

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תוכן עניינים

4.....	פרק 1 – חזרה אלגברית.....
4	חזקות ומשוואות מעריכיות
5	לוגריתמים.....
8.....	פרק 2 – פונקציות
8	פונקציות.....
8	הרכבת פונקציות
10.....	פרק 3 – גבולות.....
10.....	הסבר כללי
10.....	חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה.....
10.....	חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום
11.....	חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד.....
11.....	חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף
13.....	חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף.....
14.....	חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה
16.....	פרק 4 – חישוב נגזרת של פונקציה.....
16.....	כללי הגזירה
18.....	נגזרת של פונקציה רציונלית
19.....	נגזרת של פונקציה מעריכית.....
20.....	נגזרת של פונקציה לוגריתמית
21.....	נגזרת של פונקציה x בחזקת פונקציה של x
23.....	פרק 5 – בעיות משיקים
24.....	פרק 6 – כלל לופיטל.....
24.....	כלל לופיטל – $0/0$
25.....	כלל לופיטל – $0 \cdot \infty$
26.....	כלל לופיטל – $\infty - \infty$
27.....	פרק 7 – חקירת פונקציה.....
27.....	מבוא לחקירת פונקציה.....
27.....	חקירת פולינום
28.....	חקירת פונקציה רציונלית.....
30.....	חקירת פונקציה מעריכית
32.....	חקירת פונקציה לוגריתמית.....
34.....	פרק 8 – אינטגרלים.....
34.....	אינטגרלים לא מסוימים
35.....	אינטגרלים בשיטת ההצבה.....
36.....	אינטגרלים של פונקציות רציונלית.....

36.....	האינטגרל המסוים
37.....	אינטגרציה בחלקים
38.....	פרק 9 – פונקציות של שני משתנים
38.....	קיצון של פונקציה של שני משתנים
39.....	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג')
41.....	פרק 10 – מטריצות
41.....	הגדרות
43.....	כלל קרמר

פרק 1 – חזרה אלגברית

חזקות ומשוואות מעריכיות

1. בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.

2. חשב ללא מחשבון:

ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$

ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$

ד. $2^3 + 2^5$

3. פתור את התרגילים הבאים:

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$

4. פתור את התרגילים הבאים:

ב. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

א. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$

5. בסרטון זה הסבר על חוקי השורשים.

6. חשב ללא מחשבון: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

7. בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.

פתור את המשוואות הבאות:

ב. $2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$

א. $3^{5x-3} = 3^{3x+7}$

פתור את המשוואות הבאות:

9. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

8. $(25 \cdot 0.2^{2x}) = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

$$e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad .10$$

.11 **בסרטון זה הסבר משוואות עם חיבור וחסור.**

פתור את המשוואות הבאות:

ב. $e^x + 2e^x = 3e^4$

א. $2^x + 2^x = 16$

.12 פתור את המשוואות הבאות:

ב. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

א. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

פתרונות

- (2) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40 (3) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k (4) א. $3\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{x} + x$ (6) $\sqrt{2}$ (7) א. $x=5$
 ב. $x=1$ (8) $x=1$ (9) $x=-\frac{1}{2}$ (10) $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$ (11) א. $x=3$ ב. $x=4$ (12) א. $x=4$ ב. $x=1$

לוגריתמים

.1 בסרטון זה הסבר על לוגריתמים.

.2 בסרטון זה המשך ההסבר על לוגריתמים.

.3 חשב ללא מחשבון:

ג. $\log_{25} 5$

ב. $\log 1000$

א. $\log_2 32$

ו. $\log_a a^4$

ה. $\log_4 \frac{1}{16}$

ד. $\log_8 4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

.4 בסרטון זה הסבר על מהו \ln .

.5 חשב ללא מחשבון:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

6. מצא את ערכו של x :

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$ ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$

ד. $\log_x 64 = 3$ ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

ז. $\ln x = 2$ ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

7. בסרטון זה הסבר על חוקי הלוגריתמים.

