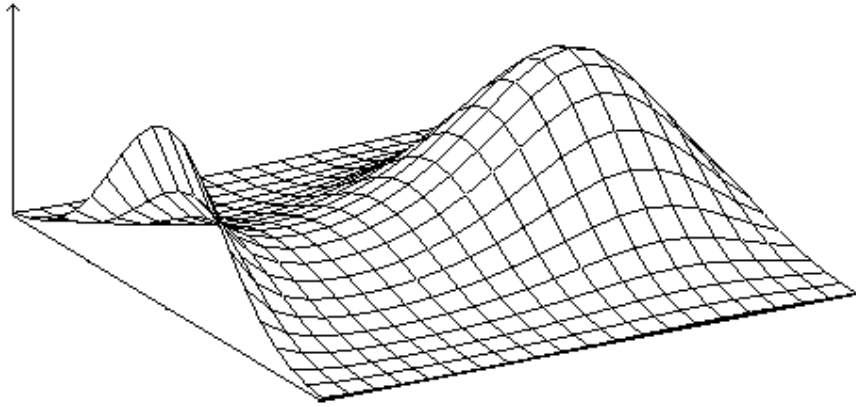


מתימטיקה

ב'



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתימטיקה ב והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן עניינים

פרק 1 - משוואות מעריכיות ולוגריתמיות	3
פרק 2 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - פונקציות מעריכיות	9
פרק 3 - משוואות לוגריתמיות	18
פרק 4 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - פונקציות לוגריתמיות	23
פרק 5 - חישוב הנגזרת של פונקציה	31
פרק 6 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים	32
פרק 7 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)	34
פרק 8 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')	36
פרק 9 - אלגברה ליניארית	38
נספח נוסחאות	42

פרק 1 - משוואות מעריכיות ולוגריתמיות

חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות

חוקי חזקות

1. $a^0 = 1$

2. $a^1 = a$

3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

7. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

8. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

חוקי השורשים

1. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$

3. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

4. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		חוקי החזקות
סרטון 2	1,2,3,4	
סרטון 3	5,6	
סרטון 4	7,8	
סרטון 5		חוקי שורשים
סרטון 6	9	
סרטון 7	10	הכנסה לתוך שורש
סרטון 8	11	הוצאה משורש
סרטון 9	12,13	מהי משוואה מעריכית, כיצד פותרים משוואה מעריכית שבה יש שוויון בסיסים
סרטון 10	14	
סרטון 11	15	
סרטון 12	16	
סרטון 13	17,18	משוואות מעריכיות בהן הבסיסים שונים והמעריכים שווים
סרטון 14	19	הכרות עם לאונרד אוילר והבסיס e
סרטון 15	20,21	משוואות מעריכיות עם חיבור וחיסור ("שיטת נסמן")
סרטון 16	22,23	
סרטון 17	24	
סרטון 18	25	
סרטון 19	26,27	
סרטון 20	28,29	
סרטון 21	30,31	
סרטון 22	32	

תרגילים:

1. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} =$

2. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} =$

3. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} =$

4. $2^3 + 2^5 =$

5. $\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} =$

6. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} =$

7. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} =$

8. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} =$

9. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} =$

10. הכנס לשורש:

$$א. 3\sqrt{2} = \quad ב. 5\sqrt{3} = \quad ג. \frac{\sqrt{36}}{2} = \quad ד. 2\sqrt[3]{3} = \quad ה. x\sqrt{x} =$$

11. הוצא מהשורש כמה שיותר:

$$א. \sqrt{12} = \quad ב. \sqrt{48} = \quad ג. \sqrt{63} = \quad ד. \sqrt[3]{54} = \quad ה. \sqrt{x^5} =$$

$$12. 3^{5x-3} = 3^{3x+7}$$

$$13. 2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

$$14. (25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$$

$$15. \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$$

$$16. \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$$

$$17. 3^x = 5^x$$

$$18. 5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2}$$

$$19. e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

$$20. 2^x + 2^x = 16$$

$$21. e^x + 2e^x = 3e^4$$

$$22. 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

$$23. 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$24. 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$25. e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$$

$$26. 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$27. 5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$28. 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$29. \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$30. \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

$$31. e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$32. e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

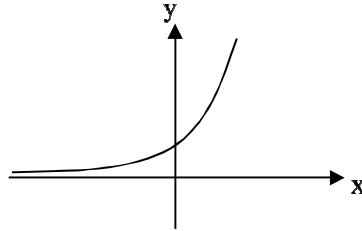
פתרונות:

