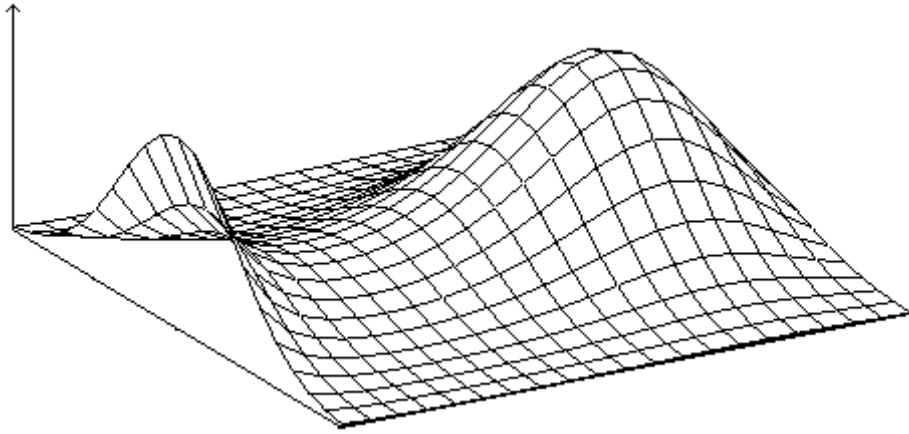


# כלים מתמטיים



גיא סלומון

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בכלים מתמטיים והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)  
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/hedva2.html](http://www.GooL.co.il/hedva2.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

4	פרק 1 - טורים עם איברים קבועים.....
8	פרק 2 - טורי פונקציות וטורי חזקות.....
11	פרק 3 - משוואות מסדר ראשון.....
11	פרק 3.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים.....
12	פרק 3.2 - משוואות הומוגניות.....
14	פרק 3.3 - משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ .....
15	פרק 3.4 - משוואות מדויקות.....
16	פרק 3.5 - הפיכת משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה).....
18	פרק 3.6 - משוואה לינארית.....
19	פרק 3.7 - משוואת ברנולי.....
20	פרק 3.8 - משוואת ריקטי.....
21	פרק 3.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה.....
22	פרק 4 - משוואות לינאריות מסדר שני.....
22	פרק 4.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה).....
23	פרק 4.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים.....
24	פרק 4.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים.....
25	פרק 4.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים..
26	פרק 4.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות ...

## פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

### טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

### טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

### טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad (4)$$

### תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad (1)$$

### מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad (4)$$

מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} \quad (6) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) \quad (7)$$

מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) & \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7) \end{aligned}$$

### הוכח או הפרך

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו-  $\sum b_n$  מתבדר אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו-  $\sum b_n$  מתבדר אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ד. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ה. אם  $\sum a_n$  מתכנס אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

**פתרונות – פרק 1**

		(1)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/3$	(1) מתכנס ל- $11/14$
(6) מתכנס ל- 8	(5) מתכנס ל- $11/12$	(4) מתכנס ל- $-64/7$
		(2)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/12$	(1) מתכנס ל- $1/2$
		(3)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
		(4)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
		(5)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתבדר	(5) מתבדר	(4) מתבדר
		(6)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתבדר	(4) מתכנס
		(7)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתבדר
		(8)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתכנס
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתכנס
		(9)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתכנס
		(10)
(3) מתכנס בתנאי	(2) מתכנס בהחלט	(1) מתבדר
(6) מתכנס בהחלט	(5) מתכנס בהחלט	(4) מתכנס בתנאי
(9) מתכנס בתנאי	(8) מתכנס בתנאי	(7) מתכנס בתנאי

## פרק 2 - טורי פונקציות וטורי חזקות

### טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 nx} \quad (4)$$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן :

$$(-1 \leq x \leq 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (6) \quad (-a \leq x \leq a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (5)$$

### טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n (x+5)^n \quad (10)$$



(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (9) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (8) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (11) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (10)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (15) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (14) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (13)$$

#### הערות חשובות:

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

**פתרונות – פרק 2**

(1)

$x < 3\frac{9}{10} \text{ or } x \geq 4\frac{1}{10} \quad (3)$

$x \neq 5 \quad (2)$

$x > 0 \quad (1)$

$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6)$

$x > 0 \quad (5)$

$0 < x \neq \frac{1}{n} \quad (4)$

(2)

מתכנס במידה שווה (3)

מתכנס במידה שווה (2)

מתכנס במידה שווה (1)

מתכנס במידה שווה (6)

מתכנס במידה שווה (5)

מתכנס במידה שווה (4)

(3)

$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad (3)$

$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (2)$

$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad (1)$

$-1 < x < 1, R = 1 \quad (6)$

$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad (5)$

$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad (4)$

$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad (9)$

$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (8)$

$x = 1, R = 0 \quad (7)$

$-7 < x < -3, R = 2 \quad (12)$

$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad (11)$

$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad (10)$

(4)

$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (2)$

$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (1)$

$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (4)$

$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (3)$

$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (6)$

$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (5)$

$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (8)$

$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (7)$

$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (10)$

$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (9)$

$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (12)$

$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11)$

$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (14)$

$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \quad (13)$

$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} (2n+1)} \quad (15)$

## פרק 3 - משוואות מסדר ראשון

### פרק 3.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy' \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1) \frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

#### תשובות:

$$(1) y = \pm \sqrt{x^2 + k} \quad (2) y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (3) y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, y = 0$$

$$(4) \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (5) \frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (6) \ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$$

$$(7) \frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, y = -2 \quad (8) y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (9) x = 1 + \tan(t + c)$$

$$(10) y = -\frac{1}{\cos x} \quad (11) \ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (12) \frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$$

[www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il) לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל-

כתב ופתר - גיא סלומון ©

### פרק 3.2 - משוואות הומוגניות

(1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

(2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (3)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (4)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (5)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (6)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (7)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (8)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (9)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 .$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$  על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף א.

