סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס נושאים במתמטיקה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תוכן

לוגיקה

1) רשום את טבלות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$

ב. $\neg(p\wedge q)\to(\neg r)$

ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$

ד. $(p\vee q)\to(q\to r)$

2) בטא את שלילת הפסוקים הבאים. (בלי קשר לנכונותם)

א. דוד יפה או ראובן מכוער

ב. האוכל חם וטעים

ג. לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

3) בדוק אלו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית במקרה שהתשובה חיובית הראה זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר

א. $\neg(p\to q)$ $p\wedge(\neg q)$

ב. $(\neg p)\to q$ $p\vee(\neg q)$

ג. $p\to(\neg q)$ $\neg(p\wedge q)$

ד. $(p\vee q)\wedge(\neg q)$ $p\wedge(\neg q)$

ה. $p\leftrightarrow q$ $(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

ו. $(s\to(p\wedge(\neg r)))\wedge((p\to(r\vee q))\wedge s)$ $p\vee u$

ז. הראה כי $\neg(r\wedge(p\vee q))\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))\vee\neg r$ בעזרת זהויות יסוד.

4) א. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ב. הבע את קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ג. הבע את קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ד. הבע את קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ה. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ו. הבע את הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ז. הבע את קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ח. הבע את קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

5) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים הבאים:

$$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$$
$$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$$
$$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$$
$$\beta:D\vee(B\wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו.

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כלומר סותרת אתם.

6) הוכח כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות ללא שימוש בטבלת אמת

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\to q)$

ג. $(p\to q)\vee(q\to r)$

ד. $(p\wedge(p\to q))\to q$

ה. $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

ו. $((p\to r)\wedge(q\to r))\to((p\vee q)\to r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\to((\neg p)\to((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\to(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\to D)\wedge(E\to(\sim D)))\to(A\to\sim E)$

ט. הוכח בעזרת טבלת אמת שהפסוק $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))$ הוא טאוטולוגיה.

י. הוכח כי הפסוק $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u)) \to (((p \to r) \wedge ((\neg q) \to p) \wedge (\neg r)) \to q)$ הוא טאוטולוגיה. (מותר לך להסתמך על הסעיף הקודם)

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. לפניך ניתוח המצב.

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D הרופאים יסיימו את השביתה H הנהלות בתי החולים יתערבו. P בית המשפט יתערב

C לא תפגע בריאותם של החולים M הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרן בעזרת המשתנים המוצעים את טיעון לשפת תחשיב הפסוקים.

ב. בדוק ללא שימוש בטבלת אמת אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות זרובבל, כתבינו לענייני מפלגות מנתח את המצב:

* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן מסיק כתבינו שדני יפרוש.

סמן: A אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב. B בני יבחר לראשות מפלגת פיתה. C שמעון יציע לדני תפקיד. D דני יפרוש.

הצרן את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכח כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם רוצים שהתיאטרון נגיש לתושבים אז צריך להקימו בלב העיר. אם רוצים שהתיאטרון יהיה רווחי הוא צריך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר אז הוא יעלה 10 מליון זוזים פרסיים. אבל לוייזתא היזם אין 10 מליון זוזים פרסיים לכן מסיק וייזתא היזם כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגם את ניתוח המצב לשפת הפסוקים תוך שימוש בסימונים הבאים:

N נגיש לתושבים L בלב העיר Y יכיל הרבה אנשים G גדול ומרווח M מחירו

יעלה על . . .   R ריווחי

הצרן את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים בדוק האם המסקנה תקפה ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (כאשר p,q,r פסוקים אטומים)

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\to q)\Rightarrow q$

ד. $p,p\to q\Rightarrow q$

ה. $(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p$

ז. $A\to B,C\to B,D\to(A\vee C),D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\to D),D\to(C\vee P),P\to Q,(\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\to(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\to D)\ ,\ (E\to(\sim D))\models(A\to\sim E)$

11) בסעיפים הבאים α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם α סתירה וגם $\alpha\Rightarrow\beta\vee\gamma$ אז $\beta\Rightarrow\neg\gamma$

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha\Rightarrow\beta\vee\gamma$ אז $\neg\beta\Rightarrow\gamma$