8. חשב ללא מחשבון:

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ ב. $2 \log 2 + \log 25$ ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3 \log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$

9. חשב ללא מחשבון:

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$ ג. $e^{\ln 3}$ ד. $e^{2 \ln 3}$

10. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$ ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

11. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$ ב. $\log_5 (25^x - 20) = x$ ג. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

12. פתור את המשוואות הבאות:

א. $2^x = 5$ ב. $5^x = 8$ ג. $e^x = 2$ ד. $e^x = \frac{1}{2}$ ה. $e^x = -1$

פתרונות

- 3 א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2 ו. 4 ז. -1.5 ח. 5 א. 2 ב. -4 ג. -1.5 (6 א. $\frac{1}{2}$
- ב. 65,536 ג. 27 ד. 4 ה. 5 ו. 4 ז. e^2 ח. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (8 א. 2 ב. 2 ג. 3 (9 א. 8 ב. 25
- ג. 3 ד. 9 (10 א. 3 ב. 3 (11 א. ± 3 ב. 1 ג. 0 (12 א. 2.322 ב. 1.292 ג. 0.693
ד. -0.693

פרק 2 – פונקציות

פונקציות

1. בסרטון זה הסבר על הגדרת הפונקציה ופונקציות נפוצות.
2. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של פונקציה.
3. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של פונקצית שורש.
4. בסרטון זה הסבר על הפונקציה המעריכית.
5. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של הפונקציה המעריכית.
6. בסרטון זה הסבר על הפונקציה הלוגריתמית.
7. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של הפונקציה הלוגריתמית.
8. בסרטון זה הסבר על פונקציה מפוצלת.

הרכבת פונקציות

1. בסרטון זה הסבר על הרכבת פונקציות.
2. בסרטון זה הסבר המשך על הרכבת פונקציות.
3. נתונות הפונקציות $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$, $g(x) = e^{4x}$.
פתור את המשוואה $f(g(x)) = 0$.
4. נתונות הפונקציות $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = e^x$.
פתור את המשוואה $g(f(x)) = 5$.
5. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{1-2x}{x+k}$.
באיזה ערך של הקבוע k מתקיים $f(g(x)) = x$.

פתרונות

$$k = -1 \quad (5) \quad x = \pm 2 \quad (4) \quad x = \frac{1}{4} \quad (3)$$

פרק 3 – גבולות

הסבר כללי

- בסרטון זה הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה

- בסרטון זה תוסבר טכניקת הצבה לחישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום

- בסרטון זה תוסבר טכניקת צמצום לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 2x + 3} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .15$$

פתרונות

$$(1) -1 \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) -1.5 \quad (4) \frac{1}{2} \quad (5) \frac{5}{6} \quad (6) \frac{7}{7} \quad (7) \frac{2}{3} \quad (8) \frac{10}{8.5} \quad (9) -\frac{13}{4} \quad (10) 3 \quad (11) 32 \quad (12) \frac{8}{17} \quad (13) n-1$$

(14) 6 (15) 27

חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד

- בסרטון זה תוסבר טכניקת כפל בצמוד לחישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} & .4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & .6 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & .5 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & .8 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} & .7 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} & .10 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} & .9 \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} & .11 \end{array}$$

פתרונות

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) 4 \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) -\frac{1}{12} \quad (5) 1 \quad (6) \frac{2}{3} \quad (7) \frac{3}{8} \quad (8) \frac{1}{6} \quad (9) \frac{3}{4} \quad (10) -\frac{13}{4} \quad (11) \frac{1}{3}$$

חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x & .4 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x & .3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x & .6 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x & .5 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x}} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1} \quad .16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{5x^4 + x^3} \quad .15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad .21$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad .23$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{3x - 1} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 7^x}{-2^x + 7^{x-1}} \quad .31$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .33$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad .40$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad .39$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad .42$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad .41$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x) \quad .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad .43$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x) \quad .46$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x \quad .45$$