**תשובות:**

$$(3) -\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, y = -\frac{x}{2^{1/3}}$$

$$(4) \ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, y = x, y = -3x$$

$$(5) -\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, y = 0$$

$$(6) -\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, y = 0, y = -2x$$

$$(7) \ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (8) \ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, y = 0 \quad (9) \ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

$$(10) \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, x(t) = 0, x(t) = t$$

$$(11) n = 1, \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(x/y)^2) + c$$

פרק 3.3 - משוואות מהצורה  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

(1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (2)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (5)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5$$

$$(3) \quad 0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k$$

$$(4) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1$$

$$(5) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c,$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$(6) \quad \ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c$$

### פרק 3.4 - משוואות מדויקות

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה  
פתור את המשוואות הבאות:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (3)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (4)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (5)$$

$$\left( y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left( \frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (6)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (7)$$

(8) נתונה המשוואה  $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$  באשר  $k$  קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שמצאת בסעיף א.

#### תשובות:

$$(2) 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (3) e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (4) y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

$$(5) x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (6) \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c$$

$$(7) x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (8) k = 1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c$$

**פרק 3.5 - הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת (גורם אינטגרציה)**

(1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(2) הראה שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(3) הראה שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(4) הראה שהמשוואה  $(x+2)\sin ydx + x\cos ydy = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה  $xe^x$ .

(5) פתור את המשוואה  $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$ .

(6) פתור את המשוואה  $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$ .

(7) פתור את המשוואה  $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$ .

(8) פתור את המשוואה  $(y^2 - y)dx + xdy = 0$ .

(9) פתור את המשוואה  $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$ .

(10) פתור את המשוואה  $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$ .



**תשובות:**

$$(2) 0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (3) e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (4) \sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c$$

$$(5) 0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (6) \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (7) x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c$$

$$(8) x - \frac{x}{y} = c \quad (9) -\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (10) -\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3}$$

### פרק 3.6 - משוואה לינארית

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

#### תשובות:

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$

### פרק 3.7 - משוואת ברנולי

(1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (3)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (4)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (5)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (6)$$

#### תשובות:

$$(2) y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}}$$

$$(3) y = \frac{x^2 + 1}{-x + C}$$

$$(4) y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2$$

$$(5) y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$$

$$(6) z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$$

### פרק 3.8 - משוואת ריקטי

(1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (2)$$

$$y' = -(1+x+x^2) - (2x+1)y - y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (4)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (5)$$

#### תשובות:

$$(2) \quad y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (3) \quad y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

$$(4) \quad y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (5) \quad y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x}$$

### פרק 3.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

#### הערה

בתת-פרק זה מסמנים  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

(1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (3)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (4)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (5)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (6)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (7)$$

#### תשובות:

$$(2) (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0$$

$$(3) (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$$

$$(4) (y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot (\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0, \quad x > 0 \quad (5) \quad y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (7) \quad 6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$$

## פרק 4 - משוואות לינאריות מסדר שני

### פרק 4.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)

(1) הגדר משוואה חסרה מסדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (3)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (5)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (6)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (7)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (8)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (9)$$

#### תשובות:

$$(2) \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (3) \quad y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2$$

$$(4) \quad y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 ; \quad y = \pm x + C_3$$

$$(5) \quad y = C_1 (x \ln x - x) + C_2 ; \quad y = C_3 \quad (6) \quad y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$(7) \quad \frac{y^2}{2} = cx + k ; \quad y = c \quad (8) \quad y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (9) \quad \cot y = -(cx + k) ; \quad y = c$$

## פרק 4.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

(1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' - 100y = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (4)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (5)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (6)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (8)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (10)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (11)$$

### תשובות:

$$(2) y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (3) y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (4) y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (5) z = e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (7) x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (8) y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (10) y = e^2 \sin 3x \quad (11) y = e^{-4x/5} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

**פרק 4.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**השוואת מקדמים**

(1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.  
פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (2)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7; y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (3)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (4)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (5)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (8)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (9)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (10)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (11)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (12)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (13)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (3) y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (5) y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$$

$$(6) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (7) c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (9) z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (11) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$$

$$(12) x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (13) y = e^{-x} \sin 2x$$



**פרק 4.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**וריאצית פרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (3)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (5)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (6)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (7)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x|$$

$$(3) y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1]$$

$$(4) y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}]$$

$$(5) y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})]$$

$$(7) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x$$

**פרק 4.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**שיטה אופרטורית**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (2)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (4)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (5)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (6)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (7)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (8)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \text{ - הערת סימון}$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (3) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (5) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$$

$$(6) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (7) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$$