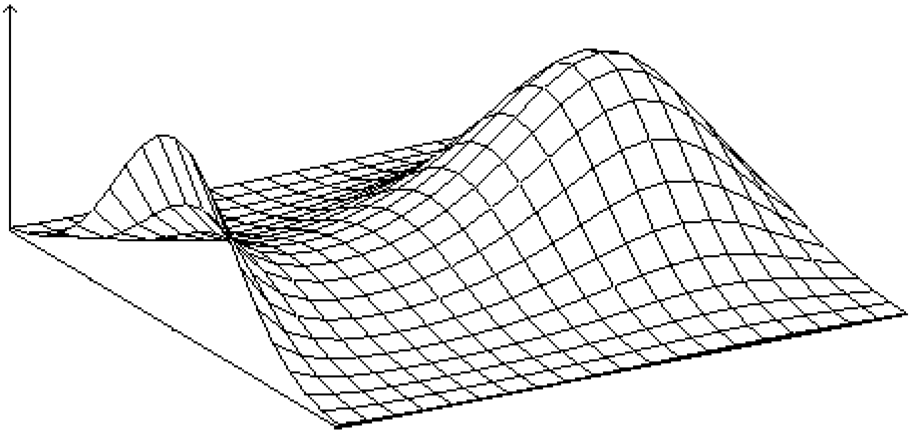
מתמטיקה
לכלכלנים



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 – אינטגרלים

האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

***הערה: תרגילים עם פונקציות טריגונומטריות כגון סינוס וקוסינוס לא צריך!**

חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int 4dx$

2) $\int x^4 dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$

8) $\int (\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}) dx$

9) $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$

11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$

12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

13) $\int (4x+1)^{10} dx$

14) $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$

15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

18) $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$

20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

21) $\int \frac{1}{4x} dx$

22) $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$

23) $\int (1+\frac{1}{x})^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$

25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

27) $\int (e^{4x}+e^{-x}) dx$

28) $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

29) $\int \frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x} dx$

30) $\int \left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx$

31) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

32) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

33) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

34) $\int \cos 4x dx$

35) $\int \sin\frac{x}{2} dx$

36) $\int 2\sin 4x + \cos x dx$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

***הערה**: תרגילים עם פונקציות טריגונומטריות כגון סינוס וקוסינוס לא צריך!*

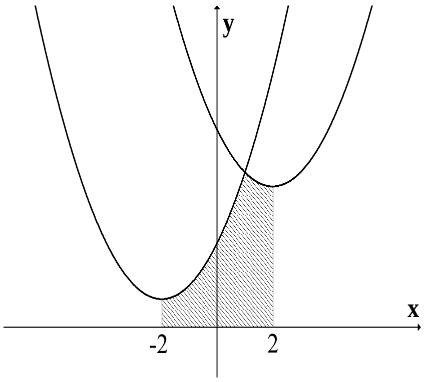
חישוב שטחים

(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$g(x)=x^2-4x+14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים x = -2 ו- x = 2 (השטח המקווקו בציור).

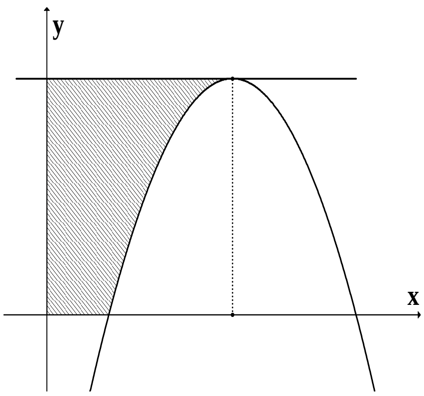


(2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+6x-5$ (ראה ציור).

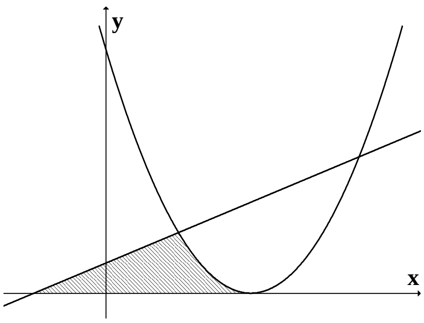
א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



(3) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ ונתון הישר $y=0.5x+0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המקווקו בציור).