- .1 .2 .2 .1 .1 .2 .3 .3 .5 .4 .40 .5 . $\frac{2b^3}{a}$.6 .k .7 . $\frac{1}{5}$.8 . $\frac{1}{x} + x$.9 . $\frac{1}{2}$
- .10 .א . $\sqrt{18}$.ב . $\sqrt{75}$.ג . $\sqrt{9}$.ד . $\sqrt[3]{24}$.ה . $\sqrt{x^3}$.11 .א . $2\sqrt{3}$.ב . $4\sqrt{3}$
- .1 . $3\sqrt{7}$.ד . $3\sqrt[3]{2}$.ה . $x^2\sqrt{x}$.12 .x=5 .13 .x=1 .14 .x=1 .15 .x=-2
- .16 .16 . $x = -\frac{1}{2}$.17 .x=0 .18 .x=3 .19 . $x = 1, \frac{1}{6}$.20 .x=3 .21 .x=4
- .22 .x=4 .23 .x=1 .24 .x=-2 .25 .x=-1 .26 .x=1,2 .27 .x=±1
- .28 .x=0 .29 .x=0,1 .30 . $x = 1, -\frac{1}{2}$.31 .x=0 .32 .x=1±

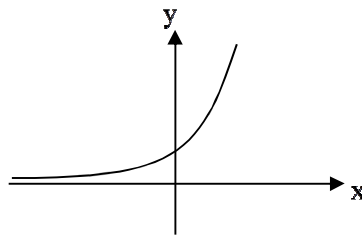
פרק 2 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - פונקציות מעריכיות

הפונקציה המעריכית

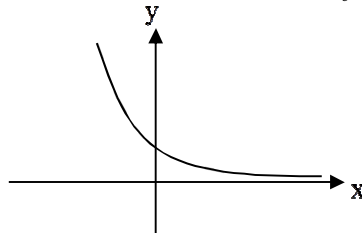
הפונקציה $f(x) = e^x$:



הפונקציה $f(x) = a^x$:



הפונקציה $f(x) = e^{-x}$:



נגזרת הפונקציה המעריכית

$$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$$

אינטגרלים

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה המעריכית, חוקי הגזירה של פונקציה מעריכית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6		שיפוע של פונקציה מעריכית
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17		אסימפטוטות של פונקציות מעריכיות
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 21	
סרטון 25	תרגיל 22	
סרטון 26	תרגיל 23	
סרטון 27	תרגיל 24	
סרטון 28	תרגיל 25	
סרטון 29	תרגיל 26	
סרטון 30	תרגיל 27	
סרטון 31	תרגיל 27	
סרטון 32	תרגיל 28	
סרטון 33	תרגיל 29	
סרטון 34	תרגיל 30	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36		אינטרגלים של פונקציות מעריכיות
סרטון 37	תרגיל 31	
סרטון 38	תרגיל 32	
סרטון 39	תרגיל 33	
סרטון 40	תרגיל 34	
סרטון 41	תרגיל 35	
סרטון 42	תרגיל 36	
סרטון 43	תרגיל 37	
סרטון 44	תרגיל 38	
סרטון 45	תרגיל 39	

תרגילים:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 \quad \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \quad \text{ג. } f(x) = e^{\sin x} \quad \text{ד. } f(x) = 2^{3x}$$

$$\text{ה. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

5. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.6. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.7. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך שלהפונקציה עם הישר $y = e$.8. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$. מצא אתערכי הפרמטרים a ו- b .

9. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \quad \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

10. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$

11. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

12. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{e^{\sqrt{x-2}}}$

13. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

15. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$

16. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

17. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$

18. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

19. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

20. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

21. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

22. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

23. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x}-e}$

24. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

25. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+a}{be^x}$

לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1, \frac{2}{e}\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת

הפיתול השנייה של הפונקציה.

27. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים

הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. סמן על גבי השרטוט את ערכי ה- x של נקודות הפיתול.

29. נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. עבור אילו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון

אחד?

30. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

31. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx = \quad \text{ב. } \int (3^x + 5^{2x}) dx = \quad \text{ג. } \int 6\sqrt{e^{4x-1}} dx =$$

$$\text{ד. } \int (e^x + e^{-x})^2 dx =$$

32. חשב את האינטגרלים הבאים:

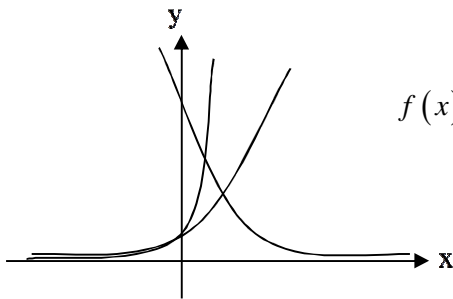
$$\text{א. } \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx = \quad \text{ב. } \int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx =$$

33. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} \right) dx = \quad \text{ב. } \int \left(\frac{3 - e^x}{(e^x - 3x)^2} \right) dx = \quad \text{ג. } \int (xe^{x^2}) dx =$$

$$\text{34. נתונה נגזרת של פונקציה: } f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.



$$\text{35. נתונות הפונקציות: } f(x) = e^x, g(x) = e^{3x}, h(x) = 16e^{-x}$$

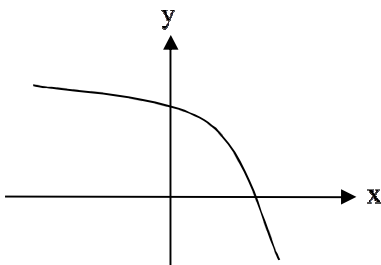
חשב את גודל השטח הכלוא בין שלוש הפונקציות.

$$\text{36. נתונה הפונקציה: } f(x) = 5 - e^x$$

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$. חשב את גודל

השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

ניתן להשאיר $e - 1$ בתשובה.



37. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$ ($0 < b$).

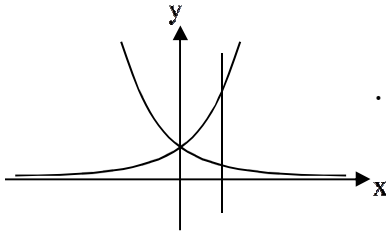
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y

הוא $\frac{e-2}{4}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

38. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = \ln 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



39. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים.

המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר

ה- x כך שנוצר מלבן. הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות של הפרק באופן מרוכז)

1. א. $3e^x + 2e^{2x} - e^2 + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $\cos xe^{\sin x}$ ד. $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

ה. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$ ג. $(1+x)e^x$ א. $2xe^{4x}(1+2x)$

ג. $2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$ א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ ג. $\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

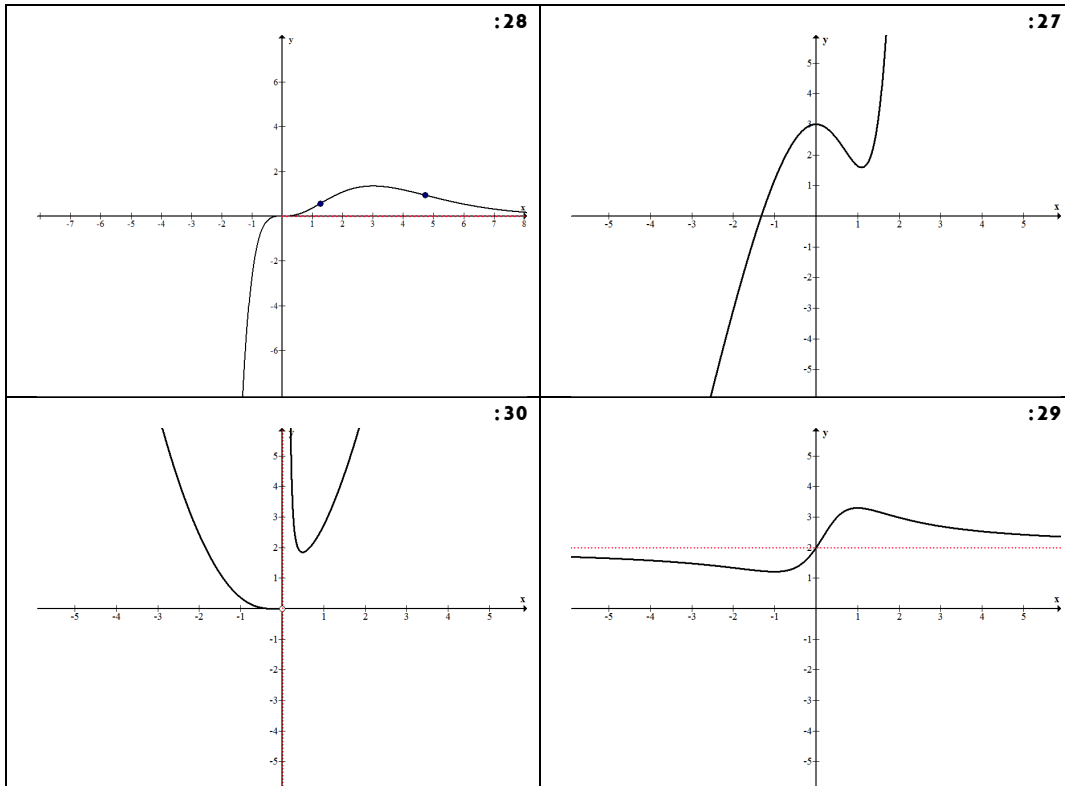
4. א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{e^{3x}(5e^x+6)}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$ ד. $y = e^x$ ה. $y = 3x+1$

7. א. $y = (e-1)x + e$, ב. $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ג. $b = -1, a = 2$ ד. כל x ה. $x \neq 0$

ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq 0, x \neq \ln 2$ ה. כל x ו. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$ ז. $\ln 3 \leq x$ ח. $x \leq 0$

