rangle = 0$$

$$w=(a,b,c)$$

$$w \cdot u = 0 \ \Rightarrow \ (a,b,c)(1,2,3)=0 \ \Rightarrow \ a+2b+3c=0$$

$$w \cdot v = 0 \ \Rightarrow \ (a,b,c)(2,5,7)=0 \ \Rightarrow \ 2a+5b+7c=0$$

$$a+2b+3c=0$$
$$b+c=0$$

$$c=1 \ b=-1 \ a=-1$$

$$w=(-1,-1,1)$$

$$\hat{w}=\frac{w}{\|w\|}=\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{1+1+1}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

תרגיל

הוכח כי הפולינומים $p(x)=2x-1 \ \ , \ \ q(x)=6x^2-6x+1$

אורתוגונליים בקטע [0,1]

(ביחס למכפלה הפנימית $< p,q >=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

פתרון

$$p(x)=2x-1 \ \ , \ \ q(x)=6x^2-6x+1$$

$$< p,q >=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx=\int_0^1 (2x-1)(6x^2-6x+1)dx=\int_0^1 (12x^3-18x^2+8x-1)dx$$

$$\left[3x^4-6x^3+4x^2-x\right]_0^1=3-6+4-1=0$$

תרגיל

במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $\geq n$ מעל R)

נגדיר מכפלה פנימית :

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n} p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + ... + p(n)q(n)$$

הראה כי הפולינומים :

$$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) \ ,$$
$$q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$ עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

פתרון

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{7} p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + ... + p(7)q(7)$$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{7} p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + ... + p(7)q(7)$$

$$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) \ ,$$
$$q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

$$p(0) = p(2) = p(4) = 0 = p(6) = 0$$

$$q(1) = q(3) = q(5) = q(7) = 0$$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{7} p(k)q(k) =$$

$$p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3) + p(4)q(4) + ... + p(7)q(7) = 0$$

תרגיל

נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית: $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x2}[R]$

מצא את הערך של הקבוע k עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

פתרון

נדרוש: $\langle A,B\rangle=0$

כלומר נדרוש: $tr(B^TA)=0$

$$tr\left(\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$tr\begin{pmatrix}6 & *\\ * & -4\end{pmatrix}=0$$

$$2=0$$

סתירה.

לא קיים ערך של k עבורו המטריצות אורתוגונליות.

תרגיל

הוכח כי: $u \perp v \;\Leftrightarrow\; \|u+v\| = \|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- R^2 ?

פתרון

האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

שלב א, נוכיח:

$u \perp v \;\Leftarrow\; \|u+v\| = \|u-v\|$.

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = 0$$

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

$$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

שלב ב, נוכיח:

$u \perp v \;\Rightarrow\; \|u+v\| = \|u-v\|$.

$$\|u+v\| = \|u-v\|$$

$$\sqrt{\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

$$\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$4\langle u,v\rangle = 0$$

$$u \perp v$$

תרגיל

הוכח כי: $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

פתרון

משפט פיתגורס המפורסם.

שלב א, נוכיח:

$u \perp v \Leftarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = 0$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$$

$$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle$$

שלב ב, נוכיח:

$u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

$$\|u+v\|^2 = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$$

$$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle u,v\rangle = 0$$

$$u \perp v$$

תרגיל

הוכח כי : $\|u\| = \|v\| \Leftarrow (u-v) \perp (u+v)$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

פתרון

במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

$$\langle (u-v),(u+v) \rangle$$

$$\langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle - \langle v,v \rangle$$

$$\langle u,u \rangle - \langle v,v \rangle$$

$$0$$

תרגיל

נניח ש- W תת-מרחב כלשהו של מרחב מכפלה פנימית V.

הגדר את המשלים האורתוגונלי של W שמסומן $W^{\perp}$

והוכח כי $W^{\perp}$ מהווה גם הוא תת-מרחב של V.

צטט את משפט הפירוק האורתוגונלי.

פתרון

הגדרת המשלים האורתוגונלי:

נניח ש- W תת-מרחב כלשהו של מרחב מכפלה פנימית V.

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp W\}$$

הערה: $W \perp v$ משמעותו: v אורתוגונלי לכל וקטור ב- W.

הוכחה שהמשלים האורתוגונלי מהווה תת מרחב של V:

תרגיל

יהי $W = span\{(1,2,-1,1)\ ,\ (2,5,3,1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$. הראה כי מתקיים משפט הפירוק .