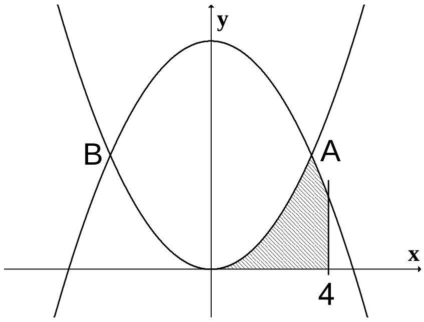
(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

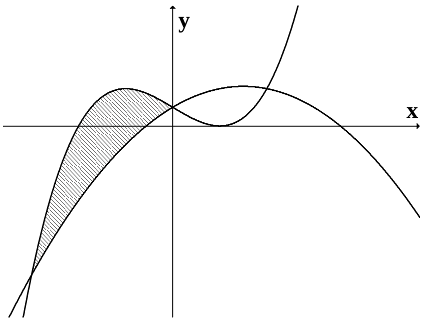
הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר $x = 4$.

(5) נתונות שתי פונקציות:

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

$$y = x^3 - 3x + 2$$



א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

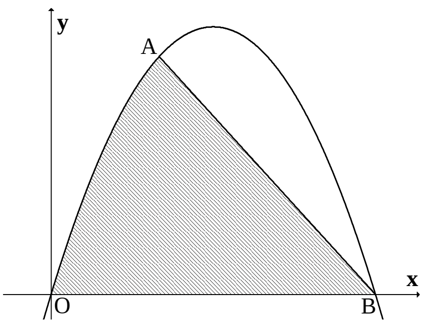
הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).



א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה O(0,0)

ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B.

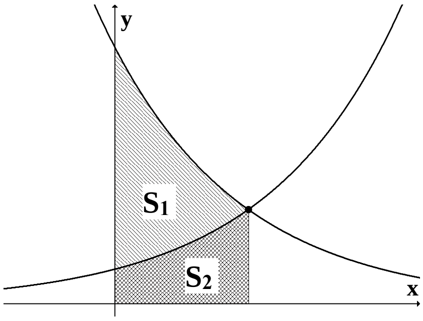
ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

(7) בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x)=e^{-x+2}$$
$$g(x)=e^{x}$$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר
y .

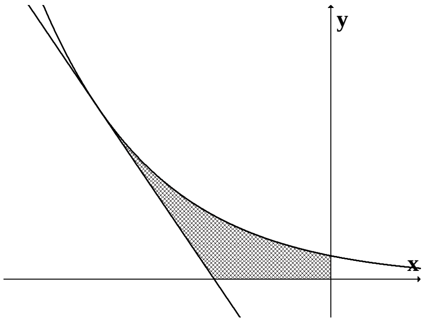
ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

$x=-1$ (ראה ציור).



א. מצא את משוואת המשיק.

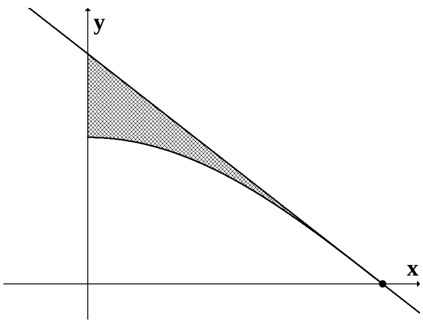
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).

(9) נתונה הפונקציה $y=\cos 2x$ בתחום $0\le x\le 4$ (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.



א. מצא את משוואת המשיק .

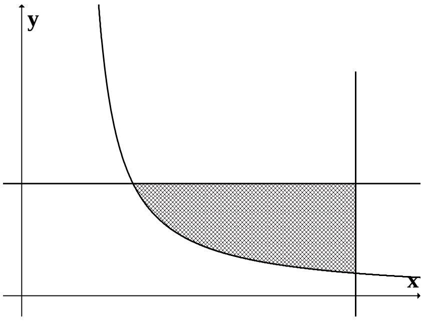
ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

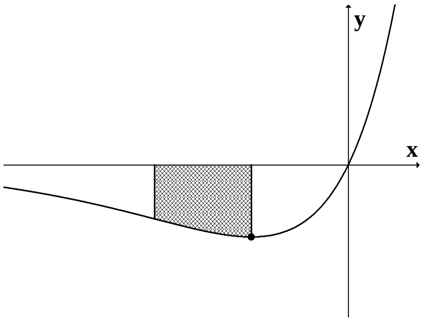
$y=\frac{1}{2x-1}$ ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $y=1$

(השטח המקווקו בציור).



