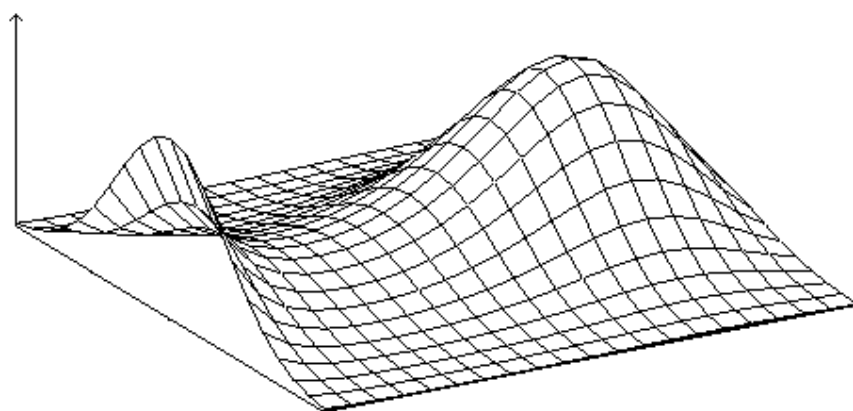


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי

II



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GooL.co.il

גול, בשביל התרגול...

תוכן

4	פרק 1 - אינטגרלים לא אמיתיים.....
5	פרק 2 - טורים עם איברים קבועים.....
11	פרק 3 - טורי פונקציות וטורי חזקות.....
14	פרק 4 - טורי טיילור/מקלורן.....
17	פרק 5 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות.....
19	פרק 6 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות.....
22	פרק 7 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....
24	פרק 8 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט.....
26	פרק 9 - פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים.....
28	פרק 10 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים, הדיפרנציאל השלם.....
30	פרק 11 - קיצון של פונקציה של שני משתנים (רגיל).....
32	פרק 12 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם), שיטת הריבועים הפחותים.....
34	פרק 13 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג'י).....
36	פרק 14 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים (כופלי לגרנג'י).....
38	פרק 15 - קיצון של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה.....
39	פרק 16 - אינטגרלים כפולים.....
43	פרק 17 - שימושי האינטגרל הכפול.....
45	פרק 18 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות).....
48	פרק 19 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן).....
49	פרק 20 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם.....
51	פרק 21 - משוואות מסדר ראשון.....

- 61 **פרק 22 - משוואות לינאריות מסדר שני**
- 66 **פרק 23 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות**
- 77 **נספח - דפי נוסחאות**

פרק 1**אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} \quad (8) \quad \int_1^\infty x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_1^\infty \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^\infty x e^{-x^2} \quad (5)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_3^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx \quad (4) \quad \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8) \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_1^\infty (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad (5)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר x עבור $x \leq 1$.(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

תרגילים – פרק 2**טורים עם איברים קבועים****טור גיאומטרי**

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad (4)$$

תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad (1)$$

מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \quad (4)$$

מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} \quad (6) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (7)$$

מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} & (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & (7) \end{array}$$

מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (3) & \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} & (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} & (1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} & (5) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} & (7) \end{array}$$

הוכח או הפרד

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

פתרונות – פרק 2

(1)

מתבדר (3)	מתכנס ל- $1/3$ (2)	מתכנס ל- $11/14$ (1)
מתכנס ל- 8 (6)	מתכנס ל- $11/12$ (5)	מתכנס ל- $-64/7$ (4)

(2)

מתבדר (3)	מתכנס ל- $1/12$ (2)	מתכנס ל- $1/2$ (1)
-----------	---------------------	--------------------

(3)

מתבדר (3)	מתבדר (2)	מתכנס (1)
מתכנס (6)	מתכנס (5)	מתבדר (4)

(4)

מתבדר (3)	מתבדר (2)	מתכנס (1)
-----------	-----------	-----------

(5)

מתבדר (3)	מתבדר (2)	מתבדר (1)
מתבדר (6)	מתבדר (5)	מתבדר (4)

(6)

מתכנס (3)	מתבדר (2)	מתבדר (1)
מתכנס (6)	מתבדר (5)	מתכנס (4)

(7)

מתכנס (3)	מתבדר (2)	מתכנס (1)
מתכנס (6)	מתכנס (5)	מתבדר (4)
מתכנס (9)	מתכנס (8)	מתבדר (7)

(8)

מתכנס (3)	מתכנס (2)	מתבדר (1)
מתכנס (6)	מתכנס (5)	מתכנס (4)
מתכנס (9)	מתכנס (8)	מתכנס (7)

		(9)
מתכנס (3)	מתכנס (2)	מתכנס (1)
		(10)
מתכנס בתנאי (3)	מתכנס בהחלט (2)	מתבדר (1)
מתכנס בהחלט (6)	מתכנס בהחלט (5)	מתכנס בתנאי (4)
מתכנס בתנאי (9)	מתכנס בתנאי (8)	מתכנס בתנאי (7)