פתרונות

0 (13) $-\infty$ (12) 4 (11) 0 (10) 0 (9) 1 (8) 1 (7) ∞ (6) 0 (5) 0 (4) ∞ (3) 0 (2) 0 (1)

-2 (24) $\frac{3}{2}$ (23) -3 (22) -1 (21) 1 (20) $-\frac{1}{3}$ (19) $\frac{2}{5}$ (18) $\frac{1}{2}$ (17) 0 (16) 0 (15) -5 (14)

4 (34) $-\frac{1}{2}$ (33) 1 (32) -10 (31) $\frac{1}{9}$ (30) 4 (29) 0 (28) $\frac{1}{4}$ (27) $-\frac{1}{3}$ (26) $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (25)

$\frac{1}{2}$ (42) $-\frac{1}{2}$ (41) $\frac{1}{2}$ (40) $\frac{k}{2}$ (39) 2.5 (38) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{\frac{a}{b}}, 0, \infty, -\infty$ (37) $\frac{1}{3}$ (36) $\ln 3$ (35)

$-\frac{1}{4}$ (46) ∞ (45) 1 (44) $\frac{a-b}{2}$ (43)

חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 19876^{\frac{1}{x}} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 7^{\frac{1}{x}} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad .8 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad .10 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .12 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .13$$

$$.14 \text{ נתון: מספר סופי } = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x + k}{x^2 - 4} \text{ חשב את } k \text{ ואת ערך הגבול.}$$

פתרונות

(1 ∞ (2 0 (3 ∞ (4 ∞ (5 ∞ (6 לא קיים גבול (7 ∞ (8 ∞ (9 ∞ (10 לא קיים גבול
 (11 0 (12 1 (13 לא קיים גבול (14 $k = -10$, $\frac{11}{4}$

חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14$

2. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$

3. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$

4. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1}$

5. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$

6. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$.

7. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

8. הוכח על פי הגדרת הגבול כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$.

פתרונות

$$\delta = \min\{1, 10\varepsilon\} \quad (4) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad (3) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} \quad (2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{7} \quad (1)$$

$$\delta = \left| \frac{1}{M} \right|, \quad \frac{1}{x^2-1} < M \quad (7) \quad \delta = \varepsilon \quad (6) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} \quad (5)$$

פרק 4 – חישוב נגזרת של פונקציה

כללי הגזירה

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של סכום והפרש

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה מורכבת

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 & \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 & \text{ג.} & f(x) = 3(x-x^2)^2 \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} & \text{ה.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \end{array}$$

$\frac{1}{x}$ בסרטון זה הסבר על הנגזרת של

6. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ב.} & f(x) = -\frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} & \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \end{array}$$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מכפלה

7. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) & \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)(x-3) & \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מנה

8. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ז.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

פתרונות

(1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$

ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ (3) א. 0 ב. 0 (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$

(5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$

ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$ (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+3)^2}$ (7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$ (8) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$

נגזרת של פונקציה רציונלית

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \right)$

2. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \right)$

3. $f(x) = \left(\frac{2x^2}{(x+1)^2} \right)$

4. $f(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right)$

5. $f(x) = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} \right)$

6. $f(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \right)$

פתרונות

(1) (2) $\frac{4}{x^3}$ (3) $\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$ (4) $\frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3}$ (5) $\frac{6x}{(x+1)^4}$ (6) $\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^3}$

נגזרת של פונקציה מעריכית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה מעריכית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = 2^{3x}$ ד. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)$.

6. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$.

7. גזור את הפונקציה $f(x) = \left(x \cdot e^{-2x^2}\right)$.