(11) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.

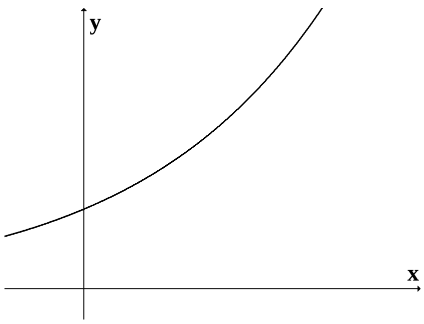
לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר x=a , שווה ל- $3e^{2a}-e^{a}$, כאשר $a<\ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).



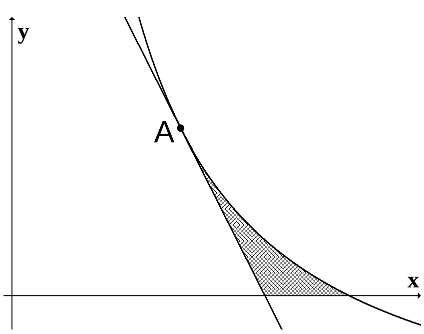
שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^2}{2}$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(13) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x}-2$ בתחום $x>0$.



מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב.חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=\sin x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$
$$g(x)=\cos 2x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה $f(x)=tg^2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2xdx=tgx-x+c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y=x^2-10x+25$.

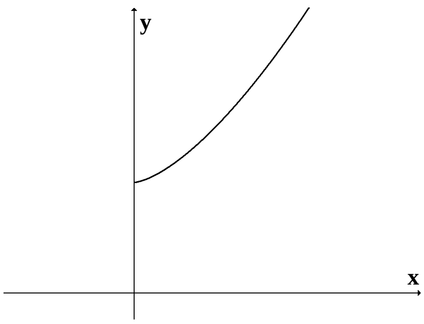
א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+4$ בתחום $x\ge 0$.

(ראה ציור)



א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y=\cos^2 x\cdot \sin x$

בתחום $\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$.

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2-a^2}\,dx$. ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

<u>חישוב אורך עקום (קשת)</u>

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

1) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ $\left(1\le x\le 2\right)$

2) $y=x^{2/3}$ $\left(1\le x\le 8\right)$

3) $y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$ $\left(1\le x\le 2\right)$

4) $y=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$ $\left(0\le x\le 3\right)$

5) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ $\left(0\le x\le 3\right)$

6) $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ $\left(1\le x\le 8\right)$

7) $x=3y^{3/2}-1$ $\left(0\le y\le 4\right)$

8) $y=\ln x$ $\left(1\le x\le 2\right)$

9) $y=x^2$ $\left(1\le x\le 2\right)$

פרק 2 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f(x,y)=100-5x-2y$, $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f.

נגדיר $f(x,y)=\begin{cases}3x+y & y>x\\ 4x & y\le x\end{cases}$. הנח כי $x,y\ge 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x,y)=4,12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f(x,y)=\min\left\{\frac{x}{3},y\right\}$, $f:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$.

(3)

תהי $u(x,y)=(x+p)(y+q)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(1,6),(3,2),(0,14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות ?

עליך להגיע למשוואה מפורשת . שרטט את עקומת האדישות.

<u>נגזרות חלקיות</u>

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\frac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ $\left(\text{only } f_x\right)$

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\frac{x^2-3y}{x+y^2}$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y,z)=xyz$

פרק 3 - בעיות מקסימום ומינימום כלכליות בשני משתנים בלי ועם אילוץ (כופלי לגרנז')

- **הערה :תרגילים עם פונקציות טריגונומטריות כגון סינוס וקוסינוס לא צריך!**

מינימום ומקסימום לפונקציה של שני משתנים (ללא אילוץ)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף :

25) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

26) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

27) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

28) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

29) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

30) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

31) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי :

$$Q_1=116-30P_1+20P_2$$

$$Q_2=144+16P_1-24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה ?