תרגילים – פרק 3

טורי פונקציות וטורי חזקות

טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 nx} \quad (4)$$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן :

$$(-1 \leq x \leq 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (6) \quad (-a \leq x \leq a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (5)$$

טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (9) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (8) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (11) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (10)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (15) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (14) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (13)$$

הערות חשובות:

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

פתרונות – פרק 3

(1)

$$x < 3\frac{9}{10} \text{ or } x \geq 4\frac{1}{10} \quad (3) \quad x \neq 5 \quad (2) \quad x > 0 \quad (1)$$

$$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6) \quad x > 0 \quad (5) \quad 0 < x \neq \frac{1}{n} \quad (4)$$

(2)

$$\text{מתכנס במידה שווה} \quad (1) \quad \text{מתכנס במידה שווה} \quad (2) \quad \text{מתכנס במידה שווה} \quad (3)$$

$$\text{מתכנס במידה שווה} \quad (4) \quad \text{מתכנס במידה שווה} \quad (5) \quad \text{מתכנס במידה שווה} \quad (6)$$

(3)

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad (3) \quad -\infty < x < \infty, R = \infty \quad (2) \quad -1 \leq x < 1, R = 1 \quad (1)$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad (6) \quad -3 < x \leq -1, R = 1 \quad (5) \quad -1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad (4)$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad (9) \quad -\infty < x < \infty, R = \infty \quad (8) \quad x = 1, R = 0 \quad (7)$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad (12) \quad -9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad (11) \quad -\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad (10)$$

(4)

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (2)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (1)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (4)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (3)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (6)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (5)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (8)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (7)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (10)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (9)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (12)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (14)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \quad (13)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} (2n+1)} \quad (15)$$

תרגילים – פרק 4**טור טיילור/מקלורן**

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:
(היעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח בעמוד 79)

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

הערה חשובה: פיתוח לטור מקלורן של 15 פונקציות נוספות תמצא בשאלה 4 בפרק 2.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שוניים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=4)\ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1)\cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$.

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$.

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$.

(9)

א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001.

ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01.

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \quad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה**, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.

אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות – פרק 4

		(1)
(3)	(2)	(1)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$
(6)	(5)	(4)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$	$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$
(9)	(8)	(7)
$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1 < x < 1)$	$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1 \leq x < 1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$
		(2)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$ $(-\infty < x < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$ $(0 < x < 4)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ $(0 < x \leq 2)$
		(1)
		(3)
$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$	$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots$
(3)	(2)	(1)
		(4)
$\ln \frac{3}{2}$ (9) $\ln 2$ (8) $\cos 1$ (7) $\sin 1$ (6) $\pi/4$ (5) $2e$ (4) \sqrt{e} (3) e^{-2} (2) e (1)		
		(5)
	1/3 (3)	1/120 (1)
		(6)
	47/192 (3)	53/144 (1)
	$\pi/60$ (2)	(7)
$\frac{1}{160}$ (3)	1 (2)	$\frac{5}{8}$ (1)
בשגיאה הקטנה מ- $\frac{77}{192}$	בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$	בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$
		(8)
(0.2) ⁶ / 6! (2)	(0.01) ² / 2 (2)	($\pi/6$) ⁵ / 5! (1)
		(9)
	$ x < \sqrt[3]{9/100}$ (2)	$ x < \sqrt[3]{3/25}$ (1)
		(10)
143/576 (3)	39/400 (2)	449/2250 (1)

תרגילים – פרק 5**פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2+y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה (0,0).

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות - פרק 5

(1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.(3) כל המישור. (4) $x^2+y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$ (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה - כל המרחב. (8) ת.ה - כל המרחב.(2) (1) 1 (2) $\frac{1}{12}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5.

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

תרגילים – פרק 6**נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות**

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) 1 חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

2 האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

3 האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הערת סימון:

$$f = f(x, y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

פתרונות - פרק 6

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) (3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0,0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0,0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

תרגילים – פרק 7

כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^3$, $z = \ln(x^2 - y^2)$. חשב z_u , z_v .

(2) נתון $v = 4t + k^2$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial m}$, $\frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z = f(x^2 - y^2)$. הוכח $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון $z = f(xy)$. הוכח $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון $z = f(x - y, y - x)$. הוכח $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון $w = f(x - y, y - z, z - x)$. הוכח $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$. הוכח $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

(9) נתון $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$. הוכח $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

(11) נתון $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

(12) נתון $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$. הוכח $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy} = u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1, \pi)$ אם ידוע ש- $f'(0) = 2$, $g'(0) = 1$.