פתרון

$$W^{\perp} = \{(x,y,z,t)\ |(1,2,-1,1)\cdot(x,y,z,t)=0,\ (2,5,3,1)\cdot(x,y,z,t)=0\ \}$$

$$\begin{aligned} x+2y-z+t&=0 \\ 2x+5y+3z+t&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-z+t&=0 \\ y+5z-t&=0 \end{aligned}$$

$$t=1\ ,\ z=0\ \rightarrow\ y=1\ ,\ x=-3$$
$$t=0\ ,\ z=1\ \rightarrow\ y=-5\ ,\ x=11$$

$$W^{\perp} = span\{\ (-3,1,0,1)\ ,\ (11,-5,1,0)\ \}$$

$$W+W^{\perp}=R^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 11 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & -27 & 12 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -38 & 11 \\ 0 & 0 & 147 & -38 \end{pmatrix}$$

תרגיל

יהי $W=span\{(1,1,1)\}$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.

הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

פתרון

$$W^{\perp}=\{\ (x,y,z)\mid(1,1,1)\cdot(x,y,z)=0\ \}$$

$$x+y+z=0$$

$$z=1\ ,\ y=0\rightarrow x=-1$$

$$z=0\ ,\ y=1\rightarrow x=-1$$

$$W^{\perp}=span\{\ (-1,0,1)\ ,\ (-1,1,0)\ \}$$

$$W+W^{\perp}=R^3$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

תרגיל

יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$ ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] . הראה כי מתקיים משפט הפירוק האורתוגונלי.

פתרון

$$W^{\perp} = \{p(x) = a + bx + cx^2 \mid \langle p(x), x \rangle = 0\}$$

$$\int_0^1 \left(a + bx + cx^2\right) xdx = 0$$

$$\int_0^1 \left(ax + bx^2 + cx^3\right) dx = 0$$

$$\left[a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$$

$$6a + 4b + 3c = 0$$

$$b = 1 \ , \ c = 0 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$b = 0 \ , \ c = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$W^{\perp} = span\left\{-\frac{2}{3} + x \ , \ -\frac{1}{2} + x^2\right\}$$

תרגיל

יהי $W=span\left\{x,x^2\right\}\subseteq P_2[R]$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$

ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] . הראה כי מתקיים משפט הפירוק האורתוגונלי.

פתרון

$$W^{\perp}=\{p(x)=a+bx+cx^2 \mid \left\langle p(x),x\right\rangle=0\ ,\left\langle p(x),x^2\right\rangle=0\}$$

$$\int_0^1\left(a+bx+cx^2\right)xdx=0$$

$$\int_0^1\left(ax+bx^2+cx^3\right)dx=0$$

$$\left[a\frac{x^2}{2}+b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^4}{4}\right]_0^1=0$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0$$

$$6a+4b+3c=0$$

$$\int_0^1\left(a+bx+cx^2\right)x^2dx=0$$

$$\int_0^1\left(ax^2+bx^3+cx^4\right)dx=0$$

$$\left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^4}{4}+c\frac{x^5}{5}\right]_0^1=0$$

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=0$$

$$20a+15b+12c=0$$

תרגיל

יהי $M_{2x2}[R] \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $W = span$.

מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $M_{2x2}[R]$. הראה כי מתקיים משפט הפירוק האורתוגונלי.

פתרון

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \ , \left\langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$$

$$tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 0 \quad tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 0 \quad tr\left[\begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 0 \quad z + t = 0$$

$$tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 0 \quad tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 0 \quad tr\left[\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad z = 0$$

תרגיל

נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (3,-2,1)\}$

ב- R^3.

א. הראה שהקבוצה S היא אורתוגונלית.

ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- R^3.

פתרון

א. נראה שהקבוצה אורתוגונלית.

$$(2,1,-4)\cdot(1,2,1)=0$$

$$(2,1,-4)\cdot(3,-2,1)=0$$

$$(1,2,1)\cdot(3,-2,1)=0$$

ב. ננרמל את הקבוצה:

$$S=\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}}\ ,\ \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\ ,\ \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}\right\}$$

$$S=\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{21}}\ ,\ \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$$

ג. על פי משפט קבוצה אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית היא

בלתי תלויה לינארית ולכן מאחר שהקבוצה מכילה 3 וקטורים בלתי תלויים לינארית

ב- R^3 הבוצה מהווה בסיס ל- R^3.

תרגיל

נתונה קבוצת וקטורים $S = \{ (2,1,-4)\ ,\ (1,2,1) , (3,-2,1) \}$

ב- R^3 . ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות,

רשום את הווקטור $(13,-1,7)$ כצירוף ליניארי של איברי S .