<u>מקסימום ומינימום לפונקציה של שני משתנים עם אילוץ (כופלי לגרנג')</u>
<u>אנא קיראו הערה חשובה בדף הבא לפני שאתם ניגשים לפתרונות</u>

32. נתונה בעיית הקיצון $Max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$, פתור את הבעיה.

33. נתונה בעיית הקיצון $Max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, פתור את הבעיה.

34. מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

35. דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

36. עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2+y^2=13$.

לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.

דני מחפש את הסל (אננס,מנגו) = (x,y) , על עקומת התמורה , המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעייה.

37. ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*,L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

הערה חשובה לגבי המתכון לפתרון בעיות קיצון תחת אילוץ (כופלי לגרנז')

הדרך בה אני מציג את הפתרונות תיראה לכם במבט ראשון שונה מהנעשה בהרצאה.
יחד עם זאת אני מבטיח לכם **שהדרך זהה לדרך שנלמדה בהרצאה**, היא פשוט חוסכת שלב אחד או שניים. על מנת שתהיו רגועים אני אפרט במספר שורות על דרך הפתרון בהרצאה ועל הדרך אותה אני מציג. כך גם נוכל לחזור על מתכון הפתרון.
נתחיל...
הבעייה העומדת לפנינו היא למצוא לפונקציה $f(x,y)$ מקסימום ומינימום בהינתן אילוץ $g(x,y)=0$ או $g(x,y)=k$.

שלב I - בשלב זה מוצאים נקודות חשודות כקיצון
בהרצאה מגדירים פונקציית לגרנז' $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$
ואז על מנת למצוא נקודות חשודות כקיצון פותרים $1)\ L_x=0,\ 2)\ L_y=0,\ 3)\ L_\lambda=0$
היות ושלוש המשוואות הנ"ל מובילות לשלוש המשוואות הבאות:

$$\boxed{1)\ f_x=\lambda g_x \quad 2)\ f_y=\lambda g_y \quad 3)\ g(x,y)=0}$$

הרי שאני רושם אותן מיד וחוסך את שלב כתיבת פונקציית הלגרנז'.

שלב II- בשלב זה יש לבדוק האם הנקודות החשודות כקיצון הן קיצון או לא.

בהרצאה מחשבים את הדטרמיננטה $H=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx}-\lambda g_{xx} & f_{xy}-\lambda g_{xy} \\ g_y & f_{xy}-\lambda g_{xy} & f_{yy}-\lambda g_{yy} \end{vmatrix}$. ואז:

אם $H(x_0,y_0;\lambda)>0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.
אם $H(x_0,y_0;\lambda)<0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.
אני פיתחתי את הדטרמיננטה הנ"ל מראש, *הכפלתי במינוס אחת*, וקיבלתי

$$\boxed{H=(f_{xx}-\lambda g_{xx})\cdot(g_y)^2+(f_{yy}-\lambda g_{yy})\cdot(g_x)^2-2(f_{xy}-\lambda g_{xy})\cdot g_x\cdot g_y}$$. ואז:

אם $H(x_0,y_0;\lambda)<0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.
אם $H(x_0,y_0;\lambda)>0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.
ניתן גם לא להכפיל במינוס אחת ולעשות כמו בהרצאה.

פרק 4 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר

שאלה 1

א. הוכח כי פונקצית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית. הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

שאלה 2

תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=\sqrt{27}$.

א. מצא את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(6,3)$ עוברת עש"ע של f . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא $2x+3y=21$. מצא את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

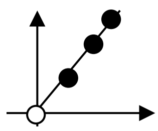
שאלה 3

תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע כי $g(4)=5\,,\,g(1)=3\,,\,g'(8)=2$.

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y) כך: $t=\frac{4y}{x}$.

מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y) באופן הבא: $u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.