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$$

$$\text{א. הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$\text{ב. הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$\text{ג. הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$(15) \text{ נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$\text{קושי-רימן, כלומר מקיימות } u_x = v_y, u_y = -v_x$$

הוכח כי:

$$\text{א. } u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\text{ב. } h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, x = r \cosh s, u = f(x, y)$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות - פרק 7

(13) ג. $-e$.

תרגילים – פרק 8
נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2 .$$

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y .$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy) .$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2 .$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2 .$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z .$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 2 \cdot \mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך

ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ או $\vec{u} = (x, y)$

למשל, $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ או $\vec{v} = (x, y, z)$

למשל, $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור \vec{u} גם כך \underline{u} או כך \mathbf{u} .

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

פתרונות - פרק 8

(1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. אורך הגרדיאנט 10.

(2) $48/5$ (3) $1/2$ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) $88/3$

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.

(10) בכיוון הוקטור $(-2, 2, -2)$.

תרגילים - פרק 9**פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים****פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות**

(1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.

(4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$

חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$

חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

(6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.

(7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$.

מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.

(8) אם $u^2 - v = 3x + y$ ו- $u - 2v^2 = x - 2y$,

מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .

(9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן}$$

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור}$$

$$. x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$. OA + OB + OC = a \text{ הוכח. } O = (0, 0, 0)$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה).

פתרונות - פרק 9

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

תרגילים - פרק 10נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלםנוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.

ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן: $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות - פרק 10

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

$$(9) \text{ שינוי מדויק } 0.06472, \text{ שינוי מקורב } 0.06153.$$

$$.5\% \quad (10)$$

$$2\frac{7}{3200} \quad (11)$$

תרגילים - פרק 11**קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)**

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופייים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות - פרק 11

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום .
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום . (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, רווח מקסימלי \$288 .

תרגילים - פרק 12**קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)**
שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$ לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

שיטת הריבועים הפחותים

(7) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y = h(x)$

כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי :

(א) $h(x) = ax + b$, הדגם עבור הנק' $(2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5)$

(ב) $h(x) = ax^2 + bx$, הדגם עבור הנק' $(-1, 2), (2, 0), (0, -2)$

(ג) $h(x) = ax + \frac{b}{x}$, הדגם עבור הנק' $(10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4)$

(ד) $h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$, הדגם עבור הנק' $(4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90)$

(ה) $h(x) = ax^2 + bx + c$, הדגם עבור הנק' $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$

(8) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצא ישר $y = ax + b$ כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- a ו- b המתקבלים מפתרון המשוואות

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

פתרונות - פרק 12

(2) $(0,0)$ מקסימום.

(4) אין קיצון. $(1,2)$ אוסף.

(6) 0.375

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (\text{ב.7})$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (\text{ד.7})$$

(1) לכל t ממשי, מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1,2)$ אוסף.

(5) $(0.5, 1, 1)$ מינימום.

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (\text{א.7})$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (\text{ג.7})$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (\text{ה.7})$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

תרגילים - פרק 13**קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שני משתנים**

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת דני}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות - פרק 13

- | | | | | | |
|---------------------|-------------------------------------|------|---------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| $Max(0, \pm 1)$ | $min(\pm 1, 0)$ | (2) | $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (1) |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $min(\pm 2, 1)$ | (4) | $Max(2, 3)$ | $min(-2, -3)$ | (3) |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | | $Max(6, 2)$ | (5) |
| $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (8) | | $(6, 2)$ | (7) |
| | $min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | | $7 / \sqrt{45}$ | (9) |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | | $Max(6, 2)$ | (11) |
| | | | $min\{2K + L\}$ | $;$ | $\sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ (13) |

תרגילים - פרק 14**קיצון תחת אילוצים של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ**

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.

ב. מצא נקי' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנקי' $(1, 2, 3)$.

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$

והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות - פרק 14

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ .
 (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4).
 הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .
 (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
 (4) (0, 0, 1), (0, 0, -1) .
 (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
 (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
 (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10 .

תרגילים - פרק 15**קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה**

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{משולש שקודקודיו הם: } (0, 5), (3, 0), (0, 0).$$

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{ריבוע שקודקודיו הם } (2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0).$$

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא העיגול } x^2 + y^2 \leq 4.$$

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$$

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$$

פתרונות - פרק 15

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.

(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.

(3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.

(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.

