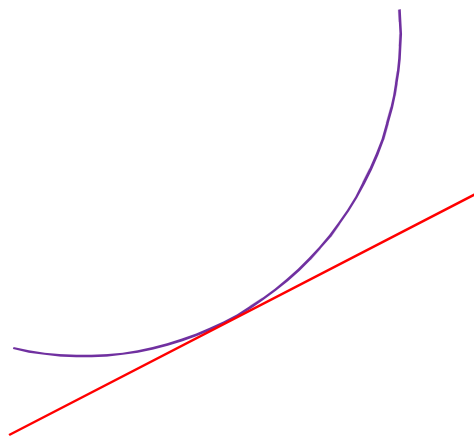


מתמטיקה א



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר מותאם לתלמידי החוג למנהל עסקים באוניברסיטה העברית הלומדים את הקורס מתמטיקה א.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GooL.co.il

גול, בִּשְׁבִיל הַתְּרַגּוּל...

תוכן

3 פונקציה ממשית	פרק 1 -
6 גבול ורציפות	פרק 2 -
10 חישוב נגזרת של פונקציה	פרק 3 -
14 (בעיות משיקים) הגזרת של הנגזרת	פרק 4 -
15 כלל לופיטל	פרק 5 -
17 הכל כולל הכל	פרק 6 -
24 הגדרת הנגזרת	פרק 7 -
27 "שאלות מסביב"	פרק 8 -
29 (קושי-רול-ניוטון רפסון)	פרק 9 -
30 משפט לגרנג'	פרק 10 -

פרק 1 – פונקציה ממשית

1. הגדר והדגם את המושג פונקציה במתמטיקה.

ותאר את הפונקציות הנפוצות: לינארית, ריבועית, שורש $y = \sqrt{x}$, היפרבולה $y = \frac{1}{x}$.

הערך המוחלט $|x|$.

2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

3. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$$

4. תאר בקצרה את הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$.

5. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x - 1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x - 5} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{5x - 2} \quad \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

6. תאר בקצרה את הפונקציה הלוגריתמית $f(x) = \ln x$.

7. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$ ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$

ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$ ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

8. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

הסבר מהי הרכבת פונקציות והדגם על ידי חישוב הרכבת הפונקציות הבאות :

(1) $f(g(1))$ (2) $h(g(f(5)))$ (3) $f(g(x))$ (4) $h(f(x))$ (5) $f(f(x))$ (6) $h(h(x))$

9. נתונות הפונקציות $g(x) = e^{4x}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$, פתור את המשוואה $f(g(x)) = 0$

10. נתונות הפונקציות $g(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, פתור את המשוואה $g(f(x)) = 5$

11. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{1-2x}{x+k}$. מצא לאיזה ערך של הקבוע k מתקיים

$f(g(x)) = x$. הסבר את משמעות התוצאה שקיבלת.

12. הסבר מהי פונקציה זוגית ומהי פונקציה אי זוגית.

13. בדוק עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית, אי זוגית או כללית.

(1) $y = 4x^3$ (2) $y = x^4 + x^{10}$ (3) $y = 1$ (4) $y = x^2 + x^3$ (א)

(5) $y = |x| + x^2$ (6) $y = \sqrt[3]{x} + x$ (ב)

14. נתומה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

א. חשב את $f(7)$, $f(0)$, $f(-4)$, $f(4)$, $f(1)$.

ב. שרטט את גרף הפונקציה

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי זוגית או כללית.

15. נתון $f(x) = 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{\ln(|x| + 3)}$ ידוע כי $f(a) = 4$. חשב את $f(-a)$.

16. הסבר והדגם את המושג הפונקציה ההפוכה של פונקציה נתונה.

בתשובתך מצא את הפונקציה ההפוכה של הפונקציות:

$$a) f(x) = 4x + 1, \quad b) f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

17. מצא את הפונקציה ההפוכה של הפונקציות הבאות:

$$a) f(x) = \frac{x-1}{3} \quad b) y = \frac{x+1}{x} \quad (x \neq 0) \quad c) y = \frac{3x-2}{x-2} \quad d) y = x^2 - 4 \quad (x \geq 0)$$

פרק 2 – גבולות ורציפות

(1) הסבר למה הכוונה בחישוב גבול של פונקציה ועבור על השיטות לחישוב גבול של פונקציה.

(2) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^x} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

הערה חשובה מאוד !

בהמשך הקורס תלמד את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 3, 4.