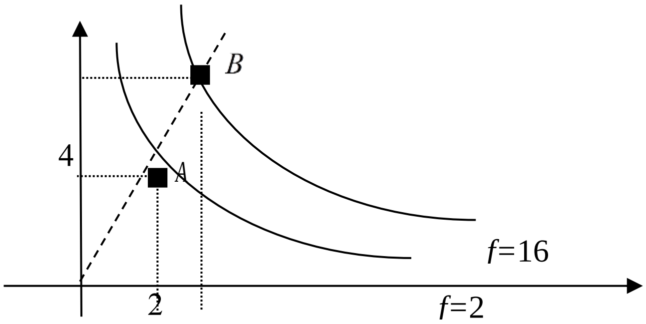


א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$.



שאלה 4

הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר **3** .

הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B .

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$ על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$

ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$. הסבר זאת בקצרה.

ג.2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$. היעזר ב- 1 ובנתונים על f .

פרק 5 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים

(1) נתונות שתי פונקציות:

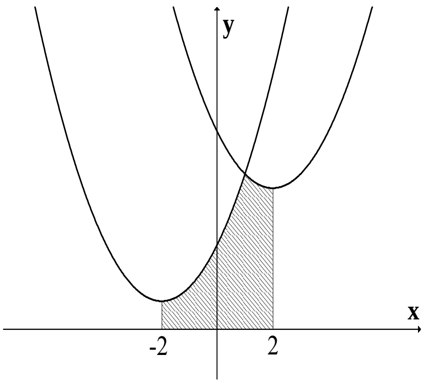
$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$g(x)=x^2-4x+14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

x = -2 ו- x = 2 (השטח המקווקו בציור).



(2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+6x-5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

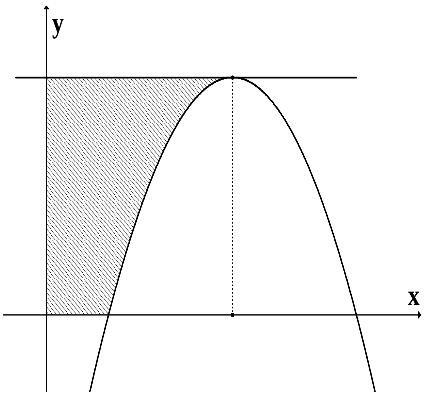
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

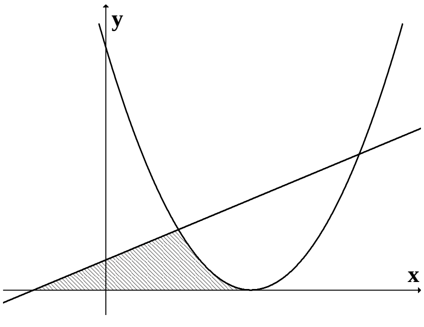


(3) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ ונתון הישר

$y=0.5x+0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).



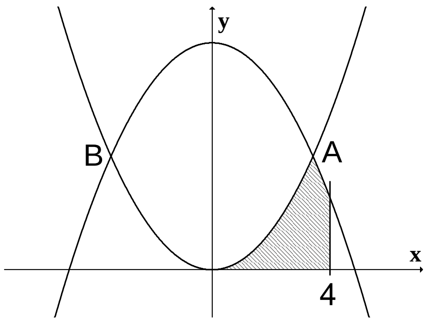
(4) נתונות הפונקציות:

$f(x) = x^2$

$g(x) = -x^2 + 18$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

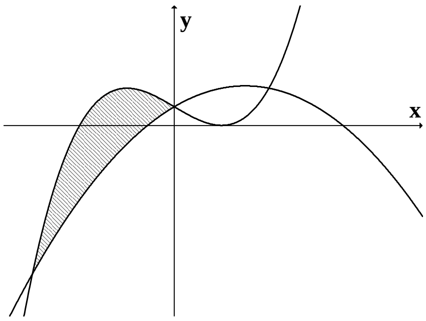
הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר x = 4 .