פתרון

$$(13,-1,7) = x(2,1,-4) + y(1,2,1) + z(3,-2,1)$$

$$(13,-1,7)(2,1,-4) = x(2,1,-4)(2,1,-4) + y(1,2,1)(2,1,-4) + z(3,-2,1)(2,1,-4)$$

$$-3 = x(21)$$

$$(13,-1,7)(1,2,1) = x(2,1,-4)(1,2,1) + y(1,2,1)(1,2,1) + z(3,-2,1)(1,2,1)$$

$$18 = y(6)$$

$$(13,-1,7)(3,-2,1) = x(2,1,-4)(3,-2,1) + y(1,2,1)(3,-2,1) + z(3,-2,1)(3,-2,1)$$

$$48 = z(14)$$

$$x = \frac{-1}{7}\ ,\ y = 3\ ,\ z = \frac{24}{7}$$

$$(13,-1,7) = \frac{-1}{7}(2,1,-4) + 3(1,2,1) + \frac{24}{7}(3,-2,1)$$

תרגיל

נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (3,-2,1)\}$

ב- R^3 . רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור

כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- R^3 ביחס לבסיס S .

פתרון

$$(a,b,c)=x(2,1,-4)+y(1,2,1)+z(3,-2,1)$$

$$(a,b,c)(2,1,-4)=x(2,1,-4)(2,1,-4)+y(1,2,1)(2,1,-4)+z(3,-2,1)(2,1,-4)$$

$$2a+b-4c=x(21)$$

$$\frac{2a+b-4c}{21}=x$$

$$(a,b,c)(1,2,1)=x(2,1,-4)(1,2,1)+y(1,2,1)(1,2,1)+z(3,-2,1)(1,2,1)$$

$$a+2b+c=y(6)$$

$$\frac{a+2b+c}{6}=y$$

$$(a,b,c)(3,-2,1)=x(2,1,-4)(3,-2,1)+y(1,2,1)(3,-2,1)+z(3,-2,1)(3,-2,1)$$

$$3a-2b+c=z(14)$$

$$\frac{3a-2b+c}{14}=z$$

$$(a,b,c)=\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,-4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$$

תרגיל

נניח ש- $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.

הוכח שלכל $v\in V$

$$v=\frac{<v,u_1>}{<u_1,u_1>}u_1+\frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2+...+\frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}u_n\ .$$

הערה: הקבוע $a_i=\dfrac{<v,u_i>}{<u_i,u_i>}$ נקרא מקדם פורייה

של v ביחס ל- u_i או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

פתרון

$$v=a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n$$

$$\langle v,u_1\rangle=\langle a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n,u_1\rangle$$

$$\langle v,u_1\rangle=\langle a_1u_1,u_1\rangle+\langle a_2u_2,u_1\rangle+...\langle a_nu_n,u_1\rangle$$

$$\langle v,u_1\rangle=a_1\langle u_1,u_1\rangle+a_2\langle u_2,u_1\rangle+...+a_n\langle u_n,u_1\rangle$$

$$\langle v,u_1\rangle=a_1\langle u_1,u_1\rangle+a_2\underbrace{\langle u_2,u_1\rangle}_{0}+...+a_n\underbrace{\langle u_n,u_1\rangle}_{0}$$

$$a_1=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}$$

$$\langle v,u_2\rangle=\langle a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n,u_2\rangle$$

$$\langle v,u_2\rangle=\langle a_1u_1,u_2\rangle+\langle a_2u_2,u_2\rangle+...+\langle a_nu_n,u_2\rangle$$

$$\langle v,u_2\rangle=a_1\langle u_1,u_2\rangle+a_2\langle u_2,u_2\rangle+...+a_n\langle u_n,u_2\rangle$$

$$\langle v,u_2\rangle=a_1\underbrace{\langle u_1,u_2\rangle}_{0}+a_2\langle u_2,u_2\rangle+...+a_n\underbrace{\langle u_n,u_2\rangle}_{0}$$

$$a_2=\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}$$

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

$$\langle v, u_n \rangle = \langle a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n, u_n \rangle$$

$$\langle v, u_n \rangle = \langle a_1u_1, u_n \rangle + \langle a_2u_2, u_n \rangle + \ldots \langle a_nu_n, u_n \rangle$$

$$\langle v, u_n \rangle = a_1 \langle u_1, u_n \rangle + a_2 \langle u_2, u_n \rangle + \ldots + a_n \langle u_n, u_n \rangle$$

$$\langle v, u_n \rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, u_n \rangle}_{0} + a_2 \underbrace{\langle u_2, u_n \rangle}_{0} + \ldots + a_n \langle u_n, u_n \rangle$$

$$a_n = \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle}$$

תרגיל

נתונה קבוצת פונקציות

$V=C[0,\pi]$ -ב $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

פתרון

וקטור האפס (פונקציית האפס) אינו בקבוצה.