(5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

תרגילים - פרק 16**אינטגרלים כפולים**

(1) חשב את האינטגרלים :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3) \quad \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2) \quad \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

(2) באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (1)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (2)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (3)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (4)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (5)$$

$$D = \{ (x, y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (6)$$

$$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (7)$$

(3) החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3) \quad \int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2) \quad \int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6) \quad \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5) \quad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\iint_D xy^2 dx dy \quad (1) \quad \text{כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x=1.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}} \quad (2) \quad \text{כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה}$$

של המעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה (2,2).

$$\iint_D |x y| dx dy \quad (3) \quad \text{כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=3a, y=a, y=x+a, y=x$ ($a>0$).

$$\iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA \quad (5) \quad \text{כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}.$$

(5) חשב את האינטגרלים הבאים (רמז : שנה את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (2)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{-x^3} dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (4)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (3)$$

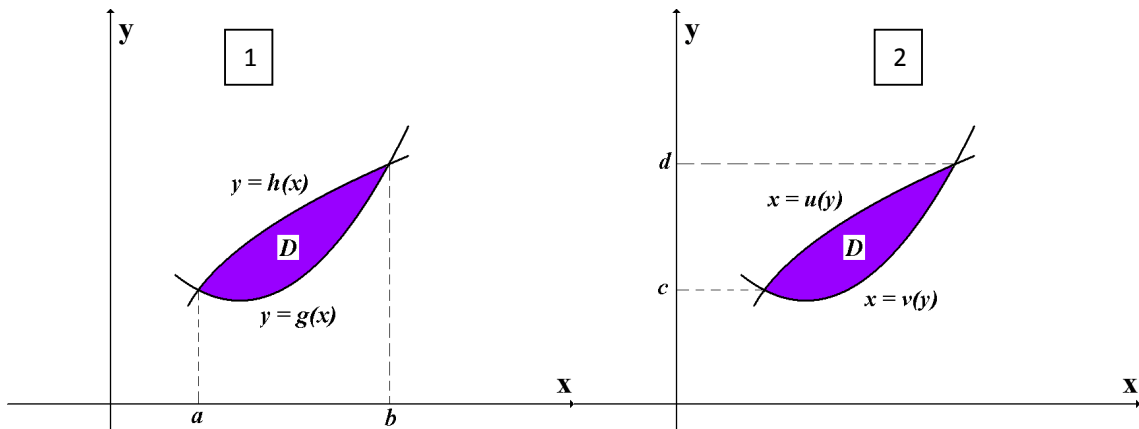
הערות סימון:

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



לתשומם לבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dxdy \quad \text{כך} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ הוא זהה.

פתרונות – פרק 16

$$a^3/3 \pi \quad (3) \quad 1/40 \quad (2) \quad 1 \quad (1) \quad (1)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx \quad (1) \quad (2)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad (7)$$

$$= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2) \quad \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1) \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4) \quad \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6) \quad \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$0 \quad (5) \quad 14a^4 \quad (4) \quad \frac{a^4}{2} \quad (3) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (2) \quad \frac{32}{21} \quad (1) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (4) \quad \frac{1}{4}(e - 2) \quad (3) \quad \frac{241}{60} \quad (2) \quad \frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (1) \quad (5)$$

תרגילים - פרק 17
שימושי האינטגרל הכפול

(1) חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים :

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2) \quad x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4) \quad y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

(2) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (1)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (2)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (5)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (6)$$

(3) ללוח דק בצורת משולש, שקודקודיו הם $(0,0)$, $(1,0)$ ו- $(0,1)$, יש פונקציית

$$\delta(x, y) = xy.$$

(1) חשב את מסת הלוח. (2) חשב את מרכז הכובד של הלוח.

(4) ללוח דק בצורת מלבן $R = \{(x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\}$, יש פונקציית

צפיפות קבועה (הלוח הומוגני). חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר z .

בטא את תשובתך באמצעות המסה M של הלוח.

(5) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$ הנמצא מעל למלבן

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}.$$

פתרונות - פרק 17

$$\begin{array}{llll}
 & & a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) & (2) \\
 & & \frac{88}{105} & (2) \\
 & & \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) & (2) \\
 & & \frac{M(a^2 + b^2)}{12} & (4) \\
 & & \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) & (5) \\
 36 & (6) & \frac{8}{3} & (5) \\
 & & 16\frac{1}{5} & (4) \\
 & & 17\frac{1}{6} & (3) \\
 & & \frac{64}{3} & (4) \\
 & & 32 & (3) \\
 & & \frac{64}{3} & (1) \\
 & & \frac{5}{6} & (1) \\
 & & \frac{1}{24} & (1)
 \end{array}$$

