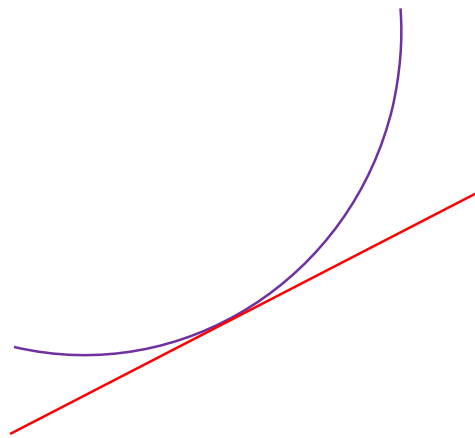


מתמטיקה א'



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת המתמטיקה ברמה אקדמית באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה א' והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GooL.co.il

גול, בשביל התרגול...

תוכן

3	פרק 1 – גבול של פונקציה.....
7	פרק 2 - רציפות של פונקציה, משפט ערך הביניים.....
10	פרק 3 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת.....
13	פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה.....
16	פרק 5 – בעיות משיקים.....
18	פרק 6 - כלל לופיטל.....
21	פרק 7 - חקירת פונקציה.....
27	פרק 8 – בעיות מינימום ומקסימום כלכליות.....
30	פרק 9 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת.....
	נספח - דפי נוסחאות.....

תרגילים – פרק 1**גבול של פונקציה**

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ')

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות (ראה פרק 8). בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות – פרק 1

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
						$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1
									(3)
		$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	(6)
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	(7)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	(8)
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	(9)
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	(10)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	(11)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	(12)
								0 (10	(13)
									(14)
									(15)
									(16)
									(17)
									(18)
									(19)
									(20)
									(21)
									(22)
									(23)
									(24)
									(25)
									(26)
									(27)
									(28)
									(29)
									(30)
									(31)
									(32)
									(33)
									(34)
									(35)
									(36)
									(37)
									(38)
									(39)
									(40)
									(41)
									(42)
									(43)
									(44)
									(45)
									(46)
									(47)
									(48)
									(49)
									(50)

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים :

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

תרגילים – פרק 2

רציפות ומשפט ערך הביניים**רציפות**

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן: (בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.
למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

(5) הוכח או הפרך:

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

פתרונות – פרק 2

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$.

(2) (1) $k = 1$ (2) $k = 4$ (3) $k = \frac{2}{3}$ (4) $k = -1$.

(3) (1) $a = 0, b = \frac{1}{2}$ (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$ (4) $a = e/3, b = -e/3$

(4) (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג ראשון. (6) סליקה.

תרגילים – פרק 3

גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

- (1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
- ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x - 1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. האם הפונקציה רציפה ?

ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.(4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר.

עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases} \quad \text{ב) } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax+b & x > e \end{cases} \quad \text{א)}$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

פתרונות – פרק 3

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a=1$ לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a=3/e, b=-2$ (ב) $a=e, b=0$.

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

תרגילים – פרק 4
גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות – פרק 4

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \qquad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \qquad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \qquad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \qquad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \qquad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \qquad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

(18)

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}}$$

(19)

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x-2}}, \quad f''(x) = \frac{2x+3}{2(-x^2-3x-2)^{3/2}}$$

(27)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right)$$

(26)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$$

(28)

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

תרגילים – פרק 5

בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.