על מנת להוכיח שהקבוצה אורתוגונלית עלינו להראות כי

עבור $k\neq\ell$ שלמים מתקיים:

$$\langle\cos kx,\cos\ell x\rangle=0$$

$$\int_0^{\pi}\cos kx\cdot\cos\ell x\;dx=0$$

נראה זאת:

$$\int_0^{\pi}\cos kx\cdot\cos\ell x\;dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(k+\ell\right)x+\cos(k-\ell)\,x\right]\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left(k+\ell\right)x}{k+\ell}+\frac{\sin\left(k-\ell\right)x}{k-\ell}\right\}_0^{\pi}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left(k+\ell\right)\pi}{k+\ell}+\frac{\sin\left(k-\ell\right)\pi}{k-\ell}\right\}$$

$$0$$

נבדוק האם הקבוצה אורתונורמלית. כלומר האם לכל $f \in S$

מתקיים $\|f\|^2 = 1$.

$\|f\|^2$

$\langle f, f \rangle$

$\langle \cos kx, \cos kx \rangle$

$\int_0^\pi (\cos kx \cdot \cos kx)\, dx$ $\boxed{\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$

$\frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2kx)dx$

$\frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right\}_0^\pi$

$\frac{1}{2}\pi$

מסקנה: הקבוצה לא אורתונורמלית.

ננרמל אותה ונקבל: $S = \{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}}, \ldots\}$

תרגיל

נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$

ב- $V=C[0,2\pi]$. האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית. ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית. האם הקבוצה מהווה בסיס?

פתרון

וקטור האפס (פונקציית האפס) אינו בקבוצה.

על מנת להוכיח שהקבוצה אורתוגונלית עלינו להראות כי

עבור k,ℓ שלמים מתקיים:

$$1)\quad \langle\cos kx,1\rangle=0\quad,\quad \int_0^{2\pi}\cos kx\cdot 1\;dx=0\qquad k=1,2,\ldots$$

$$2)\quad \langle\sin kx,1\rangle=0\quad,\quad \int_0^{2\pi}\sin kx\cdot 1\;dx=0\qquad k=1,2,\ldots$$

$$3)\quad \langle\cos kx,\cos\ell x\rangle=0\quad,\quad \int_0^{2\pi}\cos kx\cdot\cos\ell x\;dx=0\qquad k,\ell=1,2,\ldots\quad(k\neq\ell)$$

$$4)\quad \langle\sin kx,\sin\ell x\rangle=0\quad,\quad \int_0^{2\pi}\sin kx\cdot\sin\ell x\;dx=0\qquad k,\ell=1,2,\ldots\quad(k\neq\ell)$$

$$5)\quad \langle\cos kx,\sin\ell x\rangle=0\quad,\quad \int_0^{2\pi}\cos kx\cdot\sin\ell x\;dx=0\qquad k,\ell=1,2,\ldots$$

נראה זאת:

1) $\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot 1 \; dx = \left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 =$

2) $\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot 1 \; dx = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{k}\right) - \left(-\frac{1}{k}\right) = 0$

3) $\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(k+\ell)x + \cos(k-\ell)x\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} + \frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(k+\ell)2\pi}{k+\ell} + \frac{\sin(k-\ell)2\pi}{k-\ell}\right\}$$

$$= 0$$

4) $\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell} - \frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(k-\ell)2\pi}{k-\ell} - \frac{\sin(k+\ell)2\pi}{k+\ell}\right\}$$

$$= 0$$

5) $\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin \ell x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\sin(k+\ell)x - \sin(k-\ell)x\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(k+\ell)x}{k+\ell} + \frac{\cos(k-\ell)x}{k-\ell}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

נבדוק האם הקבוצה אורתונורמלית. כלומר האם לכל $f \in S$

מתקיים $\|f\|^2 = 1$.

$$a)\ \ f = 1 \ \Rightarrow\ \|f\|^2 = \langle 1,1\rangle = \int_0^{2\pi} 1dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$b)\ \ f = \cos kx \ \Rightarrow\ \|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle \cos kx, \cos kx\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos kx \cdot \cos kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2kx)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

$$c)\ \ f = \sin kx \ \Rightarrow\ \|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle \sin kx, \sin kx\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin kx \cdot \sin kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2kx)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

כפי שניתן לראות הקבוצה לא אורתונורמלית. ננרמל אותה:

$$S = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right)$$

תרגיל

נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)$ ב- R^3.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.

פתרון

האם הקבוצה אורתוגונלית ?

הקבוצה אורתוגונלית מאחר שהיא אינה מכילה את וקטור האפס

ואיבריה אורתוגונליים בזוגות. נראה זאת:

$$(2,4,4)\cdot(4,-1,-1)=0$$

$$(2,4,4)\cdot(0,2,-2)=0$$

$$(4,-1,-1)\cdot(0,2,-2)=0$$

האם הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי ?

הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי ל- R^3 מאחר שיש בה בדיוק 3 וקטורים.

האם הקבוצה אורתונורמלית ?

הקבוצה איננה אורתונורמלית כי לא מתקיים שהנורמה של כל איברי הקבוצה היא 1.