תרגילים - פרק 18

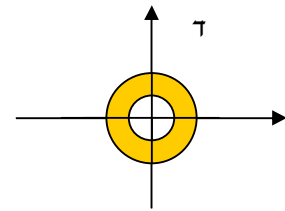
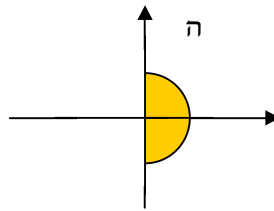
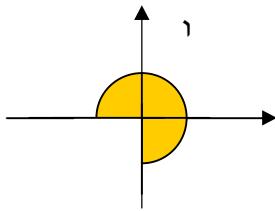
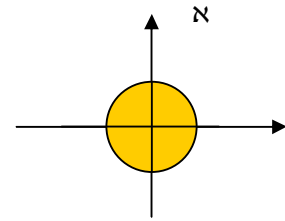
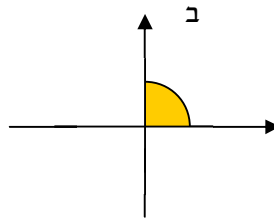
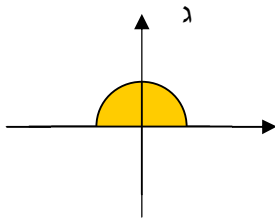
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

(1) חשב $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

לתשומת לבך: לכל המעגלים רדיוס 4. בסעיף ד למעגל הקטן רדיוס 1.

בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר

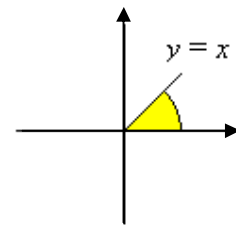
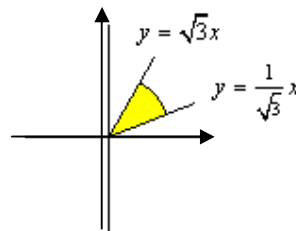
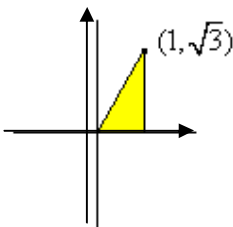
לקואורדינטות קוטביות.



ט

ח

ז



(2) חשב את האינטגרלים הבאים תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2) \qquad \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4) \qquad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (3)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (6) \qquad \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (5)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (8) \qquad \int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (10) \qquad \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (12) \qquad \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (11)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (14) \qquad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (13)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (16) \qquad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (15)$$

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים חשב את **נפח הגוף** המתואר:

(1) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(2) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$ בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה

לבין מישור xy - מלמטה.

(3) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$ בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$

מלמעלה לבין מישור xy - מלמטה.

(4) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי: $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$

פתרונות - פרק 18

$$32\pi \text{ (6)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (5)} \quad 42\pi \text{ (4)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (3)} \quad \frac{32\pi}{3} \text{ (2)} \quad \frac{128\pi}{3} \text{ (1)} \quad (1)$$

$$\frac{32\pi}{9} \text{ (8)} \quad \frac{16\pi}{3} \text{ (7)}$$

$$2\pi \text{ (6)} \quad \pi a^2 \text{ (5)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (4)} \quad \frac{\pi}{8} \text{ (3)} \quad \pi \text{ (2)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (1)} \quad (2)$$

$$\frac{\pi(e-1)}{4e} \text{ (12)} \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e} \text{ (11)} \quad \pi(4-\pi) \text{ (10)} \quad \pi \ln \frac{e}{2} \text{ (9)} \quad \frac{4}{3} \text{ (8)} \quad 36 \text{ (7)}$$

$$\pi \text{ (16)} \quad \pi \ln \frac{4}{e} \text{ (15)} \quad -\frac{4}{5} \text{ (14)} \quad \frac{\pi}{2} + 1 \text{ (13)}$$

$$\frac{5\pi}{32} \text{ (3)} \quad \frac{32}{9} \text{ (2)} \quad \frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3} \text{ (1)} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (4)}$$

תרגילים - פרק 19**החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)**

(1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y = 3-x$, $y = 1-x$, $y = x-1$, $y = x$.

(2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y = x$, $y = 0.5x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$.

(3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקודקודיו הם: $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$ כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקודקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$ כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$.

(7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$ כאשר $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

פתרונות - פרק 19

192 (4)	$1 - \frac{1}{2} \sin 2$ (3)	$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2$ (2)	$\frac{1}{4} \ln 3$ (1)
	$e - \frac{1}{e}$ (7)	$\frac{3}{4}$ (6)	96π (5)

תרגילים - פרק 20**אינטגרלים משולשים ושימושיים**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{-y^2} dy dx dz \quad (2)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (3)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (4)$$

(3) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1+x+y, z = 0, x+y=1, x=0, y=0 \quad (1)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y=1, y = x^2 \quad (2)$$

$$(x \geq 0) z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (5)$$

$$z = x+y, z = 6, x=0, y=0, z=0 \quad (6)$$

(4) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

(5) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ סביב ציר z . בטא את תשובתך באמצעות המסה M של התיבה.