(8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

(א) $y = x^2 - 2x + 1$ בנקודה $(2, -3)$ (ב) $y = \sqrt{x}$ בנקודה $(-3, 1)$

פתרונות – פרק 5

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

תרגילים – פרק 6
כלל לופיטל

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל

לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות – פרק 6**(1)**

$$\frac{5}{6} (7) \quad \frac{3}{2} (6) \quad \frac{1}{6} (5) \quad 4 (4) \quad n-1 (3) \quad \frac{20}{17} (2) \quad \frac{5}{6} (1)$$

$$2 (14) \quad -\frac{1}{2} (13) \quad \frac{1}{6} (12) \quad \frac{1}{2} (11) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) (10) \quad 1 (9) \quad -\frac{3}{2} (8)$$

$$\frac{1}{2} (21) \quad \frac{1}{2} (20) \quad \frac{1}{6} (19) \quad \frac{a}{b} (18) \quad \frac{a}{b} (17) \quad 1 (16) \quad 1 (15)$$

$$1 (28) \quad 1 (27) \quad -\frac{3}{4} (26) \quad -\frac{1}{2} (25) \quad -\frac{1}{3} (24) \quad \frac{1}{3} (23) \quad \frac{1}{8} (22)$$

$$0 (35) \quad \infty (34) \quad 0 (33) \quad \infty (32) \quad \frac{1}{2} (31) \quad \frac{1}{2} (30) \quad \frac{2}{3} (29)$$

$$0 (42) \quad 0 (41) \quad 0 (40) \quad 0 (39) \quad 0 (38) \quad 0 (37) \quad 1 (36)$$

$$\frac{1}{2} (49) \quad \ln \frac{3}{5} (48) \quad 0.5 (47) \quad 0 (46) \quad 2.5 (45) \quad 6 (44) \quad 0 (43)$$

$$1 (56) \quad e^2 (55) \quad 1 (54) \quad 1 (53) \quad 1 (52) \quad e (51) \quad -\frac{1}{2} (50)$$

$$1 (63) \quad e (62) \quad 1 (61) \quad 1 (60) \quad e^{-1/2} (59) \quad e^{1/3} (58) \quad e^3 (57)$$

$$e^{-1/6} (65) \quad e (64)$$

(2)

$$0.75 (3) \quad 0.25 (2) \quad 1 (1)$$

תרגילים – פרק 7**חקירת פונקציה**

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \quad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \quad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \quad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (15) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \quad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \quad f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \quad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (27) \quad f(x) = \frac{|x|-1}{x-2} \quad (26) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

$(0 \leq x \leq 2\pi)$ $(0 \leq x \leq \pi)$

הערות:

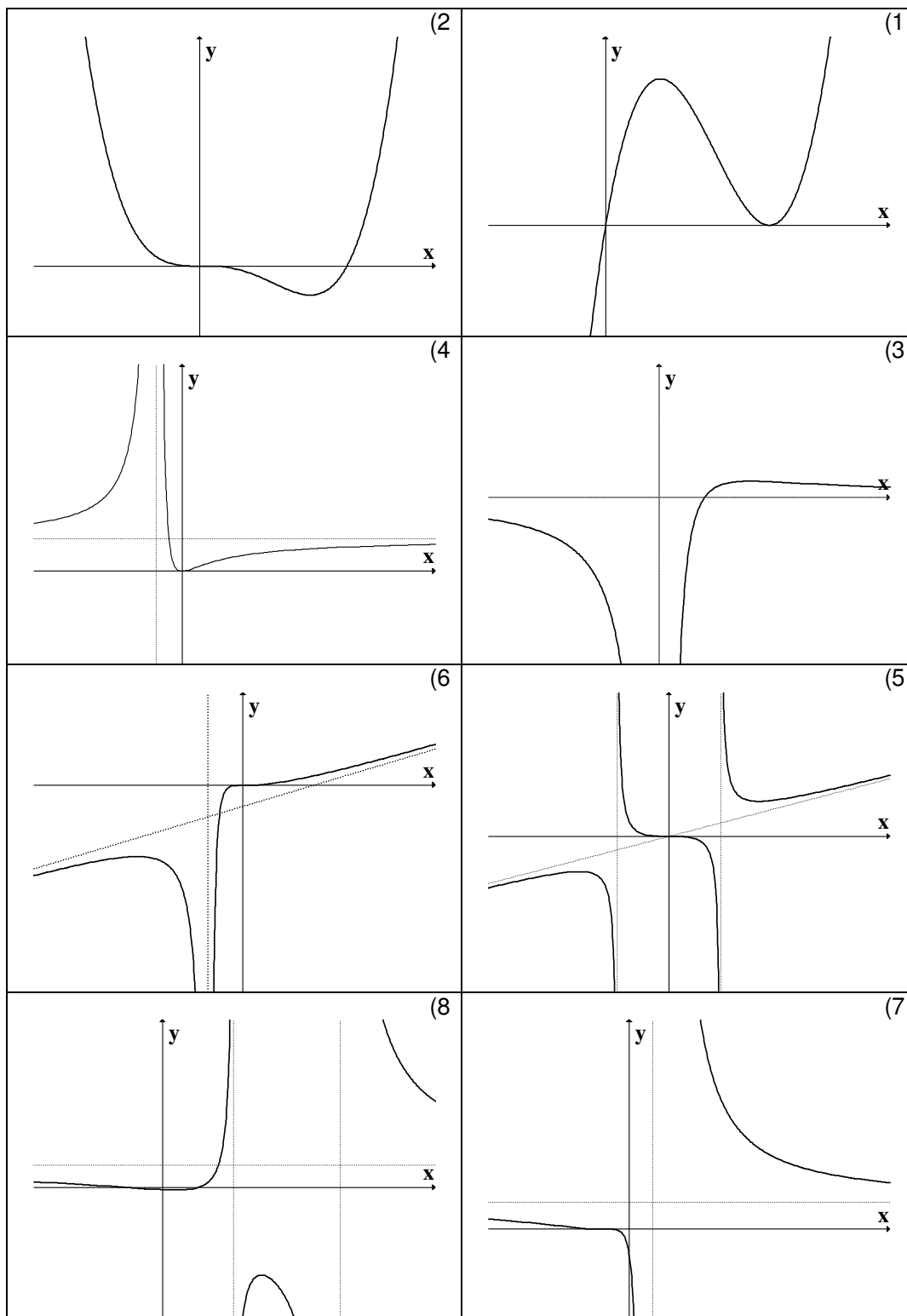
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