נראה זאת:

$$\|(2,4,4\|^2=(2,4,4)\cdot(2,4,4)=36$$

$$\|(0,2,-2)\|^2=(0,2,-2)\cdot(0,2,-2)=8$$

$$\|(4,-1,-1)\|^2=(4,-1,-1)\cdot(4,-1,-1)=18$$

ננרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית שתהייה גם בסיס אורתונורמלי

מאחר שהיא הייתה בסיס אורתוגונלי.

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$$

תרגיל

נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1]).

פתרון

הקבוצה איננה אורתוגונלית ולכן ממילא לא מקיימת שום דבר אחר בשאלה.

נראה למשל $\langle 1,x\rangle \neq 0$.

ואכן : $\int_0^1 x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\neq 0$

תרגיל

נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1])

פתרון

האם הקבוצה אורתוגונלית?

כן. וקטור האפס אינו שייך לה ואיבריה אורתוגונליים בזוגות. נראה זאת:

$$\langle 1,2x-1\rangle=\int_0^1(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_0^1=0$$

$$\langle 1,6x^2-6x+1\rangle=\int_0^1(6x^2-6x+1)dx=\left[2x^3-3x^2+x\right]_0^1=0$$

$$\langle 2x-1,6x^2-6x+1\rangle=\int_0^1\left[(2x-1)(6x^2-6x+1)\right]dx$$
$$=\int_0^1(12x^3-18x^2+8x-1)dx=\left[3x^4-6x^3+4x^2-x\right]_0^1=0$$

האם הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי ?

כן. לפי משפט מאחר שהקבוצה אורתוגונלית אז איבריה בלתי תלויים לינארית.

לפי משפט אחר כל 3 פולינומים בלתי תלויים לינארית במרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה לשתיים מהווים בסיס למרחב.

האם הקבוצה אורתונורמלית ?

לא. לא מתקיים שהנורמה של כל איברי הקבוצה שווה לאחת. נראה זאת:

$$\|1\|^2=\langle 1,1\rangle=\int_0^1 1dx=[x]_0^1=1$$

$$\|2x-1\|^2=\langle 2x-1,2x-1\rangle=\int_0^1\left[(2x-1)^2\right]dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\|6x^2-6x+1\|^2=\langle 6x^2-6x+1,6x^2-6x+1\rangle=\int_0^1\left[(6x^2-6x+1)(6x^2-6x+1)\right]dx$$
$$=\int_0^1(36x^4-72x^3+48x^2-12x+1)dx=\left[\frac{36}{5}x^5-18x^4+16x^3-6x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}+7-18+16-6+1=\frac{1}{5}$$

ננרמל את הקבוצה לקבלת בסיס אורתונורמלי:

$$S=\left\{1,\frac{1}{\sqrt{1/3}}(2x-1),\frac{1}{\sqrt{1/5}}(6x^2-6x+1)\right\}$$

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

תרגיל

נתונה קבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי ?

האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?

במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.

ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות .

פתרון

האם הקבוצה אורתוגונלית?

כן. וקטור האפס אינו שייך לקבוצה ואיבריה אורתוגונליים בזוגות. נראה זאת :

$$\left\langle\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\begin{pmatrix}2&&\\&6&\\&&-8\end{pmatrix}=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}=0$$

היא לא בסיס אורתוגונלי כי כדי להיות בסיס למרחב הטריצות 3X3 צריך

9 מטריצות.

נבדוק האם הקבוצה אורתונורמלית. לשם כך נחשב את הנורמה של כל איבר בקבוצה:

$$\left\|\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right\|^2=\left\langle\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&0\\6&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right]=4+20+56=80$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\|^2=\left\langle\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=1+1+0=2$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\|^2=\left\langle\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=1+2+3=6$$

כפי שניתן לראות הקבוצה אינה אורתונורמלית כי לא כל איברי הקבוצה בעלי נורמה השווה לאחד.

ננרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית:

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

מצא בסיס אורתוגונלי למשלים האורתוגונלי של:
המטריצות האלכסוניות מסדר 3

פתרון

נסמן ב- W את המרחב של כל המטריצות האלכסוניות מסדר 3

אז $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

אנו מחפשים בסיס עבור $W^{\perp}$.

תהי $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$. אזי, מתקיים

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}\right]=0 \;\Rightarrow\; x_1=0$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}\right]=0 \;\Rightarrow\; x_5=0$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}\right]=0 \;\Rightarrow\; x_9=0$$

$x_2, x_3 x_4, x_6, x_7, x_8$ *free* !!!

$$B_{W^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

מצא בסיס אורתוגונלי למשלים האורתוגונלי של:
המטריצות הסימטריות מסדר 2.