10. $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, $\min(0,0)$.11 $\min(3, e^3)$.12 $\max\left(3, \frac{1}{e}\right)$, $\min(2,0)$ קצה
13. $a=4$, $b=-12$, $\max\left(3\frac{1}{2}, 0.483\right)$, $\min\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$.14 $p=-27$, $q=35$
15. אופקית: $y=0$.16 אופקית: $y=0$.17 אופקית: $y=1$, $y=-5$, אונכית: $x=0$
18. אופקית: $y=-\frac{1}{5}$, אונכית: $x=\ln 5$.19 אופקית: $y=1$, $y=-1$.20 אופקית: $y=0$
21. $y=-\frac{1}{3}$, אונכית: $x=\ln 3$, נקודת אי הגדרה: $(\ln 2, -1)$.22 אופקית: $y=0$.23 אופקית: $y=0$, אונכית: $x=\frac{1}{3}$.24 אופקית: $y=0$.25 אונכית: $x=0$
- נקודת אי הגדרה: $(0,0)$.26 $a=1$, $b=1$.27 א. כל x
- ב. $\max(0,3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$ ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$ ד. $(0,3)$ ה. אין. ו. $(\ln 2, 2.16)$ ז. קעירות כלפי מעלה: $x > \ln 2$, קעירות כלפי מטה: $x < \ln 2$.28 א. כל x ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$ ג. תחומי עלייה: $x < 3$
- תחומי ירידה: $x > 3$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.29 א. כל x ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$ $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$
- ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x > 1$ או $x < -1$ ד. $(0,2)$ ה. אופקית: $y=2$
- ו. $m=2$, $m=2\sqrt{e}$, $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$.30 א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$ ג. תחומי עלייה: $x > \frac{1}{2}$
- תחומי ירידה: $0 \neq x < \frac{1}{2}$ ד. אין. ה. אונכית: $x=0$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$ ג. אין.
- ז. קעורה כלפי מעלה לכל $x \neq 0$.31 א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$.32 א. $e^x + x + c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
33. א. $2\sqrt{e^x+3} + c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$.34 $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
35. $S = \text{ש"ח} \cdot 3\frac{1}{3}$.36 $S = \text{ש"ח} \cdot 0.192$.37 $b = 2$.38 $V = 1\text{ח"י} \cdot \frac{1}{8}\pi$

גרפים:



פרק 3 - משוואות לוגריתמיות

הגדרת הלוג: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ ת.ה.ה: $a, b > 0, a \neq 1$

חוקי הלוגריתמים

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a b^n = n \log_a b$
6. $a^{\log_a x} = x$
7. $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

חוכן הסרטון	מספר תרגיל בדף התרגילים	מס' סידורי
הגדרת הלוג, תחום הגדרה של לוג - חלק א'		סרטון 1
הגדרת הלוג, תחום הגדרה של לוג - חלק ב'		סרטון 2
	תרגיל 1	סרטון 3
הכרות עם ln		סרטון 4
	תרגיל 2	סרטון 5
	תרגיל 3	סרטון 6
חוקי הלוגריתמים (חוקים 1-5 לפי המספור בסיכום)		סרטון 7
	תרגיל 4	סרטון 8
	תרגיל 5	סרטון 9
	תרגיל 6	סרטון 10
חוק לוגריתמים מספר 6	תרגיל 7	סרטון 11
חוק לוגריתמים מספר 7 (שינוי בסיס)		סרטון 12
	תרגיל 8	סרטון 13
מהן משוואות לוגריתמיות		סרטון 14
	תרגילים 9,10	סרטון 15
	תרגילים 11,12,13	סרטון 16
	תרגילים 14,15	סרטון 17
	תרגילים 16,17	סרטון 18
	תרגיל 18	סרטון 19

	19,20 תרגילים	סרמון 20
	21 תרגיל	סרמון 21
	22,23 תרגיל	סרמון 22
	24 תרגיל	סרמון 23
	25 תרגיל	סרמון 24
	26 תרגיל	סרמון 25
	27 תרגיל	סרמון 26

תרגילים:

1. חשב ללא מחשבון:

$$א. \log_2 32 = \quad ב. \log 1000 = \quad ג. \log_{25} 5 = \quad ד. \log_8 4 =$$

$$ה. \log_4 \frac{1}{16} = \quad ו. \log_a a^4 = \quad ז. \log_a \frac{1}{a\sqrt{a}} =$$

2. חשב ללא מחשבון:

$$א. \ln e^2 = \quad ב. \ln \frac{1}{e^4} = \quad ג. \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} =$$

3. מצא את ערכו של x :

$$א. \log_{36} 6 = x \quad ב. \log_2 x = 16 \quad ג. \log_{\frac{1}{9}} x = -1.5 \quad ד. \log_x 64 = 3$$

$$ה. \log_x 25 = 2 \quad ו. \log_x (3x+4) = 2 \quad ז. \ln x = 2 \quad ח. \ln x = -\frac{1}{2}$$

4. חשב ללא מחשבון:

$$א. \log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2 = \quad ב. 2 \log 2 + \log 25 = \quad ג. \frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3 \log_3 6 - (2 + \log_3 12)} =$$

5. נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a :

$$א. \log_3 16 = \quad ב. \log_3 6 = \quad ג. \log_3 24 = \quad ד. \log_3 1.5 =$$

6. נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b :

$$א. \log_2 45 = \quad ב. \log_2 60 = \quad ג. \log_2 \sqrt{7.5} =$$

7. חשב ללא מחשבון:

$$א. 6^{\log_6 8} = \quad ב. 4^{\log_2 5} = \quad ג. e^{\ln 3} = \quad ד. e^{2 \ln 3} =$$

8. נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$: a ו- b :

א. $\log_3 50 =$ ב. $\log_2 \sqrt{30} =$ ג. $\log_5 22.5 =$

9. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$

10. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

11. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$

12. $\log_5 (25^x - 20) = x$

13. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

14. $\log_5 (4x - 3) = \log_5 7$

15. $2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$

16. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

17. $3 \ln^2 x + \ln x = 2$

18. $\log_4 x + \log_x 4 = 2 \frac{1}{2}$

19. $\log x \cdot \log (10x) = 2$

20. $\ln (e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln (ex^2)$

21. $x^{\log_3 x} = 81$

22. $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$

23. $x^{\ln x} = e^6 x$

24. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 2^x = 5 \quad \text{ב. } 5^x = 8 \quad \text{ג. } e^x = 2 \quad \text{ד. } e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ה. } e^x = -1$$

$$25. x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$$

$$26. \frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$$

$$27. \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

פתרונות:

$$1. \text{א. } 5 \quad \text{ב. } 3 \quad \text{ג. } \frac{1}{2} \quad \text{ד. } \frac{2}{3} \quad \text{ה. } -2 \quad \text{ו. } 4 \quad \text{ז. } -1.5 \quad \text{ח. } 2 \quad \text{ט. } 2 \quad \text{י. } -1.5 \quad \text{יא. } -4 \quad \text{יב. } -1.5$$

$$3. \text{א. } \frac{1}{2} \quad \text{ב. } x = 65,536 \quad \text{ג. } x = 27 \quad \text{ד. } x = 4 \quad \text{ה. } x = 5 \quad \text{ו. } x = 4 \quad \text{ז. } x = e^2$$

$$\text{ח. } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{ט. } 2 \quad \text{י. } 2 \quad \text{יא. } 2 \quad \text{יב. } a+1 \quad \text{יג. } 3a+1 \quad \text{יד. } 1-a$$

$$6. \text{א. } 2a+b \quad \text{ב. } 2+a+b \quad \text{ג. } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \quad \text{ד. } 7 \quad \text{ה. } 8 \quad \text{ו. } 25 \quad \text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 9$$

$$8. \text{א. } 2b + \frac{1}{a} \quad \text{ב. } \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{ab}{2} \quad \text{ג. } \frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab} \quad \text{ד. } 3 \quad \text{ה. } 3 \quad \text{ו. } x = 3 \quad \text{ז. } x = 3 \quad \text{ח. } x = \pm 3$$

$$12. x = 1 \quad 13. x = 0 \quad 14. x = 2.5 \quad 15. x = 6 \quad 16. x = 4, \frac{1}{2} \quad 17. x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$$

$$18. x = 16, 2 \quad 19. x = \frac{1}{100}, 10 \quad 20. x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e} \quad 21. x = 9, \frac{1}{9} \quad 22. x = \frac{1}{25}, 5$$

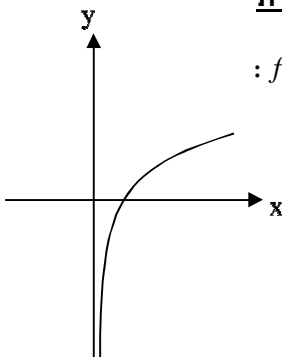
$$23. x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad 24. x = 2.322 \quad \text{א. } 2.322 \quad \text{ב. } x = 1.292 \quad \text{ג. } x = 0.693 \quad \text{ד. } x = -0.693$$

$$\text{ה. } \Phi \quad 25. x = 16, \frac{1}{4} \quad 26. x = 3 \quad 27. x = \sqrt{e}, e$$

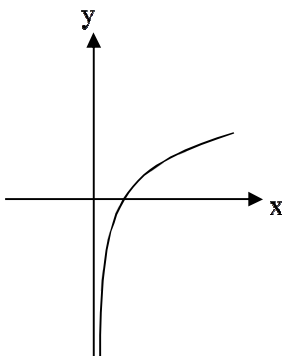
פרק 4 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - פונקציות לוגריתמיות

הפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה $f(x) = \ln x$:



הפונקציה $f(x) = \log_a x$:



נגזרת הפונקציה הלוגריתמית

$$y = \ln x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$

אינטגרלים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה הלוגריתמית, חוקי הגזירה של פונקציה לוגריתמית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5		שיפוע הפונקציה הלוגריתמית והמשיק לה
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13		אסימפטוטות לפונקציה לוגריתמית
סרטון 14	תרגיל 11	
סרטון 15	תרגיל 12	
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 20	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 25	תרגיל 21	
סרטון 26		אינטגרלים לוגריתמיים
סרטון 27	תרגיל 22	
סרטון 28	תרגיל 23	
סרטון 29	תרגיל 24	
סרטון 30	תרגיל 25	
סרטון 31	תרגיל 26	
סרטון 32	תרגיל 27	
סרטון 33	תרגיל 28	
סרטון 34	תרגיל 29	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36	תרגיל 31	

תרגילים:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1) & \text{ב. } f(x) = \ln(x^2 - 3x) \\ \text{ג. } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & \text{ד. } f(x) = \ln(e^x + 1) \\ \text{ה. } f(x) = \ln(\cos x) & \text{ו. } f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1) \end{array}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = x \ln x & \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \\ \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x} & \end{array}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \ln^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 3 \ln^2 x \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$$

4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.5. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \ln x & \text{ב. } f(x) = \ln(x^2) & \text{ג. } f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20) \\ \text{ד. } f(x) = \ln(e^x - 4) & \text{ה. } f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1} & \text{ו. } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3} \\ \text{ז. } f(x) = \sqrt{\ln x - 1} & & \end{array}$$

7. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$

8. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$

9. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון

של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

11. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$

12. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

13. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$

14. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$

15. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

16. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$

17. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$

18. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרמוט. ט. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות?

21. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרמוט.

22. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx = \text{ב. } \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x} dx = \quad \text{ג. } \int \frac{x+3}{x^2-9} dx =$$

23. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} dx = \text{ב. } \int \frac{x^3 - x^2 + 5x - 6}{x-2} dx = \quad \text{ג. } \int \frac{x^4 + 3}{x+1} dx =$$

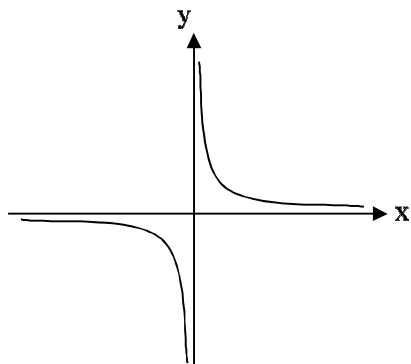
24. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{2x}{x^2-3} dx = \text{ב. } \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx = \quad \text{ג. } \int \frac{e^x}{e^x+5} dx = \text{ד. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx =$$

$$\text{ה. } \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

25. נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.



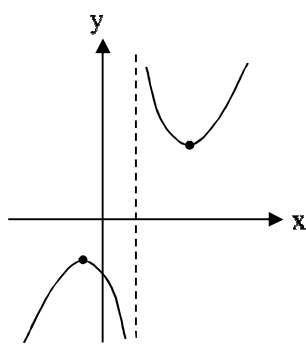
26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$

ו- $x = -4$ וציר ה- x .

ניתן להשאיר \ln בתשובה.



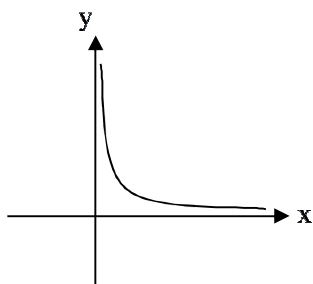
27. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$

ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

ניתן להשאיר \ln בתשובה.



28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = 1$

ו- $x = 3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר

ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ניתן להשאיר \ln בתשובה.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב

ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

30. מצא על הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2 \ln x} + 1$: את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה (2.5,1).

31. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = a$ ו- $x = a + 3$ ($0 < a$) וציר

ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות של הפרק באופן מרוכז)

א. $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x) = -\tan x$ ו. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$

2. א. $f'(x) = \ln x + 1$ ב. $f'(x) = (3x+1)(6 \ln x + \frac{3x+1}{x})$ ג. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$ ה. $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$ ו. $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$

ב. $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$ ג. $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$ ד. $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ ה. $y = \frac{1}{e} x$

5. א. $a = 2, b = -2$ ב. $x > 0$ ג. $x \neq 0$ ד. $10 < x$ או $x < -2$ ה. $x > \ln 4$

ה. $0 < x \neq e$ ו. $0 < x$ וגם $\frac{1}{e}$ ז. $x \neq e^3$ ח. $e < x$ ט. $\min(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e})$

8. $\min(\sqrt{e}, 0)$ קצה, $\max(e, \frac{1}{e})$ 9. $\min(4, -1)$ 10. $a = 1, b = -1$ 11. $x = 3$

12. נקודת אי הגדרה (0,0), $x = e, y = 0$ 13. נקודת אי הגדרה (0,2), $x = \frac{1}{e}, y = 2$

14. נקודת אי הגדרה $(e^2, \frac{1}{4}), (e^2, \frac{1}{4}), y = 0, x = \frac{1}{e^2}$ 15. $y = 0, x = 0$ 16. נקודת אי

הגדרה (0,0) 17. נקודת אי הגדרה (0,2) 18. $(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$

19. א. $0 < x$. ב. $\max(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}), \min(1, 0)$. ג. עליה: $1 < x$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$.