פתרונות

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$ (2) א. $e^x(1+x)$ ב. $2x \cdot e^{4x}(1+2x)$ (3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$

$$e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4} \right) \quad (5) \quad \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}} \quad \text{ב.} \quad 30e^{2x} (e^{2x} - 1)^2 \quad \text{א.} \quad (4) \quad \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{ב.}$$

$$-4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (7) \quad e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4} \right) \quad (6)$$

נגזרת של פונקציה לוגריתמית

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה לוגריתמית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x) \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) \quad \text{ד.} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \log_2(x) + 5\log_3(2x-1) \quad \text{ה.}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad \text{ב.} \quad f(x) = x \ln x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x + x} \quad \text{ה.}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 3\ln^2 x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \ln^3 x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2} \quad \text{ד.} \quad f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad \text{גזור פעמיים את הפונקציה} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{גזור פעמיים את הפונקציה} \quad \text{ב.}$$

6. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = (x \cdot \ln x)$.

7. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = (x^2 \ln x)$.

8. גזור שלוש פעמים את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ ($x < 2$).

9. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 32)$.

10. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = ((\ln x)^2 + (\ln x)^{-2})$.

פתרונות

(1) א. $\frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ ב. $\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$ ד. $\frac{e^x}{e^x+1}$

ה. $\frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$ (2) א. $\ln x + 1$ ב. $(3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$ ג. $\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $\frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$ ה. $\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$ (3) א. $\frac{3 \ln^2 x}{x}$ ב. $\frac{6 \ln x}{x}$ ג. $2x \ln x (\ln x + 1)$

ד. $\frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ (4) $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ (5) $\frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}}$ (6) $\frac{1}{x}$ (7) $2 \ln x + 3$

(8) (9) $\frac{2}{(4-2x)^2}$ (10) $-\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$

נגזרת של פונקצית x בחזקת פונקציה של x

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של x בחזקת פונקציה של x

גזור את הפונקציות הבאות:

1. $y = x^{x^2}$ 2. $y = x^{\frac{x}{2}}$

3. $y = (x+1)e^x$ 4. $y = (\ln x)^{4x}$

$$y = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad .6$$

$$y = x^{ax} \quad .5$$

פתרונות

$$y' = e^x (x+1)^{e^x} \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] \quad \text{(3)} \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} [\ln x + 1] \quad \text{(2)} \quad y' = x^{x^2} [2x \cdot \ln x + x] \quad \text{(1)}$$

$$y' = ax^{ax} [\ln x + 1] \quad \text{(5)} \quad y' = 4(\ln x)^{4x} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \quad \text{(4)}$$

$$y' = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x+1-k) + \frac{1}{x+1-k} \cdot \sqrt{x} \right] \quad \text{(6)}$$

פרק 5 – בעיות משיקים

• בסרטון זה הסבר על נוסחת המשיק.

1. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה $x_1 = 1$.

2. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - x + 2}}$ בנקודה $x_1 = 2$.

3. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

4. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

5. נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$. לפונקציה העבירו משיק בנקודה שבה $x = 2$. מצא את משוואת המשיק.

6. לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

7. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ בנקודה $x = 1$.

8. לפונקציה $y = x^x$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = 1$. מצא את משוואת המשיק.

9. לפונקציה $y = x^{\ln x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e$. מצא את משוואת המשיק.

10. לפונקציה $y = (\ln x)^x$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e$. מצא את משוואת המשיק.

פתרונות

(1) $y = -12x + 9$ (2) $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$ (3) $y = \frac{1}{e}$ (4) $y = 1$ (5) $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(6) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$ (7) $y = (\ln 2 + 1)x - 1$ (8) $y = x$ (9) $y = 2x - e$ (10) $y = x - e + 1$

פרק 6 – כלל לופיטל

כלל לופיטל – 0/0

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\frac{0}{0}$.

מצא את הגבולות הבאים:

- | | |
|---|---|
| <p>2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^5 - 50}{2x^2 + 3x - 35}$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$</p> <p>12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3}$</p> <p>14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$</p> <p>16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2}$</p> <p>18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$</p> <p>20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x}$</p> <p>22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{20}}{e^x}$</p> | <p>1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1}$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4}$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2-1} - \sqrt{x}}{x-1}$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$</p> <p>11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$</p> <p>13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$</p> <p>15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x}$</p> <p>17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3}$</p> <p>19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x}$</p> <p>21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^x}$</p> |
|---|---|

23. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 2} = 4$ מצא את הקבועים a ו- b .