ג. אם $\alpha\Rightarrow\beta\vee\gamma$ אז $((\alpha\Rightarrow\beta)\vee(\alpha\Rightarrow\gamma))$

ד. אם $((\alpha\Rightarrow\beta)\vee(\alpha\Rightarrow\gamma))$ אז $\alpha\Rightarrow\beta\vee\gamma$

ה. אם $\alpha\Rightarrow\beta\wedge\gamma$ אז $((\alpha\Rightarrow\beta)\wedge(\alpha\Rightarrow\gamma))$

ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$ אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$

ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$ אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$ אז $\alpha, \beta \models \gamma$

יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$ אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$

12) עבור α פסוק אטומי או מורכב נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma | \alpha \Rightarrow \gamma\}$ כלומר F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α. הוכח כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה ורשום את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמק זאת ובמקרה שהטענה אינה נכונה הבא דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \square\ (\exists y \in \square\ (x < y))$

ב. $\forall x \in \square\ (\exists y \in \square\ (x > y))$

ג. $\forall x, y \in \square\ (x > y) \to \exists z \in \square\ (x > y + z)$

ד. $\forall x \in \square\ (x > 0) \to (\exists n \in \square\ (x > \frac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \square\ (x \neq 0 \to \forall y \in \square\ \exists z \in \square\ (xz = y))$

ו. $\forall x \in \square\ (x \geq 1 \to \forall y \in \square\ \exists z \in \square\ (xz = y))$

ז. $\forall x \in \square\ (x > 0 \to \exists y \in \square\ (xy > 1))$

ח. $\forall x \in \square\ \forall y \in \square\ (xy = x \wedge x + y < 5) \to y < 4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \square\ ((x > 0) \to \forall y \in \square\ (\exists n \in \square\ (nx > y)))$

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. במקרה של הפרכה הדגם עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת והסבר מדוע הטענה לא מתקיימת. כמו כן רשום גם את שלילה של כל טענה כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים

א. $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$

ב. $\exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x\, P(x)\wedge \forall x\, Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x\, P(x)\wedge \forall x\, Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x\, P(x)\vee \forall x\, Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x\, P(x)\vee \forall x\, Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x\, P(x)\wedge \exists x\, Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x\, P(x)\wedge \exists x\, Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x\, P(x)\vee \exists x\, Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x\, P(x)\vee \exists x\, Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

15) נסמן
$P(x): x^2-8x+15=0$
$Q(x): x \text{ is odd}$
$R(x): x>0$
$L(x): x^2+2x+2=0$
בעולם הדיון □. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. $\forall x\left[P(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x)\rightarrow P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x)\rightarrow P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x)\rightarrow P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\rightarrow \neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\rightarrow R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\rightarrow \left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\rightarrow \left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. בכל השאלות מותר להשתמש ב- סימני משתנים: x,y,z סימני קבוצה: $A,B,C,\cdots,$□,□,□,□ סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\subseteq$, $\in$, $=$, $\neq$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $($ $)$, $<$, $>$,
וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

<u>שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$!!!

16) הצרן כל אחת מהטענות הבאות.

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מיידי. הכוונה שאין מספר ראשון מייד אחריו.

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות. מותר כאן להשתמש בסימן $\notin$.

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים. כאן גם מותר להשתמש בסימן קבוצה P עבור קבוצת המספרים הראשוניים ובסימן $\notin$.

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים. (ברור שאין כזה אבל צריך רק להצרין.)

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשים יש איבר מינימלי

י. תהי פונקציה $f:X\to Y$. נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\to P(Y)$ באופן הבא:

$$G(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}$$

הצרין את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשי רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים: x,y,B,C סימני קבוצות: X,Y סימן פונקציה: f

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\in$, $=,\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $(,)$, $\subseteq$,

<u>שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.</u>

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\to B$ לכל פונקציה $g:B\to A$ אם $g\circ f=Id_A$ אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם. סימני משתנים $x_1,x_2,\cdots$ קשרים $\to,\leftrightarrow,\wedge,\vee$

והסימנים $\exists,\forall,(,),\in,A^B,B^A,f,g$ ולמען הסר ספק אסור להשתמש ב- d_A ואסור ב- $\circ$