פתרונות - פרק 20

$$\begin{array}{llll} \frac{65}{28} (4) & \frac{27}{4} (3) & \frac{1}{3}(e^3 - 1) (2) & 1 (1) (1) \\ \frac{\sin^2 4}{2} (4) & 4 (3) & 3e - 6 (2) & 2 \sin 4 (1) (2) \\ 36 (6) & \frac{8}{3} (5) & 16\frac{1}{5} (4) & \frac{17}{6} (3) & \frac{88}{100} (2) & \frac{5}{6} (1) (3) \\ & & (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{2h}{3}) & M = \frac{1}{2} \pi k h^2 r^2 (4) \\ & & & \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) (5) \end{array}$$

תרגילים - פרק 21**משוואות מסדר ראשון****פרק 1.1 – משוואות הניתנות להפרדת משתנים**

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.
פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

תשובות

$$(1) y = \pm\sqrt{x^2 + k} \quad (2) y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (3) y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, y = 0$$

$$(4) \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (5) \frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1| \quad (6) \ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$$

$$(7) \frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, y = -2 \quad (8) y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (9) x = 1 + \tan(t + c)$$

$$(10) y = -\frac{1}{\cos x} \quad (11) \ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (12) \frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$$

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרק 1.2 – משוואות הומוגניות

(1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

(2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2 dy = 0 \quad (3)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (4)$$

$$y^2 + x^2 y' = xyy' \quad (5)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (6)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (7)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (8)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (9)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 .$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות

$$(3) -\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, y = -\frac{x}{2^{1/3}}$$

$$(4) \ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, y = x, y = -3x$$

$$(5) -\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, y = 0$$

$$(6) -\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, y = 0, y = -2x$$

$$(7) \ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (8) \ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, y = 0 \quad (9) \ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

$$(10) \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, x(t) = 0, x(t) = t$$

$$(11) n = 1, \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + (x/y)^2) + c$$

פרק 1.3 - משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

(1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (2)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (5)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (6)$$

תשובות

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5$$

$$(3) \quad 0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k$$

$$(4) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x-3, \quad y = -x-1$$

$$(5) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c,$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$(6) \quad \ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c$$

פרק 1.4 – משוואות מדויקות

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה
פתור את המשוואות הבאות :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (3)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (4)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (5)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (6)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (7)$$

(8) נתונה המשוואה $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$ באשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות

$$(2) 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (3) e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (4) y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

$$(5) x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (6) \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c$$

$$(7) x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (8) k=1, x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c$$

פרק 1.5 – הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת (גורם אינטגרציה)

(1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(2) הראה שהמשוואה $x^2 y^3 + x(1 + y^2) y' = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(3) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(4) הראה שהמשוואה $(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x .

(5) פתור את המשוואה $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$.

(6) פתור את המשוואה $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$.

(7) פתור את המשוואה $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$.

(8) פתור את המשוואה $(y^2 - y) dx + x dy = 0$.

(9) פתור את המשוואה $(y - xy^2) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$.

(10) פתור את המשוואה $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

תשובות

(2) $0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c$ (3) $e^x \sin y + 2y \cos x = c$ (4) $\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c$

(5) $0.25x^4 + 0.5x^2 y^2 + \frac{x^3}{3} = c$ (6) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c$ (7) $x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c$

(8) $x - \frac{x}{y} = c$ (9) $-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c$ (10) $-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3}$

פרק 1.6-משוואה לינארית

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

תשובות

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$

פרק 1.7-משוואת ברנולי

(1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (3)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (4)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (5)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (6)$$

תשובות

$$(2) y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (3) y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (4) y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (5) y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$$

$$(6) z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$$

פרק 1.8-משוואת ריקטי

(1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (2)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (4)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (5)$$

תשובות

$$(2) \quad y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (3) \quad y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

$$(4) \quad y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (5) \quad y(x) = x + \frac{1}{\cos c - \sin x + Ce^x}$$

פרק 1.9 – משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהההערה

$$. p = y' = \frac{dy}{dx} \text{ בתת-פרק זה מסמנים}$$

(1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (3)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (4)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (5)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (6)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (7)$$

תשובות

$$(2) (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0$$

$$(3) (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$$

$$(4) (y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (5) y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$$

$$(6) y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (7) 6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$$

תרגילים - פרק 22**משוואות ליניאריות מסדר שני****פרק 2.1 – משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)**

(1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (3)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (5)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (6)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (7)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (8)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (9)$$

תשובות

$$(2) \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (3) \quad y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2$$

$$(4) \quad y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 ; \quad y = \pm x + C_3$$

$$(5) \quad y = C_1 (x \ln x - x) + C_2 ; \quad y = C_3 \quad (6) \quad y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$(7) \quad \frac{y^2}{2} = cx + k ; \quad y = c \quad (8) \quad y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (9) \quad \cot y = -(cx + k) ; \quad y = c$$

פרק 2.2 – משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

(1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' - 100y = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (4)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (5)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (6)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (8)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (10)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (11)$$

תשובות

$$(2) y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (3) y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (4) y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (5) z = e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (7) x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (8) y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (10) y = e^2 \sin 3x \quad (11) y = e^{-4x/5} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right]$$