פתרון

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\rangle=0\quad\Rightarrow\quad tr\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\right]=x_1=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle=0\quad\Rightarrow\quad tr\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\right]=x_2+x_3=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle=0\quad\Rightarrow\quad tr\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\right]=x_4=0$$

$$x_3=-1,\ x_2=1\ ,\ x_1=0\ ,\ x_4=0$$

$$B_{W^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

נניח ש- $w \neq 0$. יהי v וקטור כלשהו ב- V.

הוכח כי $c = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$ הוא הקבוע היחיד

המקיים כי $v' = v - cw$ אורתוגונלי ל- w.

הוקטור cw נקרא ההיטל של הוקטור v

לאורך הוקטור w. הסבר מדוע

c נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- w.

פתרון

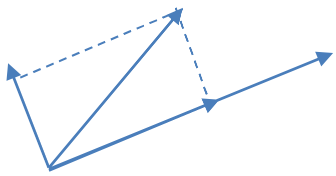
$$v' \perp w \Leftrightarrow$$

$$\langle v', w \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle v - cw, w \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle v, w \rangle - c\langle w, w \rangle \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$



תרגיל

מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$ ב- R^3.

פתרון

נניח ש- $w\neq 0$. יהי v וקטור כלשהו ב- V.

מקדם פורייה : $c=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$

ההיטל של הוקטור v לאורך הוקטור w :

$proj(v,w)=cw$.

מקדם פורייה –

$$c=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$$

$$c=\frac{\langle (1,2,2),(0,1,-1)\rangle}{\langle (0,1,-1),(0,1,-1)\rangle}$$

$$c=\frac{0+2-2}{2}=0$$

$$proj(v,w)=cw=0$$

תרגיל

מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$ ב- R^4. מסמנים גם $proj(v,w)$.

פתרון

נניח ש- $w\neq 0$. יהי v וקטור כלשהו ב- V.

מקדם פורייה: $c=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$

ההיטל של הוקטור v לאורך הוקטור w:

$proj(v,w)=cw$.

בתרגיל שלנו:

$$c=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$$

$$c=\frac{\langle (1,-2,2,0),(0,2,-1,2)\rangle}{\langle (0,2,-1,2),(0,2,-1,2)\rangle}$$

$$c=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$$

$$proj(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2)$$

תרגיל

מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x) = 2x - 1$

לאורך $q(x) = x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה

הפנימית האינטגרלית ב- [0,1] .

פתרון

נניח ש- $w \neq 0$. יהי v וקטור כלשהו ב- V.

מקדם פורייה : $c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$

ההיטל של הוקטור v לאורך הוקטור w :

$proj(v, w) = cw$.

בתרגיל שלנו :

$$c = \frac{\langle p, q \rangle}{\langle q, q \rangle}$$

$$c = \frac{\langle 2x - 1, x^2 \rangle}{\langle x^2, x^2 \rangle}$$

$$\langle 2x - 1, x^2 \rangle = \int_0^1 (2x - 1)x^2 dx = \int_0^1 (2x^3 - x^2) dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 x^2 x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$c = \frac{\langle 2x - 1, x^2 \rangle}{\langle x^2, x^2 \rangle} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

$$proj(p, q) = c \cdot q(x) = \frac{5}{6} x^2$$

תרגיל

מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

לאורך $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2

עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

פתרון

נניח ש- $w\neq 0$. יהי v וקטור כלשהו ב- V.

מקדם פורייה : $c=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$

ההיטל של הוקטור v לאורך הוקטור w :

$proj(v,w)=cw$.

בתרגיל שלנו :

$$c=\frac{\langle A,B\rangle}{\langle B,B\rangle}$$

$$c=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle}$$

$$\boxed{\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left(\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}-2&*\\ *&4\end{pmatrix}=2$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left(\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}2&*\\ *&4\end{pmatrix}=6$$

$$c=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$proj(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$$

תרגיל

נניח ש- $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ הוא בסיס של מרחב מכפלה פנימית V.
תאר את אלגוריתם גראם-שמידט בעזרתו ניתן לקבל בסיס
אורתוגונלי (ועל ידי נירמול אורתונורמלי) עבור V.

פתרון

נניח ש- $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ הוא בסיס של מרחב מכפלה פנימית V.

ניתן לקבל בסיס אורתוגונלי $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ עבור V כלהלן. הצב:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\|w_3\|^2} w_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}$$

לקבלת בסיס אורתונורמלי ננרמל את הוקטורים $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$

הערה: בחישובים ידניים, ניתן לפשט את החישובים על ידי סילוק השברים

בעזרת הכפלת w_k בסקלר מתאים, מאחר שפעולה זו אינה משפיעה על האורתוגונליות.

תרגיל

נתון: $R^3 \subseteq \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} U = span$.

מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

פתרון

נמצא ראשית בסיס עבור U:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אם כן, בסיס עבור U:

$$B_U = \{v_1 = (1,2,3)\ ,\ v_2 = (0,1,2)\}$$

לפי גראם-שמידט קיים בסיס אורתוגונלי $B = \{w_1, w_2\}$ המתקבל כך:

$$w_1 = v_1 = (1,2,3)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= (0,1,2) - \frac{\langle (0,1,2),(1,2,3)\rangle}{\|(1,2,3)\|^2}(1,2,3)$$

$$= (0,1,2) - \frac{8}{1+4+9}(1,2,3)$$

$$= (0,1,2) - \frac{4}{7}(1,2,3)$$

$$= (-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$$

$$= \frac{1}{7}(-4,-1,2)$$

$$B_{ortogonal} = \{(1,2,3),\ (-4,-1,2)\}$$

$$check:\ (1,2,3)\cdot(-4,-1,2) = 0$$

מכאן נוכל לקבל בסיס אורתונורמלי על ידי נירמול הוקטורים שהתקבלו :

$$B_{ortonormal} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+4+9}}(1,2,3)\,,\ \frac{1}{\sqrt{16+1+4}}(-4,-1,2) \right\}$$

$$B_{ortonormal} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3)\,,\ \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2) \right\}$$

תרגיל

נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq R^4$.

מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

פתרון

$$B_U = \{v_1 = (2,2,2,2), v_2 = (1,1,2,4), v_3 = (1,2,-4,-3)\}$$

לפי גראם-שמידט קיים בסיס אורתוגונלי $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ המתקבל כך:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

החישובים:

$$w_1 = v_1 = (2,2,2,2)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= (1,1,2,4) - \frac{\langle (1,1,2,4),(2,2,2,2) \rangle}{\|(2,2,2,2)\|^2}(2,2,2,2)$$

$$= (1,1,2,4) - \frac{16}{16}(2,2,2,2)$$

$$= (-1,-1,0,2)$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1 = (2,2,2,2)\ ,\ w_2 = (-1,-1,0,2),\ w_3\}$$

$$v_3 = (1,2,-4,-3)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$w_3 = (1,2,-4,-3) - \frac{\langle (1,2,-4,-3),(2,2,2,2)\rangle}{\|(2,2,2,2)\|^2}(2,2,2,2) - \frac{\langle (1,2,-4,-3),(-1,-1,0,2)\rangle}{\|(-1,-1,0,2)\|^2}(-1,-1,0,2)$$

$$= (1,2,-4,-3) - \frac{-8}{16}(2,2,2,2) - \frac{-9}{6}(-1,-1,0,2)$$

$$= (1,2,-4,-3) + \frac{1}{2}(2,2,2,2) + \frac{3}{2}(-1,-1,0,2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3, 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1,3,-6,2)$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1 = (2,2,2,2)\ ,\ w_2 = (-1,-1,0,2),\ w_3 = (1,3,-6,2)\}$$

$$check:\ (2,2,2,2)\cdot(-1,-1,0,2) = 0\ \ ,\ \ (1,3,-6,2)\cdot(-1,-1,0,2) = 0$$

$$(2,2,2,2)\cdot(1,3,-6,2) = 0$$

$$B_{ortonormal} = \left\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{16}}(2,2,2,2)\ ,\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2),\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{50}}(1,3,-6,2)\right\}$$

תרגיל

נתון: $U = span\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U

בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [-1,1] .

פתרון

$$B_U = \left\{v_1 = 4, v_2 = x, v_3 = x^2,\ v_4 = x^3\right\}$$

לפי גראם-שמידט קיים בסיס אורתוגונלי $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ המתקבל כך:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3\rangle}{\|w_3\|^2} w_3$$

החישובים:

$$w_1 = v_1 = 4$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= x - \frac{\langle x, 4\rangle}{\|4\|^2} 4$$

$$= x - \frac{0}{\|4\|^2} 4$$

$$= x$$

$$\boxed{\langle x, 4\rangle = \int_{-1}^{1} 4x dx = \left[2x^2\right]_{-1}^{1} = 0}$$

$$B_U = \left\{ v_1 = 4, v_2 = x, v_3 = x^2,\ v_4 = x^3 \right\}$$

$$B_{ortogonal} = \{ w_1 = 4\ ,\ w_2 = x\ ,\ w_3 = ?,\ w_4 = ? \}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$= x^2 - \frac{\langle x^2, 4 \rangle}{\|4\|^2} \cdot 4 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

$$= x^2 - \frac{\frac{8}{3}}{32} \cdot 4 - \frac{0}{\|x\|^2} \cdot x$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle x^2, 4 \rangle = \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

$$\langle x^2, x \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\|4\|^2 = \langle 4, 4 \rangle = \int_{-1}^{1} 16 dx = [16x]_{-1}^{1} = 32$$