24. נתון כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$ מצא את הקבועים a ו- b .

25. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2e^{a+2x} + bx}{1 - x^2} = 3e$ מצא את הקבועים a ו- b .

פתרונות

- (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{20}{17}$ (3) $n-1$ (4) 4 (5) $\frac{1}{6}$ (6) $\frac{3}{2}$ (7) $\frac{5}{6}$ (8) $-\frac{3}{2}$ (9) 1 (10) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (11) $\frac{1}{2}$ (12) $\frac{1}{6}$ (13) 0
- (14) $-\frac{1}{2}$ (15) 2 (16) 1 (17) 2 (18) $\frac{1}{2}$ (19) $-\infty$ (20) 0 (21) 0 (22) 0
- (23) $a = 1.5, b = 4$ (24) $a = 12, b = -32$ (25) $a = 3 + \ln\frac{6}{5}, b = \frac{6}{5}e$

כלל לופיטל – $0 \cdot \infty$

• בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $0 \cdot \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

5. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3)$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right]$

פתרונות

- (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) 0 (7) $\frac{5}{2}$

כלל לופיטל - $\infty - \infty$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\infty - \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad .3$$

פתרונות

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

פרק 7 – חקירת פונקציה

מבוא לחקירת פונקציה

1. בסרטון זה הסבר על נקודות קיצון.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות קיצון.
3. בסרטון זה הסבר על נקודות פיתול.
4. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות פיתול.
5. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה אנכית.
6. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה משופעת.

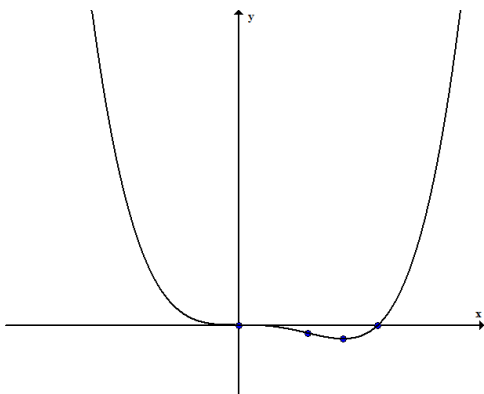
חקירת פולינום

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x(x-9)^2$.
2. חקור את הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^3$.

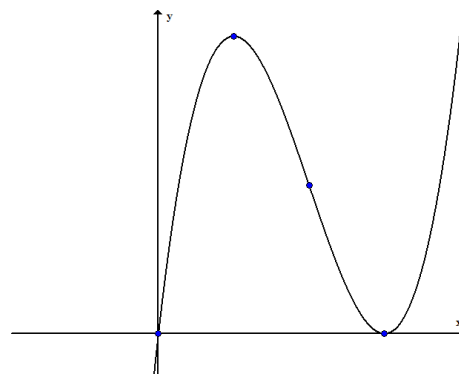
פתרונות

- (1) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(9,0)$, נקודות קיצון: $max(3,108)$, $min(9,0)$, תחומי עליה: $x < 3$ או $x > 9$, תחום ירידה: $3 < x < 9$, נקודת פיתול: $(6,54)$, תחום קמירות: $x > 6$, תחום קעירות: $x < 6$. (2) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(2,0)$, נקודות קיצון: $min\left(1.5, -\frac{27}{16}\right)$, תחום עליה: $x > 1.5$, תחום ירידה: $x < 1.5$, נקודות פיתול: $(0,0)$, $(1,-1)$, תחומי קמירות: $x > 1$ או $x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < 1$.

(2)



(1)



חקירת פונקציה רציונלית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$.

6. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$.

פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(2, 0.25)$, תחום עליה: $0 < x < 2$,

תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2$, נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x > 3$,

תחום קעירות: $x < 0$ או $0 < x < 3$. (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=2$, נקודת קיצון:

$\min(0,0)$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 0$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$, נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$,

תחום קמירות: $x < -1$ או $-1 < x < \frac{1}{2}$, תחום קעירות: $x > \frac{1}{2}$.

(3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 2$, זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x = \pm 2$, $y = x$, נקודת קיצון: $\max(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, $\min(\sqrt{12}, \sqrt{27})$, תחום עליה:

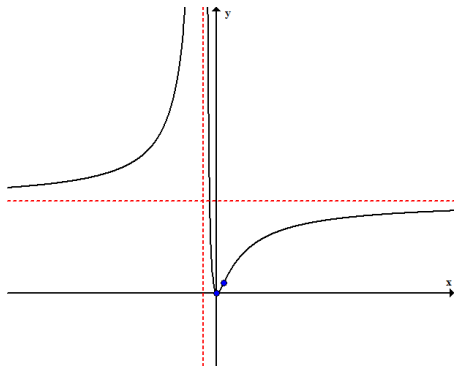
$x < -\sqrt{12}$ או $x > \sqrt{12}$, תחום ירידה: $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$, נקודת פיתול: $(0,0)$,

תחום קמירות: $-2 < x < 0$ או $x > 2$, תחום קעירות: $x < -2$ או $0 < x < 2$.

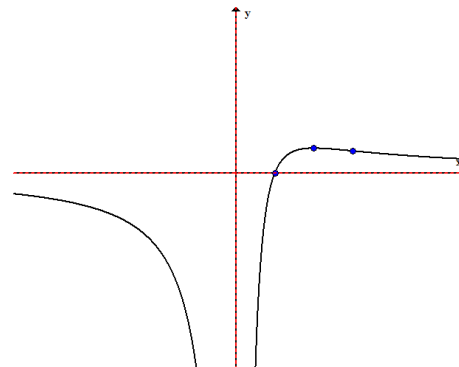
(4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=x-2$,

נקודת קיצון: $\max\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$, תחום עליה: $x < -3$ או $x > -1$, תחום ירידה: $-3 < x < -1$,
 נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $x > 0$, תחום קעירות: $x < -1$ או $-1 < x < 0$.
 (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-1,0), (0,-1)$, אסימפטוטות: $x=1, y=1$, אין נקודות קיצון, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $(-1,0), \left(-3, \frac{1}{8}\right)$, תחום קמירות: $-3 < x < -1$ ו- $x > 1$, תחום קעירות: $x < -3$ או $-1 < x < 1$.
 (6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 1$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, חור בנקודה $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, נקודת קיצון: $\min(0,0), \max(-2,-4)$, תחום עליה: $x < -2$ או $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $-2 < x < -1$ או $-1 < x < 0$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: $-1 < x < 1$ או $x > 1$, תחום קעירות: $x < -1$.

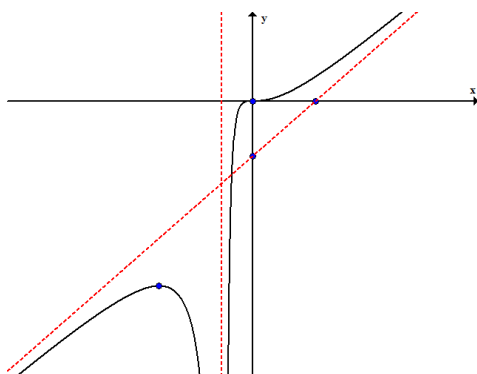
(2)