ירידה: $1 < x < \frac{1}{e^2}$. ד. $(1, 0)$. ה. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$. ו. $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{1}{e} < x$, קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{1}{e}$. 20. א. $0 < x \neq e$.

ב. $\min(e^2, e^2)$. ג. עליה: $e^2 < x$, ירידה: $0 < x < e^2$ וגם $x \neq e$. ד. אין.

ה. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $x = e$. ו. $(e^3, 0)$. ז. \cup : $e < x < e^3$, \cap : $e^3 < x$ או

$0 < x < e$. ט. $k > e^2$. 21. א. $0 < x$. ב. $\min(4, -1)$. ג. עליה: $4 < x$, ירידה: $0 < x < 4$.

ד. $(1, 0)$, $(16, 0)$. ה. $x = 0$. 22. א. $3 \ln|x| + 2 \ln|x+1| - \frac{4 \ln|3x-1|}{3} + c$.

ב. $\frac{x^2}{2} + 3x - 4 \ln|x| + c$. ג. $\ln|x-3| + c$. 23. א. $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x+1| + c$.

ב. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + 8 \ln|x-2| + c$. ג. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4 \ln|x+1| + c$.

24. א. $\ln|x^2 - 3| + c$. ב. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x| + c$. ג. $\ln|e^x + 5| + c$. ד. $\ln|e^x + e^{-x}| + c$.

ה. $\ln|\sin x| + c$. 25. $f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2$. 26. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 4$.

27. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \ln 2 - 2$. 28. $V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \ln 3$. 29. $V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \ln 2$. 30. $(2, \sqrt{2 \ln 2} + 1)$. 31.

$V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi (19 \frac{1}{2} + 4 \ln 4)$

פרק 5 - חישוב הנגזרת של פונקציה

(1) הסבר מהי פונקציה סתומה וכיצד גוזרים אותה.

(2) גזור את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - y = 1$ ומצא את y' .

(3) גזור את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ ומצא את y' .

(4) גזור את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ ומצא את y' .

(5) גזור את הפונקציה הסתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ ומצא את $y''(1)$.

(6) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה (3,4).

פרק 6 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$. באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$\text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$.

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט. הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

פרק 7 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופייים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$ וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום .
- (6) $(4, 4)$ מקסימום .
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום .
- (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$.
- (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 8 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ לדני תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצור פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצור נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצור (אל תפתור).

פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & \text{Max}(6, 2) \quad (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & (6, 2) \quad (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & 7 / \sqrt{45} \quad (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & \text{Max}(6, 2) \quad (11) \\ & & & \min\{2K + L\} \quad ; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13) \end{array}$$

פרק 9 - אלגברה ליניארית

מושגים בסיסיים ודירוג מטריצות

(1) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{cccc}
 x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) & x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\
 2x + y = 4 & & x - z = 0 & & x - y = -1 & & 2x - 2 = 0 & \\
 z + t = 8 & & & & x + y + z = 5 & & x + y = 3 &
 \end{array}$$

(2) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}^{(1)} \\
 R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\
 R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3
 \end{array}$$

(3) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

(4) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{l} 8x - 4y = 10 \quad (3) \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 8y = 20 \quad (2) \\ 3x + 6y = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \quad (1) \\ 5x - 4y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \quad (6) \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -11 \quad (5) \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \quad (4) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \quad (9) \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 7y = 0 \quad (8) \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y = 2 \quad (7) \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \quad (12) \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \quad (11) \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 2t = 2 \quad (10) \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{array}$$

(5) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:
א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x + 2ky + z = 0 \quad (3) \\ 3x + y + kz = 2 \\ x + 9ky + 5z = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + ky + z = 1 \quad (2) \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - y + z = 1 \quad (1) \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + ky + 3z = 2 \quad (6) \\ kx - y + z = 4 \\ 3x + y + (2 + k)z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx - y = 1 \quad (5) \\ (k - 2)x + ky = -2 \\ (k^2 - 1)z = 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \quad (4) \\ x + 2y - z = 0 \\ 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 \end{array}$$

(6) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:
א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - z = 2 \quad (3) \\ kx - 2y + z = -1 \\ x + 8y - 3z = k \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \quad (2) \\ 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + ky = 3 \quad (1) \\ (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \\ 6x + 3ky = 7k^2 + 2 \end{array}$$