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (7)$$

רציפות**(1) הסבר מהי פונקציה רציפה.****(2) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" * שלהן:**

(בסעיפים 1 ו-2 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 2$.**(3) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(4) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{\frac{1}{2^x} - 2}{\frac{1}{2^x} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 2 ו-3 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

פרק 3 – חישוב נגזרת של פונקציה

$$(1) \text{ הסבר מהי הנגזרת של פונקציה והסבר את כלל הגזירה } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = x^3 \quad \text{ב. } f(x) = x^7 \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \quad \text{ד. } f(x) = x \quad \text{ה. } f(x) = x^{-3}$$

$$\text{ו. } f(x) = x^{-1} \quad \text{ז. } f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ח. } f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{ט. } f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \text{ הסבר את כלל הגזירה } f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 2x^3 \quad \text{ב. } f(x) = 3x^7 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^6}{7} \quad \text{ה. } f(x) = 8x$$

$$\text{ו. } f(x) = 3x^{-2} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ח. } f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ט. } f(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$(3) \text{ הסבר את כלל הגזירה } f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

$$(4) \text{ הסבר את כלל הגזירה } f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$(5) \text{ הסבר את כלל הגזירה } f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{u} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{u^2} u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (6)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

$$f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (7)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (8)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (9)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3-1}$$

$$\text{ד. } f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x+3} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (10)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{1-2x} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 3x - 4}$$

$$\text{ד. } f(x) = x \cdot \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}$$

(12) הסבר מהי הפונקציה המעריכית וכיצד מחשבים את הנגזרת שלה.

(13) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 \quad \text{ב. } f(x) = e^{x^2 - 3x} + ex$$

(14) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = xe^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(15) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(16) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(17) הסבר מהי הפונקציה הלוגריתמית וכיצד מחשבים את הנגזרת שלה.

(18) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2 - 3x) \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{ד. } f(x) = \ln(e^x + 1)$$

(19) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = x \ln x \quad \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x}$$

(20) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \ln^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 3 \ln^2 x \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$$

(21) הסבר כיצד גוזרים פונקציה עם פרמטר וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx \quad \text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

(22) הסבר כיצד גוזרים פונקציה מן הצורה $f(x) = h(x)^{g(x)}$

(23) גזור את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = (x+1)^{e^x} \quad (3) \quad f(x) = x^{\frac{x}{2}} \quad (2) \quad f(x) = x^{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad (5) \quad f(x) = (\ln x)^{4x} \quad (4)$$

(24) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$. ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשב $g'(100)$.

(25) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$. ידוע כי $f'(1) = 4$, $f(1) = 1$. חשב $g'(1)$.

(26) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$. ידוע כי $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$. חשב $g'(1)$.

(27) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$. ידוע כי $f'(4) = 2$, $f(4) = 1$. חשב $g'(1)$.

(28) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$. ידוע כי $f'(1) = 4$, $f(1) = 1$. חשב $g'(1)$.

פרק 4 – המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת (בעיות משיקים)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(8) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שלפרבולות $y = -x^2 + 2x - 1$, $y = x^2 + k$

יהיה משיק משותף. מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

$$\text{א) } y = x^2 - 2x + 1 \quad \text{ב) } y = \sqrt{x} \quad (-3, 1)$$

1. לגרף הפונקציה $f(x) = x^{x^2}$ העבירו משיק בנקודה $x = 1$. מהו שיפוע המשיק?

2. לגרף הפונקציה $f(x) = x^{\frac{x}{2}}$ העבירו משיק בנקודה $x = 2$. מהו שיפוע המשיק?

3. לגרף הפונקציה $f(x) = (x+1)^{e^x}$ העבירו משיק בנקודה $x = 0$. מהו שיפוע המשיק?

4. א. לגרף הפונקציה $f(x) = (\ln x)^{4x}$ העבירו משיק בנקודה $x = e$. מהו שיפוע המשיק?

ב. מהי משוואת המשיק הנ"ל?

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^{ax}$ נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 2

מצא את הקבוע a .

6. נתונה הפונקציה $f(x) = (x+1-k)^{\sqrt{x}}$ (k קבוע).

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = k$ הוא \sqrt{e} . מצא את הקבוע k .

פרק 5 – כלל לופיטל

(1) הסבר מהו כלל לופיטל וכיצד מחשבים בעזרתו גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x + 3}{x - 3} \right) \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x - 2} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x - 1}} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (32)$$

(33) נתון כי $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 2} = 4$. מצא את הקבועים a ו- b .

(34) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$. מצא את הקבועים a ו- b .

(35) נתון כי $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2e^{a+2x} + bx}{1 - x^2} = 3e$. מצא את הקבועים a ו- b .