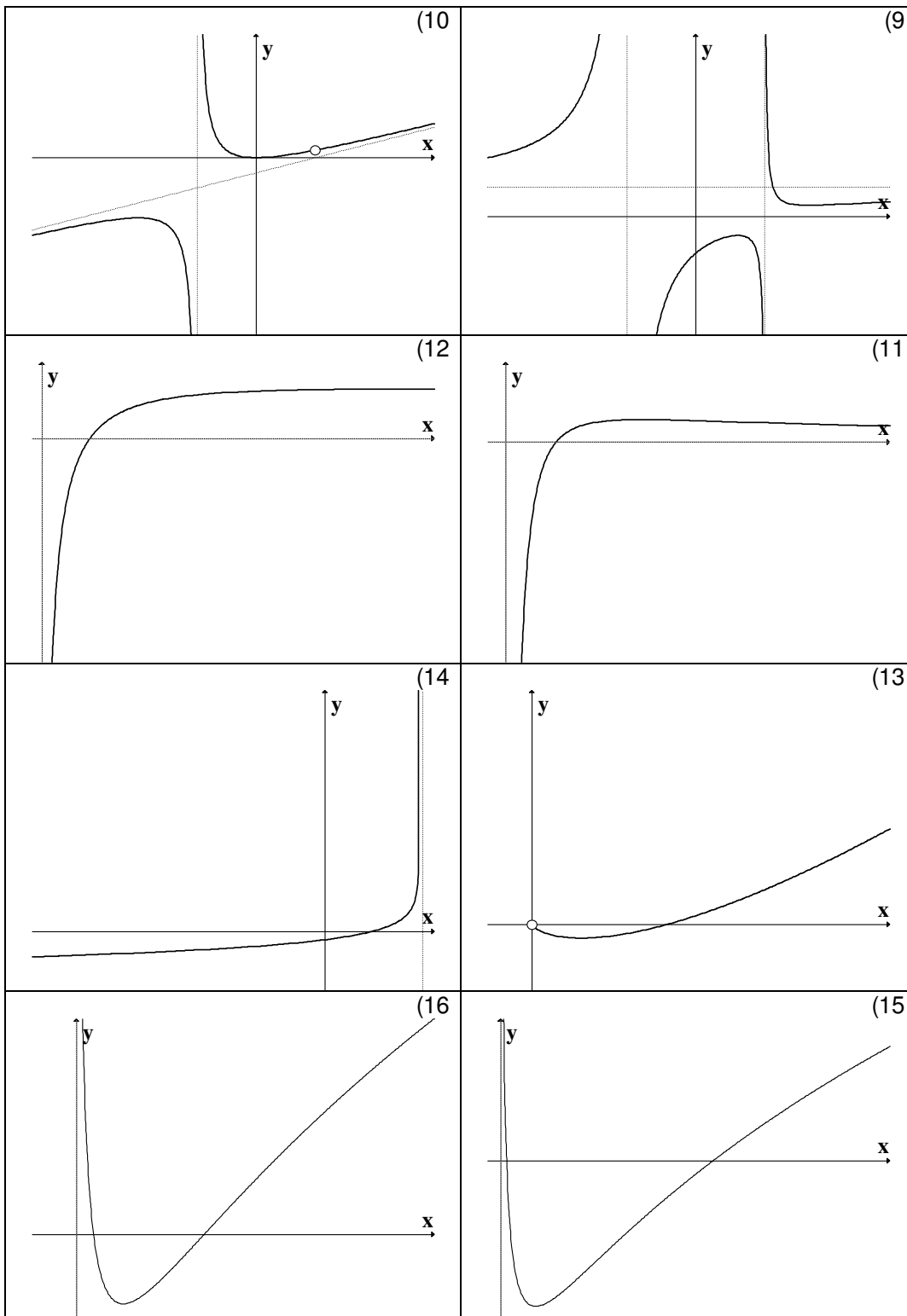
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