פרק 2.3 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים

(1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (2)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (3)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (4)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (5)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (8)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (9)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (10)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (11)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (12)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (13)$$

תשובות

$$(2) \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (3) \quad y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$$

$$(4) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (5) \quad y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$$

$$(6) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (7) \quad c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$$

$$(8) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (9) \quad z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$(10) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (11) \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$$

$$(12) \quad x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (13) \quad y = e^{-x} \sin 2x$$

פרק 2.4 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – וריאצית פרמטרים

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (3)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (5)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (6)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (7)$$

תשובות

$$(2) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x|$$

$$(3) y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1]$$

$$(4) y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}]$$

$$(5) y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})]$$

$$(7) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x$$

פרק 2.5 – משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים – שיטה אופרטורית

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (2)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (4)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (5)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (6)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (7)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (8)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \text{ – הערת סימון}$$

תשובות

$$(2) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (3) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (5) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$$

$$(6) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (7) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$$

תרגילים - פרק 23

שימושים של משוואות דיפרנציאליות

(1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$. מצא את משוואת העקום.

(2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$ ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$. מצא את משוואת העקום.

(3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה $(1, 2)$ ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

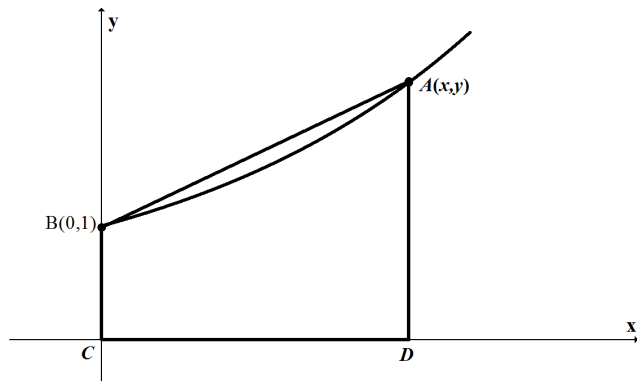
(6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$. נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(8) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר x נחצה ע"י ציר y . מצא את משוואת עקום זה.

(9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה $(0, 1)$ כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM מהראשית O ל- M הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע MN . N היא הנקודה בה המשיק הני"ל חותך את ציר y . צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

(10) נתון עקום העובר בנקודה $(0, 1)$. בכל נקודה A שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$ הנראה בציור. מהי משוואת העקום.



11 מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות :

(א) $2 \ln x + \ln y = c$

(ב) $xy = c$

(ג) $x^2 + 2y^2 = c$

בפרט, מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$ בנקודה $(1,2)$. שרטט.

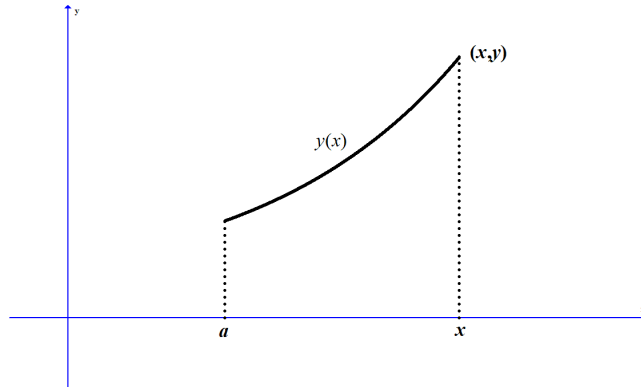
(ד) $x^2 + y^2 = cx$

12 מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית של 45 מעלות עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

13 שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$ ו x משתנה (ראה ציור).

ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$.

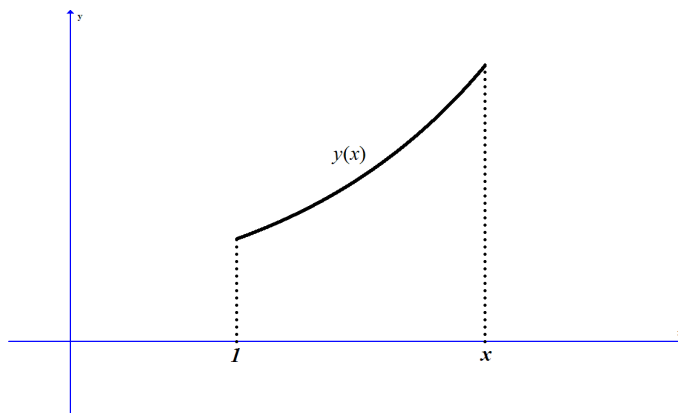
מצא את משוואת העקום.



14 שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$ ו x משתנה.