פרק 6 – חקירת פונקציה-הכל כולל הכל

הערה: תרגילים המסומנים בכחול מכילים הסבר תיאורטי. בסוף הקובץ סיכום.

חקירת פונקציית פולינום*

1. הגדר את המושג נקודת קיצון. התייחס בתשובתך להבדל בין קיצון מקומי לקיצון מוחלט.

2. הסבר כיצד מוצאים נקודת קיצון ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה

$$f(x) = 10x - x^2$$

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה:

$$3. f(x) = x^3 - 12x \quad 4. f(x) = x^4 - 10x^2 + 9 \quad 5. f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$$

6. לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

מצא את ערכו של הפרמטר a .

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות ענה על הסעיפים הבאים:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$7. f(x) = 10x - x^2 \quad 8. f(x) = x^3 - 12x \quad 9. f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

$$10. f(x) = x^4 - 4x^3 + 32 \quad 11. f(x) = x^3$$

12. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

א. לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות

קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , שרטוט.

* פולינום הוא פונקצייה שצורתה $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots + Kx^n$

חקירת פונקציית מנה ופונקציית שורש

13. הסבר כיצד מוצאים תחום הגדרה לפונקציית מנה ולפונקציית שורש ומצא את תחום

ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{2x}{x-3} \quad \text{ג.} \quad f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ב.} \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x^2+1} \quad \text{ז.} \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} \quad \text{ו.} \quad f(x) = \frac{x^2}{x^3-4x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{5x^3+4x}{x^2-1} \quad \text{ד.}$$

14. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} \quad \text{ז.} \quad f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ג.} \quad f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}} \quad \text{ז.} \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}} \quad \text{ו.} \quad f(x) = \sqrt{x^2+3x-10} \quad \text{ה.}$$

$$15. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{6x}{x^2-10x+9}$$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

16. הסבר את המושג אסימפטוטה לגרף של פונקציה.

$$17. \text{ הדגם את המושג אסימפטוטה לגרף פונקציה על הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x}$$

18. הבא הגדרה פורמלית למושג אסימפטוטה לגרף פונקציה.

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציות הבאות:

19. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

20. $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

21. $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

22. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

23. $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

24. $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

25. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

26. $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

28. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

29. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

30. $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

31. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

32. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

33. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

34. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

35. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

36. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

37. הסבר והדגם את המושג נקודת פיתול של פונקציה.

מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציות:

$$38. y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 \quad 39. y = \frac{3x-2}{x^2} \quad 40. y = \frac{2x}{\sqrt{x-1}} \quad 41. y = x(x-2)^3$$

$$42. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2+b}$$$

הנקודה $(-1,1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

$$43. f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \quad 44. f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$$

חקירת פונקציה מעריכית

45. הסבר מהי פונקציה מעריכית ומצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$א. f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad ב. f(x) = \frac{3}{e^x-1} \quad ג. f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad ד. f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$$

$$ה. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ו. f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \quad ז. f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

$$46. f(x) = x^2 e^x \quad 47. f(x) = \frac{e^x}{x-2} \quad 48. f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{e^{\sqrt{x-2}}}$$

$$49. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$$$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x=1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת

נקודות הקיצון של הפונקציה.

50. נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

51. הסבר כיצד למצוא אסימפטוטות לפונקציה מעריכית.

מצא את האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

$$52. f(x) = e^{2x} + e^x \quad 53. f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \quad 54. f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1} \quad 55. f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$$

$$56. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad 57. f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6} \quad 58. f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad 59. f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$$

$$60. f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e} \quad 61. f(x) = (x-3)e^x \quad 62. f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

63. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$

לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $(1, 2/e)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת

נקודת

הפיתול השנייה של הפונקציה.

64. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים

הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

65. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. סמן על גבי השרטוט את ערכי ה- x של נקודות הפיתול.

66. נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. עבור אילו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

67. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

חקירת פונקציה לוגריתמית

68. הסבר מהי פונקציה לוגריתמית ומצא את תחום הגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$ ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$

ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$ ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

69. $f(x) = x^2 \ln x$ 70. $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ 71. $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$

72. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון

של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

73. הסבר כיצד מוצאים אסימפטוטות לפונקציה לוגריתמית.

מצא את האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

74. $f(x) = \ln(x-3)$

75. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

76. $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$

77. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$

78. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

79. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$

80. $f(x) = x \ln x + 2$

81. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

82. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

83. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט. ט. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות?