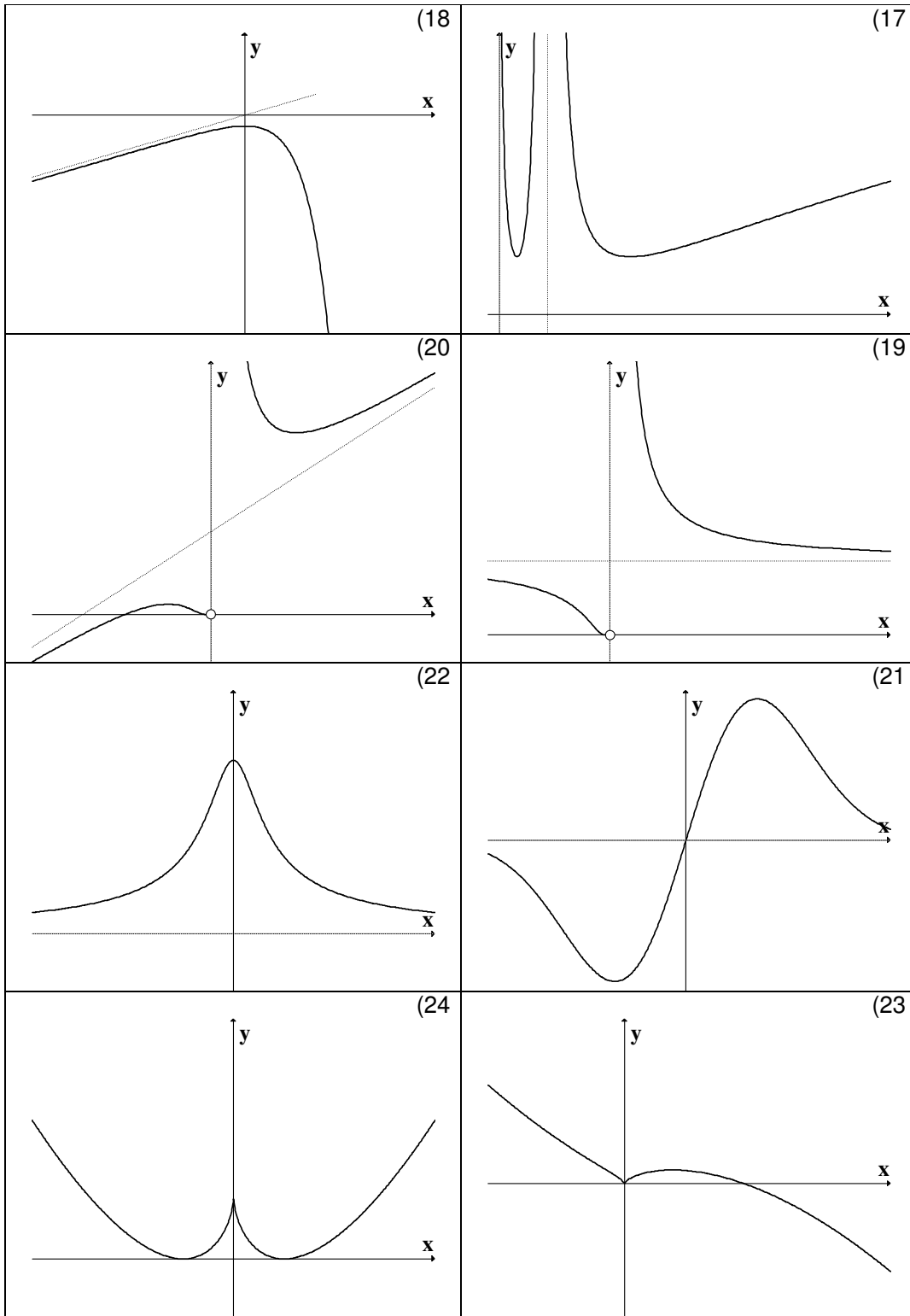
*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