(5) נתונות שתי פונקציות:

$y = -x^2 + 3x + 2$

$y = x^3 - 3x + 2$



א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

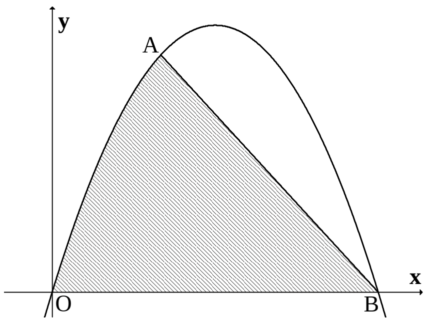
הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).



א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה O(0,0)

ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B.

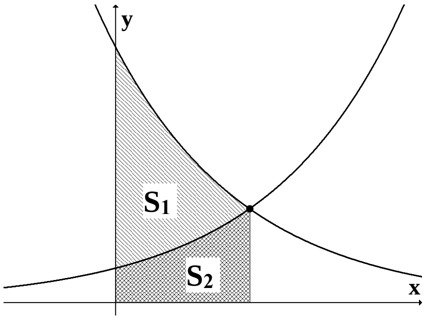
ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

(7) בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x)=e^{-x+2}$$
$$g(x)=e^{x}$$

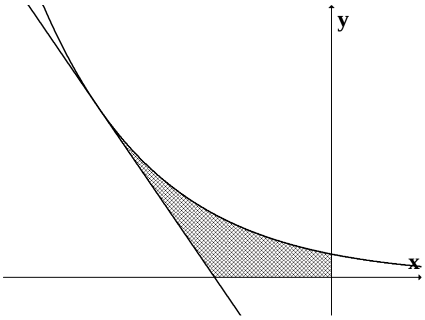


א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר
. y

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-2x}$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

$x=-1$ (ראה ציור).

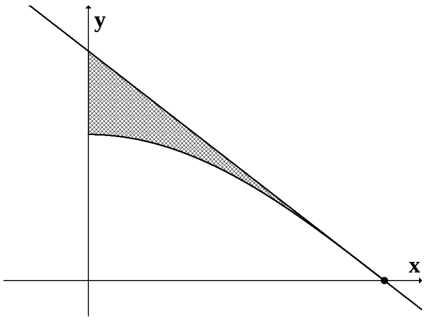
א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).

(9) נתונה הפונקציה $y=\cos 2x$ בתחום $0\le x\le 4$
(ראה ציור).



ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק .

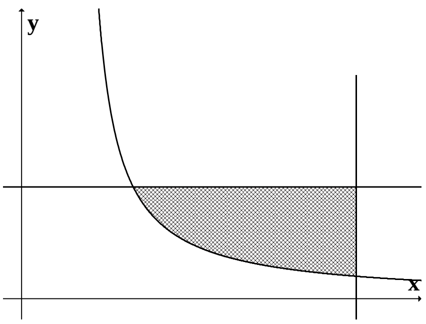
ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

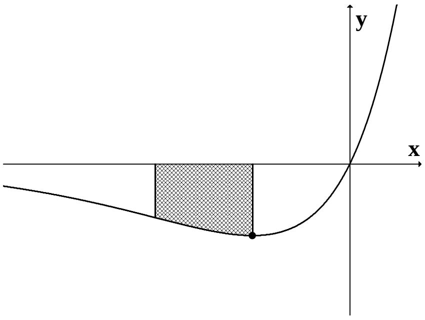
$y=\frac{1}{2x-1}$ ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $y=1$

(השטח המקווקו בציור).



(11) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.

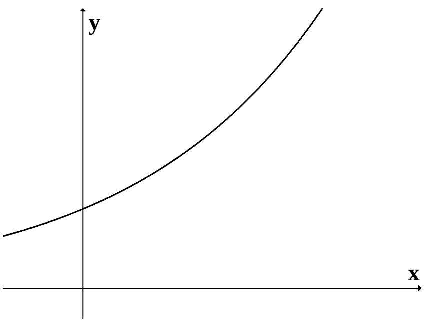
לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר x=a , שווה ל- $3e^{2a}-e^{a}$, כאשר $a<\ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).



שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^{2}}{2}$.