חקירת פונקציה לא גזירה

חקור חקירה מלאה (תחום הגדרה ורציפות, חיתוך עם הצירים, זוגיות, אסימפטוטות, קיצון, עלייה וירידה, פיתול, קמירות וקעירות, גרף) את הפונקציות הבאות:

84. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$

85. $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$

86. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

תרגילים – פרק 7

גזירות של פונקציה-הגדרת הנגזרת

- (1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
- ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. האם הפונקציה רציפה?
- ב. בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = 1$.

(4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר.

עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad (\text{א})$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את $f'(0)$ עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left(z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \text{נתון} \right) f(x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

(7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף (4) גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):

א. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ד. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

פתרונות – פרק 7

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a=1$ (2) לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a=3/e$, $b=-2$ (ב) $a=e$, $b=0$.

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.

תרגילים – פרק 8

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

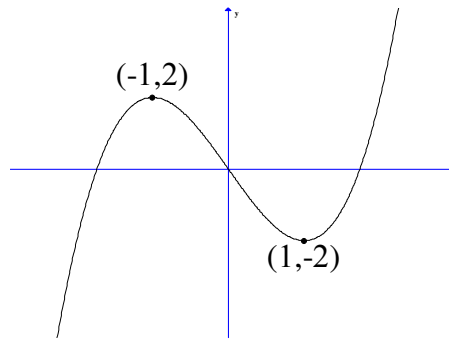
הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$ ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפי גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- מצא את התחומים בהם הפונקציה היא חח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

פתרונות – פרק 8

(1)

$$a = -\frac{1}{3} \quad (\text{ג}) \quad b = 6, a = -4 \quad (\text{ב}) \quad a = -\frac{2}{3} \quad (\text{א})$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (\text{ו}) \quad a = 1 \quad (\text{ה}) \quad b = 3, a = -1 \quad (\text{ד})$$

$$a = -7 \quad (\text{ט}) \quad a = 0.5 \quad (\text{ח}) \quad a = 8 \quad (\text{ז})$$

(2)

$$3 \quad (\text{ג}) \quad 2 \quad (\text{ב}) \quad 1 \quad (\text{א})$$

$$-2 < k < 2 \quad (\text{ו}) \quad k = \pm 2 \quad (\text{ה}) \quad k < -2 \text{ או } k > 2 \quad (\text{ד})$$

$$-1 < x < 1 \text{ או } x < -1 \quad (\text{ח}) \quad \text{לא} \quad (\text{ז}) \\ \text{או } x > 1$$

תרגילים – פרק 9

פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון

רפסון

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד:

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4) \quad x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (4) \quad \ln(x+5) - 4 = x \quad (3) \quad \arctan x - x = 0 \quad (2) \quad e^{x-1} = x \quad (1)$$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2, f'(x) \leq 1$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (3) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (4) \quad x + a \cos(bx) = 1 \quad (3)$$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון):

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (2) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (1)$$

פתרונות – פרק 9

(2) פתרון יחיד. (3) $x = 1$ (1) $x = 0$ (2) $x = 0$ (3) $x = -4$ (4) $x = 0$.

$$\frac{1}{ab} < -1 \text{ או } \frac{1}{ab} > 1 \quad (3) \quad 4b^2 - 12ac < 0 \quad (2) \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (1) \quad (6)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (4)$$

(7) פתרון מדויק $x = -1$. (2) פתרונות מקורבים $x = 0.5576, x = 1.9672$.

(3) פתרון מקורב $x = 0.8459$

תרגילים – פרק 10**משפט לגרנג'**

(1) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (3)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{a \operatorname{rcsinh}(b) - a \operatorname{rcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < a \operatorname{rc tanh}(b) - \operatorname{arc tanh}(b) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

(2) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < a \operatorname{rcsinh}(x) < x \quad (4) \quad (0 < x < 1) \quad x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6) \quad (0 < x < 1) \quad x < a \operatorname{rc tanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \quad \sin x \leq x \quad (8) \quad (x > 0) \quad 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(0 < x < 1) \quad \arctan x > \ln(1+x) \quad (*10) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \quad \tan x < 4x \quad (9)$$

(3) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (1)$$

$$|\tan y - \tan x| \leq 8 |\sin x - \sin y| \quad (4) \quad |\arctan y - \arctan x| < |y - x| \quad (3)$$

(4) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2) \quad \frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad \frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

(5) א. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$. הוכח כי $f(2) = 8$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$. הוכח כי $4 \leq f(2) \leq 10$.

* תרגיל 2 סעיף 10 ותרגיל 3 סעיף 4 עוסקים במשפט קושי שהוא הכללה של משפט לגרנג',

ולפיכך רלוונטיים רק אם למדת משפט זה.