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. 1הצרינו א הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1,x_2,\cdots$ קשרים $\leftrightarrow,\leftrightarrow,\wedge,\vee$

והסימנים $|,=,\cdots,1,2,3,\le,\Box,\in,(,),\forall,\exists$ הסימן $|$ פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים. השתמשו רק בסינמנים הבאים:

סימני משתנים x,y,z סימני קבוצות $A,\square$ וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים:

$\exists,\forall,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,(,),\in,\notin,\neq,=$

טו. הצרינו את הטענה לא תמיד נכון שאם $A\subseteq B$ אז $A\square B$

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני קבוצות A,B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה)

סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists,\forall,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,(,),\in,\neq,=$ אין להשתמש בקשר השלילה

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני משתנים x,y סימני קבוצות $\square,\square$ (וצרופי חזקות שלהן)

סימני פונקציות f,g סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists,\forall,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,(,),\{,\},\in,\neq,=$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1,x_2,\cdots$ קשרים $\leftrightarrow,\leftrightarrow,\wedge,\vee$

והסימנים $0,\leq,\square,\in,(,),\forall$ דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14\leq\pi$ (ע"י כפל במינוס חצי לקבל את

אי השוויון $-0.5\pi\leq-1.57$.

17) נתונה הקבוצה $\{x\in\square\,|\,\forall y[(y\in\{t\in\square\,|t>3\}\rightarrow(y>x))]\}$ כתוב אותה בצורה $\{x\in\square\,|\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

18) תאר במדויק את הקבוצה: $A=\{x\in\square\,|\exists y\in\square\ \ (x=y^2)\rightarrow(x>2)\}-\{x\in\square\,||x|>1\}$

19) הוכח כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$ בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1) $\Rightarrow p\rightarrow p$

2) $p\Rightarrow q\rightarrow p$

3) $p\rightarrow q\ ,\ p\rightarrow(\neg q)\Rightarrow\neg p$

20) הוכח בעזרת ההנחות

$$B \vee D$$
$$C \to B$$
$$D \to (A \vee C)$$
$$\neg B$$

את המסקנה A מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$
$$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$$
$$P, P \to Q \Rightarrow Q$$
$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$
$$P \Rightarrow \neg\neg P$$
$$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$$

קבוצות

1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).
את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.

ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$

ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.

ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$

ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$

ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$

ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.

ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$

ט) $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

י) $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$

יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$

יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ (יז

יז) אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$

יח) אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$

יט) $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$

כ) $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$

כא) השלם $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ________________

2) יהיו A,B,C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.

ב) אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ג) אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.

ד) אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.

ה) אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.

ו) אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.

ז) אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$. (מבחן סמסטר קיץ תשס"ח , מועד ב')

ח) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י) $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

<u>ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.</u>

א) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ב) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$

ג) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$

ד) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$

ה) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.

ו) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C\subseteq B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד) $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה) $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו) אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

ז) אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$

ח) אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

א) $(A=B) \Leftrightarrow (A\times A = B\times B)$

ב) $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B)) \Leftrightarrow (A\times B = B\times A)$

ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

ד) אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז $(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$

ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו- $D\subseteq B$ כך ש- $S=C\times D$

8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A,B,C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו כך ש- $A\cup(B-C)\subseteq A\cap(B-C)$

14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$

15) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$

בנושא פונקציות

1) (חימום)

יהיו f ו- g הפונקציות מ- □ ל- □ המוגדרות כך:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי}\\ n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי}\end{cases}$$

לכל $n\in \mathbf{N}$, $g(n)=2n-1$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

I. f היא חד-חד-ערכית

II. g היא חד-חד-ערכית

III. f היא על □

IV. g היא על □

V. $f\circ g$ היא פונקצית הזהות על □

VI. $g\circ f$ היא פונקצית הזהות על □

2) לגבי כל אחת מהפונק' הבאות קבע האם היא חח"ע והאם היא על. נמק.

א. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$, $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

ב. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f_2(x)=x+\dfrac{1}{x}$

ג. $f_3:(0,\infty)\to$ □ , $f_3(x)=x-\dfrac{1}{x}$

3) יהי $g:A\to B, f:B\to C$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f\circ g:A\to C$) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות (במקרה של הפרכה בחר $A=B=C=\mathbb{R}$)

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע._

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

ו. אם $f\circ g$ על אז g על.

ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$ הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.

ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע אז $g=h$.

ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.

ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע אז $g=h$.

ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

6) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A$ פונקציה הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $f\circ f=f$ אז. $f=I$

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$

ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$

7) יהיו $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (שאלה קשה מאוד)

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$

ביחסים

1) (חימום) רשום במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.

א. היחס R המוגדר מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow b > a+3$ כאשר:

(i) $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ (ii) $A=\{3,5,19,103\}$ (ii) $A=\{5,6,7\}$

2) נתונים שני היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$

$R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$ $R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_2 , R_1 קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

(במקרה של הפרכה הבא דוגמה מתאימה)

3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשום שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמק מדוע הם ביחס. כתוב שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמק מדוע אינם ביחס. כמו כן קבע האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א"ס חלש, א"ס חזק, וטרנזיטיבי.

א) יחס @ מעל □ המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.

ב) יחס ♣ מעל □ המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in ♣ \Leftrightarrow 3|x-y$.

ג) היחס $\subseteq$ מעל $P(□)$ המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in \subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.

ד) היחס שרגא מעל □ המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$

ה) יחס T מעל □ המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in T \Leftrightarrow x^2+y\ge 1$

4) מצא אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות מקיים כל אחד מהיחסים הבאים. מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, □ , □

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in □_{odd}\ \ x=my$

ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m\in □_{evevn}\ \ x=my$

ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in □_{odd}\ (x=my \vee y=mx)$

5) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.
בכל המקרים בהם בחרת להפריך תן דוגמה נגדית מינימלית. בדוק האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $R=\varnothing$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי אז R רפלקסיבי.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי אז R אנטי סימטרי חלש.

6) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A הוכח או הפרך את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית)

א. אם R,S רפלקסיבים אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם R,S רפלקסיבים אז $R\cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם R,S סימטרים אז $R\cap S$ סימטרי.

ד.אם R,S סימטרים אז $R\cup S$ סימטרי.

ה. אם R,S טרנזיטיבים אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם R,S טרנזיטיבים אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R,S יחסי שקילות אז $R\cap S$ יחס שקילות.

ח. אם R,S יחסי שקילות אז $R\cup S$ יחס שקילות.

ט. אם R,S אנטי סימטרים חלש אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם R,S אנטי סימטרים חלש אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

10) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצתכל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים.

ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי: $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$

א. הוכח כי R הינו יחס שקילות ב-A.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות הבאות. $[(1,1)]_R\ ,[(1,2)]_R\ ,[(2,1)]_R$

14) תהי S קבוצה שאבריה הן קבוצות מגדירים יחס בינארי E מעל S באופן הבא: $AEB \Leftrightarrow \left(A\subseteq B \wedge B\subseteq A\right)$

הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

1) $\begin{cases} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{cases}$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$
$R_1 \to 5R_1-8R_2$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

*9) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

F=□ , F=□

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה □ ופעם מעל השדה □ .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

1) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=14 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1 \\ x+y+kz&=1 \\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0 \\ 3x+y+kz&=2 \\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0 \\ x+2y-z&=0 \\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1 \\ (k-2)x+ky&=-2 \\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2 \\ kx-y+z&=4 \\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3 \\ (k+3)x+2y&=k^2+5 \\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2 \\ kx-2y+z&=-1 \\ x+8y-3z&=k \\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות

1)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b \\ 7x-10y+16z&=7 \\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1 \\ x+2y+4z&=-4 \\ x+2y-4z&=0 \\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1 \\ ax+y+z+t&=b \\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x+az&=1 \\ y+2z&=2 \\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל **השדה** $\mathbf{F}$.