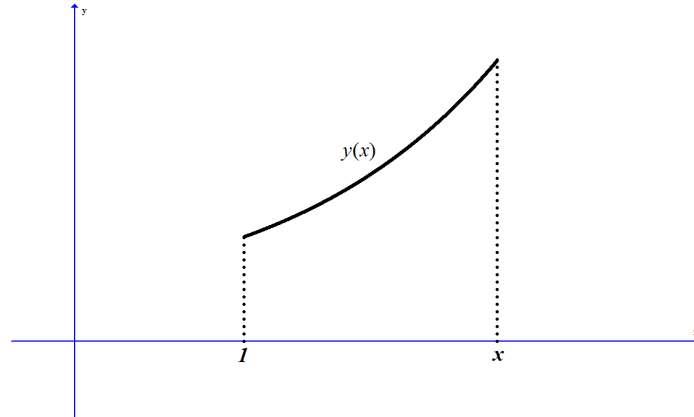
ידוע כי $y(1) = 2$ (ראה ציור).

האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$.



15) שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$ ו- x משתנה. ידוע כי $y(1) = 2$ (ראה ציור).

האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $y(x) - 2$.



16) נניח שכמות $y(t)$ גדלה (דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית), כלומר בכל רגע קצב הגידול (הדעיכה) שלו פרופורציונלי לערכו. נניח שבזמן התחלתי מסוים $t = 0$ הכמות היא y_0 . ונניח שקבוע הפרופורציה הוא k מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן t .

17) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 ג. באיזה שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר שבכל רגע קצב הגידול פרופורציוני לערכו).

18) האוכלוסיה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי
 ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.

19) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית שנתית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.
 א. כמה כסף הפקיד האדם.
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?

20) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה ראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?

21) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים.
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1000 שנים מכמות התחלתית של 100 גרם?
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?

(22) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 4% כל שבוע. בבריכה שנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 10% כל שבוע.
 א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

(23) בזמן $t = 0$ יש במיכל 2 ק"ג מלח מומסים ב-500 ליטר מים. נניח שמי מלח בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 10 דקות.

(24) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$ כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כח של 20 ק"ג על הסירה. אם משקל החותר והסירה הוא 480 ק"ג וההתנגדות (ק"ג) שווה ל- $1.75v$ באשר v נמדדת ב- מטר/שעה, מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

(25) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונאלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה השווה ל- 30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל- 70 מעלות.
 א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

(26) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונאלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים וב- k את קבוע הפרופורציה.
 א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$. מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$. פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

(27) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ.
 א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $64/1$ מנפחו ההתחלתי?

(28) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$ כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t . הוכח כי כעבור $\ln 2$ שניות ייקטן נפח הבלון לכדי שמינית מנפחו התחלתי?

תשובות :

(1) $x^2 + y^2 = k$ (2) $2xy + x^2 = 7$ (3) $x^3 - 3y^2x = 11$ (4) $x^2 + y^2 = k$

(5) $y^2 = ax$ (6) $y = 2xe^{x-2}$ (7) $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$

(8) $2x^2 + y^2 = k$ (9) $2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}$ (10) $y = 2e^{x^2/4} - 1$

(11) (א) $2y^2 - x^2 = k$ (ב) $y^2 - x^2 = k$ (ג) $y = ax^2$, $y = 2x^2$

(ד) $y = m(x-c)^2$ $y > 0$ (12) $\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$

(13) $y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right)$ (14) לא (15) כן (16) $y(t) = y_0 e^{kt}$

(17) (א) $4 \cdot e^{0.02 \cdot 30} \approx 7.28_{mil}$ (ב) $4 \cdot e^{0.02 \cdot (-6)} \approx 4.51_{mil}$ (ג) 2106 שנים

(18) (א) 2% (ב) 15.92 שנים (19) (א) 4093.65 ש"ח (ב) 13.41 שנים

(20) 40.77 חודשים (21) (א) 88.69 גרם (ב) 19188 שנים

(22) (א) 3.04 שנים (ב) 14.6 שנים (23) (א) 26.75 ק"יג (ב) 0.942 דקות

(24) (א) 4.09 מטר לשנייה (ב) 72 שניות (ג) 10 מטר לשנייה (25) (א) $43\frac{1}{3}$

(ב) 1.13 שעות (26) (א) $h(0) = 4$, $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ (ב) $\sqrt{2} + 2$

(27) (א) $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ (ב) 4.5 שעות

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות – נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות – אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות – טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות – אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = a \cdot d - b \cdot c \\ \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right| = a \left| \begin{array}{cc} e & f \\ h & i \end{array} \right| - b \left| \begin{array}{cc} d & f \\ g & i \end{array} \right| + c \left| \begin{array}{cc} d & e \\ g & h \end{array} \right| \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

תחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0) \\ -1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0) \\ -1 < x < 1 \quad (m \leq -1) \\ m \neq 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$