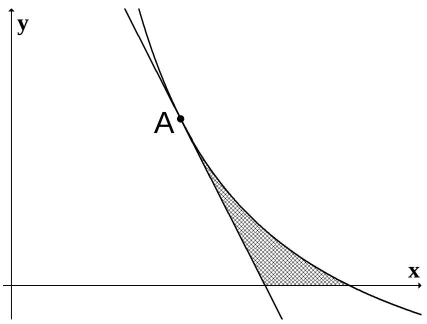
א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(13)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x}-2$ בתחום $x>0$.



מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב.חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=\sin x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$
$$g(x)=\cos 2x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה $f(x)=tg^2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2xdx=tgx-x+c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y=x^2-10x+25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

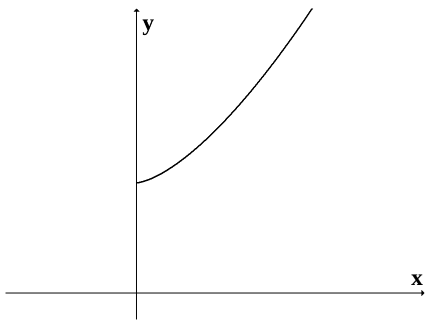
(17)

נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+4$ בתחום $x\ge 0$.

(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y=\cos^2 x\cdot\sin x$

בתחום $\frac{1}{2}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$.

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a\sqrt{x^2-a^2}\,dx$. ב. $\int_{-a}^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

<u>חישוב אורך עקום (קשת)</u>

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

1) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ $(1\le x\le 2)$ 2) $y=x^{2/3}$ $(1\le x\le 8)$ 3) $y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$ $(1\le x\le 2)$

4) $y=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$ $(0\le x\le 3)$ 5) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ $(0\le x\le 3)$ 6) $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ $(1\le x\le 8)$

7) $x=3y^{3/2}-1$ $(0\le y\le 4)$ 8) $y=\ln x$ $(1\le x\le 2)$ 9) $y=x^2$ $(1\le x\le 2)$

נספח נוסחאות

גבולות

	$x\to-\infty$	$x\to 0$	$x\to\infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^{\infty}=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=\arctan x$	$\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0)=0$	$\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^{\infty}=\infty$ $a^{\infty}=0$
$y=\sin x$	$---$	$\sin 0=0$	$---$
$y=\cos x$	$---$	$\cos 0=1$	$---$
$y=\frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y=\frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \quad \rightarrow \quad y' = 0$

2. $y = f^{n} \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

3. $y = e^{f} \quad \rightarrow \quad y' = e^{f} \cdot f'$

4. $y = a^{f} \quad \rightarrow \quad y' = a^{f} \cdot f' \cdot \ln a$

5. $y = \ln f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{f} \cdot f'$

6. $y = \sin f \quad \rightarrow \quad y' = \cos f \cdot f'$

7. $y = \cos f \quad \rightarrow \quad y' = -\sin f \cdot f'$

8. $y = \tan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$

9. $y = \cot f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$

10. $y = \arcsin f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

11. $y = \arccos f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

12. $y = \arctan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

13. $y = \operatorname{arccot} f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

14. $y = \sinh f \quad \rightarrow \quad y' = \cosh f \cdot f'$

15. $y = \cosh f \quad \rightarrow \quad y' = \sinh f \cdot f'$

16. $y = \tanh f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$

17. $y = \coth f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$

18. $y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax\_b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\ \cos x=\cos\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\ \tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha \Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k\\ \cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\\a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^m a^n=a^{m+n}\\\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\\\left(a^m\right)^n=a^{mn}\\(ab)^n=a^nb^n\\\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\\a^0=1\\a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\\\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\\a^x=b\ \Rightarrow\ x=\ln b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0,b>0\\\ln a+\ln b=\ln ab\\\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}\\\ln 1=0\ ,\ \ln e=1\\\ln e^n=n\\\ln x^n=n\ln x\ (x>0)\\e^{\ln x}=x\\a^b=e^{b\ln a}\\\ln x=k\ \Rightarrow\ x=e^k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c\\[2ex]\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & if\quad a\ge 0\\-a & if\quad a<0\end{cases}\\|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\\\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\\|x|<a\ \Leftrightarrow\ -a<x<a\\|x|>a\ \Leftrightarrow\ x<-a\ or\ x>a\end{cases}$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$