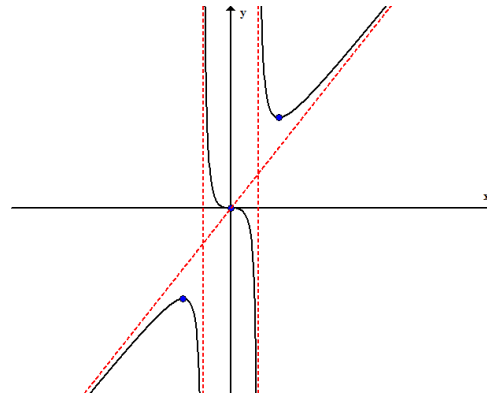
(1)



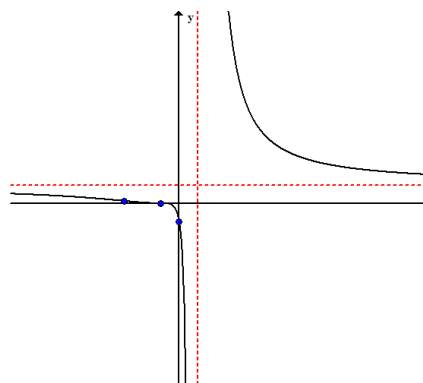
(4)



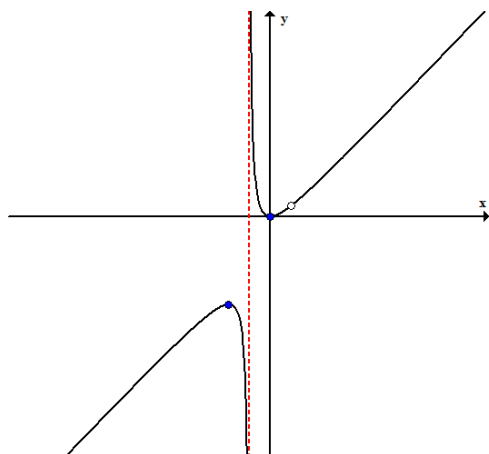
(3)



(5)



(6)



חקירת פונקציה מעריכית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x - e^x$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = xe^{-2x^2}$.

פתרונות

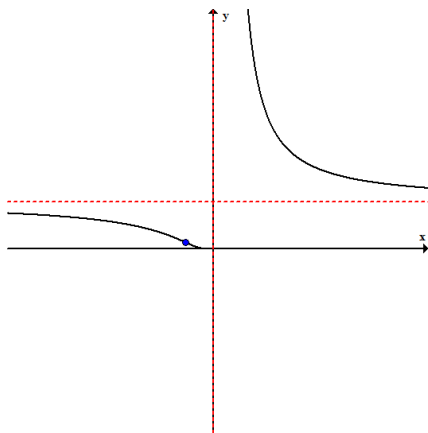
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, -1)$, אסימפטוטות: $y = x$, נקודת קיצון: $\max(0, -1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, אין נקודות פיתול, תחום קעירות: כל x .

(2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: אין, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 1$, נקודת קיצון: אין, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$, תחום קמירות: $-0.5 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.

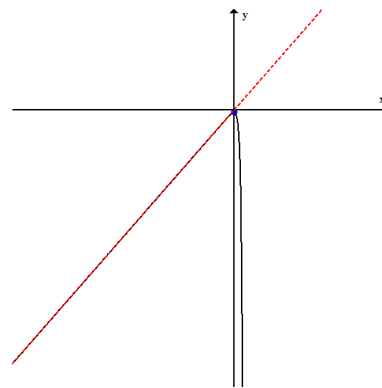
(3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-2, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = x + 3$, נקודת קיצון: $\max(-1, e^{-1})$, $\min(2, 4e^{1/2})$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 2$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 2$, נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.

תחום קמירות: $-0.4 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
 (4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות:
 $y=0$, נקודת קיצון: $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$
 תחום עליה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, תחום ירידה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > \frac{1}{2}$
 נקודת פיתול: $(0,0), (-\sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}e^{-3/2}), (\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}e^{-3/2})$
 תחום קמירות: $-\sqrt{3/4} < x < 0$ או $x > \sqrt{3/4}$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{3/4}$ או $x < -\sqrt{3/4}$.