$$B_U = \left\{ v_1 = 4, v_2 = x, v_3 = x^2,\ v_4 = x^3 \right\}$$

$$B_{ortogonal} = \{ w_1 = 4\ ,\ w_2 = x\ ,\ w_3 = 3x^2 - 1,\ w_4 = ? \}$$

$$B_U = \{v_1 = 4, v_2 = x, v_3 = x^2,\ v_4 = x^3\}$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1 = 4\ ,\ w_2 = x\ ,\ w_3 = 3x^2 - 1,\ w_4 = ?\}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3\rangle}{\|w_3\|^2} w_3$$

$$w_4 = x^3 - \frac{\langle x^3, 4\rangle}{\|4\|^2}\cdot 4 - \frac{\langle x^3, x\rangle}{\|x\|^2}\cdot x - \frac{\langle x^3, 3x^2-1\rangle}{\|3x^2-1\|^2}\cdot\left(3x^2-1\right)$$

$$= x^3 - \frac{0}{\|4\|^2}\cdot 4 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}\cdot x - \frac{0}{\|3x^2-1\|^2}\cdot\left(3x^2-1\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\langle x^3, 4\rangle = \int_{-1}^{1} 4x^3 dx = \left[x^4\right]_{-1}^{1} = 0\\
&\langle x^3, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\\
&\langle x^3, 3x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} (3x^5 - x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0\\
&\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}}$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1 = 4\ ,\ w_2 = x\ ,\ w_3 = 3x^2 - 1,\ w_4 = 5x^3 - 3x\}$$

לקבלת בסיס אורתונורמלי נרמל כל אחד מהפולינומים שהתקבלו :

$$B_{ortonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\|4\|}\ ,\ \hat{w}_2 = \frac{x}{\|x\|}\ ,\ \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\|3x^2-1\|},\ \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\|5x^3-3x\|}\right\}$$

$$B_{ortonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}\ ,\ \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{2/3}}\ ,\ \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{8/5}},\ \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{8/7}}\right\}$$

$$\|4\|^2=\langle 4,4\rangle=\int_{-1}^{1}16dx=[16x]_{-1}^{1}=32$$

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\|3x^2-1\|^2&=\int_{-1}^{1}(3x^2-1)(3x^2-1)dx\\&=\int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)dx\\&=\left[\frac{9x^5}{5}-2x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|5x^3-3x\|^2&=\int_{-1}^{1}\left(5x^3-3x\right)\left(5x^3-3x\right)dx\\&=\int_{-1}^{1}\left(25x^6-30x^4+9x^2\right)dx\\&=\left(25\frac{x^7}{7}-6x^5+3x^3\right)_{-1}^{1}\\&=2(\frac{25}{7}-6+3)\\&=2(\frac{25}{7}-\frac{42}{7}+\frac{21}{7})=\frac{8}{7}\end{aligned}$$

תרגיל

נתון: $M_2[R] \supseteq$ $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\}U=span$.

מצא בסיס אורתונורמלי ל- U בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה

של המטריצות.

פתרון

$$B_U=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי גראם-שמידט קיים בסיס אורתוגונלי $B=\{w_1,w_2,w_3\}$ המתקבל כך:

$$w_1=v_1$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2$$

כאשר: $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$. החישובים:

$$B_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{15} & \frac{30}{15} \\ -\frac{15}{15} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{3}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{28}{15} \\ \frac{-18}{15} & \frac{-4}{15} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\begin{pmatrix} -2 & * \\ * & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = tr\begin{pmatrix} 10 & * \\ * & 20 \end{pmatrix} = 30$$

$$B_{ortogonal} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix},\ w_3 = ? \right\}$$

$$B_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{ortogonal} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix},\ w_3 = ? \right\}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{17}{330} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{660}{330} \\ \frac{330}{330} & \frac{330}{330} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{121}{330} & \frac{242}{330} \\ \frac{363}{330} & \frac{484}{330} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{119}{330} & \frac{238}{330} \\ -\frac{153}{330} & -\frac{34}{330} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{330} \begin{pmatrix} -240 & 180 \\ 120 & -120 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{60}{330} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{11} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{ortogonal} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = tr\begin{pmatrix} 3 & * \\ * & 8 \end{pmatrix} = 11$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = tr\begin{pmatrix} 10 & * \\ * & 20 \end{pmatrix} = 30$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = tr\begin{pmatrix} -9 & * \\ * & 26 \end{pmatrix} = 17$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= tr\begin{pmatrix} 130 & * \\ * & 200 \end{pmatrix} = 330$$

קיבלנו : $B_{ortogonal} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי, ננרמל כל אחד מאיברי הבסיס :

$$B_{ortonormal} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|},\ \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \right\|},\ \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\|} \right\}$$

$$B_{ortonormal} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}},\ \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{330}},\ \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{33}} \right\}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\right\|^2=\left\langle\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\right\rangle=tr\left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\right)$$

$$=tr\begin{pmatrix}20 & *\\ * & 13\end{pmatrix}=33$$