1)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1 \\ 2x_1+4x_2+4x_3&=2 \\ 3x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbb{Z}_5}$$

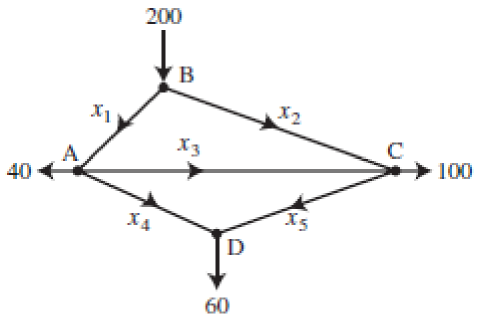
2)
$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbb{R}\ ,\ \mathbf{F}=\mathbb{C}}$$

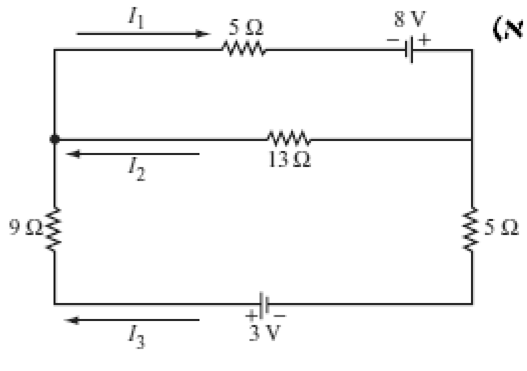
(12) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$$

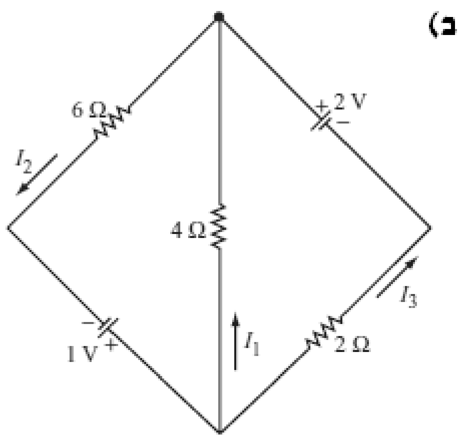
א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.
ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.
ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
ח. מצא לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4=0$.



(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):





*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

תשובות:

(1) 1) ו- 3) שקולות ו- 2) ו- 4) שקולות.

(2) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1) $R_1 \to 2R_1 + R_2$ 2) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ 2) $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

(5) ב.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9 $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

F=□ F=□

(6)

(1 $(x,y)=(1,2)$ (2 $(x,y)=(5-2t,t)$

(3 ϕ (4 ϕ

(5 $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$ (6 $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

(7 $(x,y)=(-1,1)$ (8 ϕ

(9 $(x,y)=(\frac{1+2t}{3},t)$ (10 $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

(11 ϕ (12 $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(7) (1 א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=1$ ג. $k=-2$ (2 א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=-2$ ג. $k=1$

(3 א. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ ב. $k=\frac{4}{7}$ ג. $k=-1$ (4 א. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ ב. $k=1,\ k=-0.4$

(5 א. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ ב. $k=\pm 1, k=-2$.

(6 א. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ ג. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$.

(8) (1 א. $k=-1$ ב. $k\neq \pm 1$ ג. $k=1$ (2 ב. $k=3$ ג. $k\neq 3$ (3 א. $k\neq 1$ ב. $k=1$

(9)

(1 א. $a\neq 2$ ב. $a=2,\ b\neq -3$ ג. $a=2, b=-3$.

(2 ב. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$ ג. $a=-6,\ b=2.5$.

3) ב. $a = 2,\ b \neq 2$ ג. $a = 2,\ b = 2$ או $a \neq 2$.

(10) א. $ab + 2c \neq d$ ב. $b = 0,\ c = 1.5, d = 3$

(11) 1) $(x_1, x_2, x_3) = (0,3,0)$ 2) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\square}{=} ((-1+i)t + 1 + i, 3t, t)$, $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\square}{=} (2,3,-1)$

(12) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq 2$, $k \neq -1$. 2. $k = -1$ 3. $k = 2$

ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$ ו. $k = -2$ ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

(13) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$.

ג. 40 .