מטריצות, מטריצה הפוכה, פתרון מערכת משוואות בעזרת המטריצה ההפוכה

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , x ו- b המבטאות את מערכת המשוואות

$$. Ax = b \text{ היחידה}$$

$$2x - 3y + z + t = 1 \quad (2) \quad 2x + y - z = 3 \quad (1)$$

$$4x + y + 2z = 4 \quad x + 2y - 4z = 5$$

$$y + z + t = 1 \quad 6x + 4y + z = 2$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

(8) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A^T x = 2x + 3b \quad (5) \quad Ax = x \quad (4) \quad Ax = -kx + b \quad (3) \quad Ax = 4x + b \quad (2) \quad Ax = b \quad (1)$$

(9) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(10) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$x + 4y + 2z + 4t = 1 \quad (2) \quad 2x - y + z = 3 \quad (1)$$

$$x + 2y - z = 0 \quad 3x - 2y + 2z = 5$$

$$y + z + t = 1 \quad 5x - 3y + 4z = 11$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

דטרמיננטות, כלל קרמר

(11) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(12) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר :

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 4z = 51 & & & & & \end{array}$$

נספח נוסחאות

הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ \Downarrow $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ \Downarrow $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ \Downarrow $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ \Downarrow $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ \Downarrow $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ \Downarrow $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' (1,2) לנק' (3,4) $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

נוסחאות - גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב (וקטורים)

במישור

מרחק בין 2 נקודות במישור (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שיפוע ישר העובר דרך 2 נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m : $y - y_1 = m(x - x_1)$

ישר דרך (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מאונך לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מקביל לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 = m_2$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

הזווית החדה α בין הישר $y = m_1x + n_1$ לישר $y = m_2x + n_2$: $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

משוואת אליפסה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a ו- b חוצי הצירים של האליפסה.

משוואת היפרבולה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a הוא חצי הציר הממשי.

משוואת פרבולה קנונית : $y^2 = 2px$

במרחב (וקטורים)

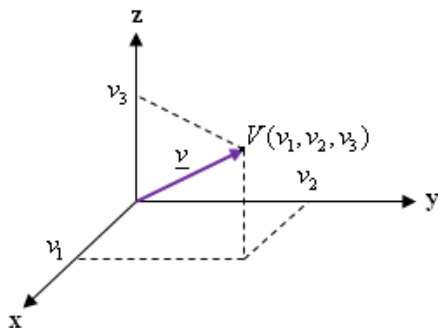
מרחק בין 2 נקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

הצגה האלגברית של וקטור

על כל נקודה $V(v_1, v_2, v_3)$ במרחב התלת-ממדי ניתן להסתכל כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים $O(0, 0, 0)$ וסופו בנקודה V . חץ זה נקרא וקטור

ומסומן $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

* מקובל לרשום \vec{v} או \mathbf{v} במקום \underline{v} .



ההצגה האלגברית של וקטור בעזרת וקטורי הצירים

וקטורי הצירים הם הוקטורים: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

המסומנים גם כך $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$

או כך $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$, $\hat{z} = (0, 0, 1)$

או כך $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

ההצגה של וקטור $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ בעזרת וקטורי הצירים היא $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

פעולות בין וקטורים:

נתונים שני וקטורים: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

כפל וקטור בסקלר: $k \cdot \vec{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

חיבור וקטורים: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$)

מכפלה וקטורית של וקטורים: $\vec{a} \times \vec{b} = ((a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1))$

גודל וקטור \vec{a} (אורך הוקטור): $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

הנירמול של וקטור \vec{a} : $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

כיוון וקטור במרחב

יהיו α, β, γ שלוש הזוויות שיוצר הוקטור $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ עם הצירים x, y, z . בהתאמה.

$$1. a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha, a_2 = |\vec{a}| \cos \beta, a_3 = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$2. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

3. הוקטור $\hat{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ הוא וקטור יחידה בכיוון \vec{a} .

משוואת ישר פרמטרי במישור דרך $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

משוואת ישר פרמטרי במרחב דרך $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

זווית בין שני ישרים

נתונים שני ישרים : $L_1 : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ ו- $L_2 : \underline{x} = \underline{b} + s\underline{v}$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישרים מקיימת}$$

משוואת מישור : $ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\vec{v} = (a, b, c)$ וקטור נורמל (מאונך) למישור.

משוואת מישור דרך 3 נקודות: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

מרחק נקודה ממישור

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} : \text{מרחק הנקודה } (x_0, y_0, z_0) \text{ מהמישור } ax + by + cz + d = 0$$

זווית בין ישר ומישור

נתונים : ישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t\underline{u}$ ומישור $ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישר למישור מקיימת} : \underline{v} = (a, b, c) \text{ כאשר}$$

הערה :

הישר $\underline{x} = t(a, b, c)$ מאונך למישור $ax + by + cz + d = 0$.

לפיכך, אם הישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t \cdot \underline{u}$ מקביל למישור אז $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

זווית בין שני מישורים

נתונים שני מישורים : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$,

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} : \text{הזווית } \alpha \text{ שבין המישורים מקיימת}$$