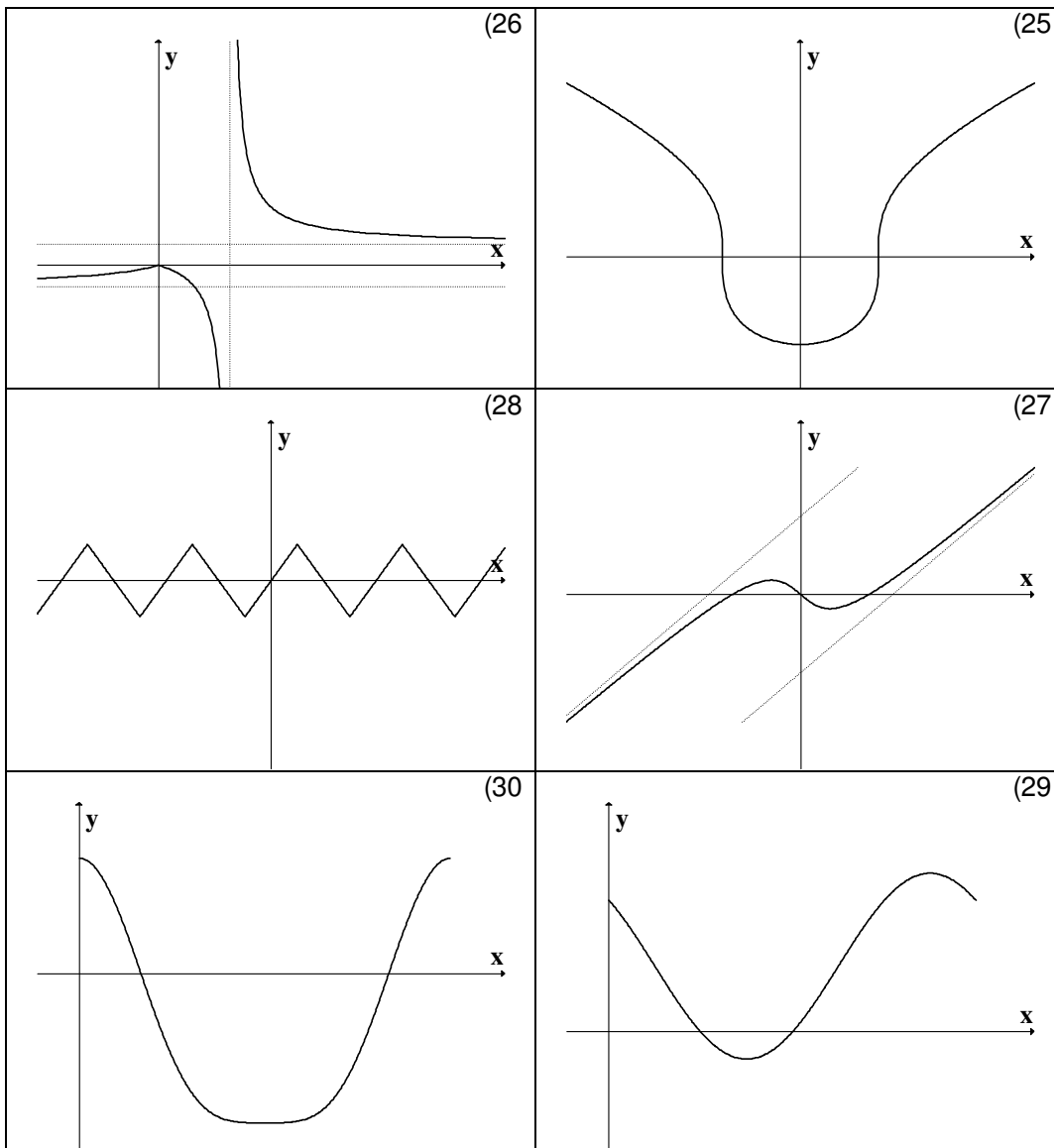
פתרונות – פרק 7

(1)









תרגילים - פרק 8**בעיות מקסימום ומינימום כלכליות**

1. הגדר והדגם את הפונקציות הכלכליות הבאות :

פונקציית ביקוש, פונקציית פדיון (הכנסות), פונקציית עלות (הוצאות), פונקציית עלות ממוצעת, פונקציית רווח, פונקציית שולית ובמיוחד פונקציית עלות שולית.

2. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$$

שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 - מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 - מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
 - שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
 - פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.
3. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 - אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 - אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
4. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 - שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
 - מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.
5. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
 - מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
 - מצא את פונקציית הפדיון השולי.
 - לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?
6. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

7. פונקצית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י: $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- a. מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
 b. מהו הביקוש במקרה זה?
 c. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

8. פונקצית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.

- a. שרטט גרף של פונקצית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 b. מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ₪.
 g. מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
 a. מצא את פונקצית ההוצאה השולית.

9. פונקצית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- a. חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
 b. כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 g. חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק מכך?

10. פונקצית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- a. חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 b. חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$?
 g. חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצרן יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
 d. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

11. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקצית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
 מהו המקסימום במקרה זה?

12. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקצית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
 מהו המקסימום במקרה זה?

13. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקצית עלות שולית

$$MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$$

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

14. לייצר פונקצית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקצית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

15. לייצרן פונקצית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקצית העלות אם

ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

16. א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.

הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית

שווה למחיר המוצר.

17. יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור

דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר המדינה דמי

השכירות החודשיים הינם $P(x) = 60 - 4x$. בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר

המדינה. הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על-ידי $D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$.

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

תרגילים – פרק 9

גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

- (1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
- ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x - 1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. האם הפונקציה רציפה?
- ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = 1$.

(4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר.

עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad (\text{א})$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את $f'(0)$ עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left(z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \text{נתון} \right) f(x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

(7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף 4 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):

א. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ד. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

פתרונות – פרק 9

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a=1$ לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a=3/e, b=-2$ (ב) $a=e, b=0$.

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm a = \infty$, $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$, $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0

נוסחאות – נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$