(14) א. $I_1 = \frac{158}{317},\ I_2 = \frac{97}{317},\ I_3 = \frac{255}{317}$. ב. $I_1 = -\frac{5}{22},\ I_2 = \frac{7}{22},\ I_3 = \frac{6}{11}$

מטריצות

(1) נתונות מטריצות : $A_{4\times6}$, $B_{4\times6}$, $C_{6\times2}$, $D_{4\times2}$, $E_{6\times4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$

6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x,y,z , אם ידוע כי :

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן) :

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$

6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. A^2-B^2 סימטרית. 3. A^2+B סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה <u>הפיכה</u>: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה <u>איננה הפיכה</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

1) $\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x-2y+2z&=5 \\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ y+z+t&=1 \\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X:

1) $AXC=D$
2) $A^{-1}XC=A^{-1}DC$
3) $P^{-1}X^TP=A$
4) $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$
5) $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$
6) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

ב. נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

ג. נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

ד. נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ג. נתונים: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I-A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

(1) 1) 4×6 2) 3) 4×2 4) 5)

6) 6×6 7) 6×2 8) 9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

5) 230 6) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

9) 63 10) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(4)

1) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 1) $\begin{aligned} 4x-2y+4z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x-6y+3z&==3 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} -2y+4z&=1 \\ x-5y+z&=2 \\ x-6y-z&=3 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} (4+k)x-2y+4z&=1 \\ x+(k-1)y+z&=2 \\ x-6y+(3+k)z&=3 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x-6y+2z&=0 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ -2x-3y-6z&=6 \\ 4x+y+z&=9 \end{aligned}$

(6) א. 1,2,3 ב. 2 ג. 1,2,3

(7)

(1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (8 $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (9 $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) (1 $k \neq 1,\ k \neq -2$. (2 $k = 1,\ k = -4$

(9) (1 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. (2 $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. $CD^2 - A$.

5. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

ב. $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

1) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א.
הוכח כי

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

ב. הוכח כי
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

2) $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1, j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

3) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

4) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

7*) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

1) $|ABA^{-1}B^T|$ 2) $|4A^2B^3|$ 3) $|-A^{-2}B^TA^3|$ 4) $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{nxn})|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n.

ז. נתונים: $\det(A_{nxn})=2,\ \det(B_{nxn})=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$

(14) נתון :

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב : (1 $(adjA)_{1,5}$ (2 $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש-A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון : A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכה : (1 $C+D$ (2 $A+B$ (3 AD (4 CD (5 AB ?

(16) מצא את ערכי k עבור המטריצה הבאה לא הפיכה :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה :

.1 $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ .2 $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו : $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות : $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו : $(1,2),(3,4),(5,8)$.

הערה : בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות:

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29 . 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.

11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$.

ב.1. $D_n = 2^{n+1} - 1$. 2. $D_{20} = 2^{21} - 1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13} . 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A| = 18, |B| = -2/3$. ו. 7. ז. 4^n . **(11)** 1) $x = 1,\ y = 2$.

2) $x = 1,\ y = 1,\ z = 2$. 3) $x = y = z = t = 1$. **(12)** א. $k \neq 1,\ k \neq -4$. ב. $k = -2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k = 0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2.

מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $\left(f:R\to R\right)$ מעל השדה R.

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$.

ב. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$.

ג. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$.

ד. $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$.

ה. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$.

ו. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a+d,\ c=a+2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$ כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n\left[R\right]$:

א. W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A\,|\,A=A^T\}$.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .
כלומר, $W=\{A\,|\,AB=BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\,|\,|A|=0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A\,|\,A^2=A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,
$W=\{A\,|\,AB=0\}$.

ז. W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\,|\,tr(A)=0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)\mid p(4)=0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4. כלומר, $W=\{p(x)\mid \deg(p)\leq 4\}$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\leq n\leq 7$.

ו. $W=\{p(x)\mid p(0)=1\}$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

ב. W מורכב מכל הפונקציות החסומות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid \left|f(x)\right|\leq M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W=\left\{f(x)\mid f'(x)=0\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W=\left\{f(x)\mid f'(x)=1\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W=\left\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\right\}$.

(5) בדוק האם $W=\left\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\right\}$ הוא תת מרחב של C^3:

א. מעל השדה הממשי R.

ב. מעל שדה המרוכבים C.

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$u_1=(4,1,1,5)$, $u_2=(0,11,-5,3)$, $u_3=(2,-5,3,1)$, $u_4=(1,3,-1,2)$.

א. 1. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4 ?

2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלוייה ליניארית ?

ב. 1. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלוייה ליניארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלוייה ליניארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים.

ד. נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$.

3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה ליניארית.

ה. נתון $v=(a,b,c,d)$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה ליניארית ?

ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף ליניארי של u_1 , u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1 , u_2 , u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&11\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-5\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}.$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.
2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים :

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$

.

$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.
2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a,b,c הוקטורים הבאים תלויים לינארית :

$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$.

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלוייה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף של הוקטורים האחרים :

א. $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

ב. $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

ג. $\{u+v,v+w,w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C.   ב. מעל R.

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

1) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3 \}$

2) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

3) $\{ 1+2x+3x^3,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 .

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1) $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3) .

א) מצא בסיס וממד ל- W , U ו- V.

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U\cup V$. 2) מצא ממד ל- $U\cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U\cap V$.

(17) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(18) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(19) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(20) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(21) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \middle| \ A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(22) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid \ p(1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת המטריצה (rank) :

1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

1) $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$ 2) $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$ 3) $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{1+x^2,x+x^2,\ x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B. סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E. סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E. סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

אינדוקציות

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:
בדיקה עבור $n=1$: ....
נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) מתקיים: ....
נוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים: ....
הוכחה: ....
לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תרגילים

1. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב- 5 ללא שארית לכל n טבעי.
2. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב- 7 ללא שארית לכל n טבעי.
3. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב- 24 ללא שארית לכל n טבעי.
4. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב- 20 ללא שארית לכל n טבעי.
5. a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,...$
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב- 12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.
6. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב- 2 ללא שארית לכל n טבעי.
7. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.
8. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב- 4 ללא שארית לכל n טבעי.
9. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב- 32 ללא שארית לכל n טבעי.
10. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

11. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

14. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

15. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$$

16. נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

18. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right]$$

20. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot2!}{2}+\frac{2\cdot3!}{4}+\frac{3\cdot4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

25. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\ldots+2n=n(2n+1)$$

26. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

28. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(3n)=2n(2n+1)$$

29. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

33. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36. נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$

37. נתון אי השיוויון: $2^n>n^2$

מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי השיוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו

והוכח באינדוקציה כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38. נתון אי השיוויון: $4^n>5n^2+1$

מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי השיוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו

והוכח באינדוקציה כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39. נתון אי השיוויון: $n^3-n<5^{n-1}$

מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי השיוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו

והוכח באינדוקציה כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40. נתון אי השיוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$

מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי השיוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו

והוכח באינדוקציה כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41. נתון אי השיוויון: $n^n\ge n!$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

42. נתון אי השיוויון: $a^n+b^n<(a+b)^n$ $\quad(a,b>0)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

43. נתון השיוויון: $4+7+10+13+\ldots=\frac{n}{2}(3n+5)$

א) מצא את האיבר במקום ה-n.

ב) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג) חשב את הסכום: $37+40+43+\ldots+85$

44. נתון השיוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots=2-\frac{2n+2}{3^n}$ מצא את האיבר במקום ה-n.

45. נתון השיוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$

א) מצא את האיבר במקום ה-n.

ב) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג) חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$

46. נתון השיוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$

א) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב) חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+\ldots+48^2$

47. נתון השיוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

א) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב) הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$

48. נתונים השיוויונים הבאים:

א) $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$

ב) $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$

ג) $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$

קבע איזה מהשיוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49. נתון השיוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(3n)=an(2n+b)$

א) נתון כי השיוויון נכון עבור $n=1$ ו-$n=2$. מצא את ערכי a ו-b.

ב) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השיוויון מתקיים לכל n טבעי.

50. נתון אי השיוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$

א) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב) הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$

51. נתון אי השיוויון: $n^2<2^n$

א) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי השיוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב) הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot6^2\cdot7^2\cdot8^2\cdot\ldots\cdot20^2<2^{200}$

52. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב- 117 ללא שארית לכל n טבעי.

53. א) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב- 6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב) נתון כי $a+b$ מתחלק ב- 6 ללא שארית. הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב- 6 ללא שארית.

54. א) הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב) האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי זוגי?

ג) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.