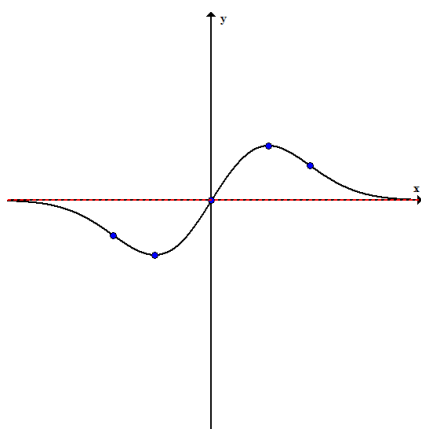
(2)



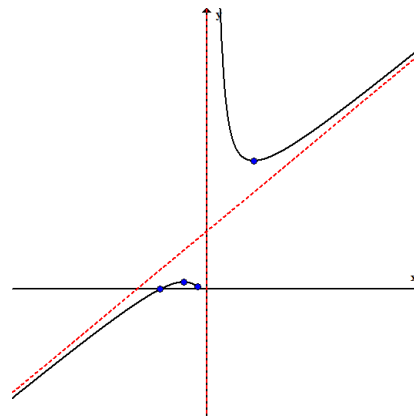
(1)



(4)



(3)



חקירת פונקציה לוגריתמית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = x \ln x$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$.

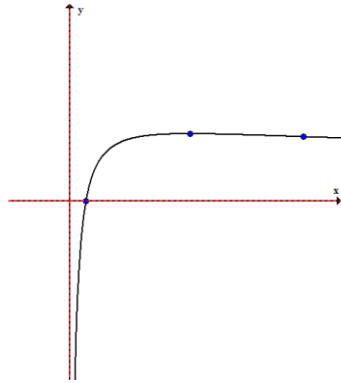
6. חקור את הפונקציה $f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3$.

פתרונות

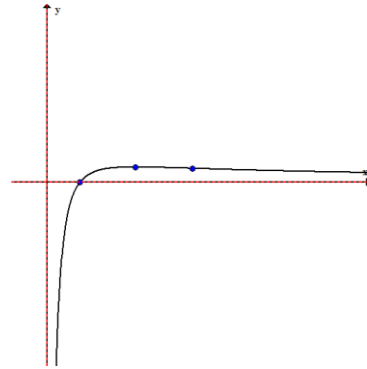
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e, 1/e)$, תחום עליה: $0 < x < e$, תחום ירידה: $x > e$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, (3/2)/e^{3/2})$, תחום קעירות: $0 < x < e^{3/2}$, תחום קמירות: $x > e^{3/2}$ (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e^2, 2/e)$, תחום עליה: $0 < x < e^2$, תחום ירידה: $x > e^2$, נקודת פיתול: $(e^{8/3}, \frac{8/3}{\sqrt{e^{8/3}}})$, תחום קמירות: $0 < x < e^{8/3}$, תחום קעירות: $x > e^{8/3}$ (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x < 2$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(0, -\frac{1}{2} \ln 2)$, אסימפטוטות: $x=2$, אין נקודות קיצון, תחום עליה: כל x , אין נקודות פיתול. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: חור בנקודה $(0,0)$, נקודת קיצון: $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, תחום עליה: $x > \frac{1}{e}$, תחום ירידה: $0 < x < \frac{1}{e}$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: כל x . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e,0)$, $(e^{-3},0)$, אסימפטוטות: $x=0$, נקודת קיצון: $\min(e^{-1}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{-1}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{-1}$, נקודת פיתול: $(1,-3)$, תחום קעירות: $x > 1$, תחום קמירות: $0 < x < 1$

(6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e^{1.5}, 0), (e^{-0.5}, 0)$, אסימפטוטות: $x=0$, נקודת קיצון: $\min(e^{1/2}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{1/2}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{1/2}$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, 0)$, תחום קעירות: $x > 3/2$, תחום קמירות: $0 < x < 3/2$

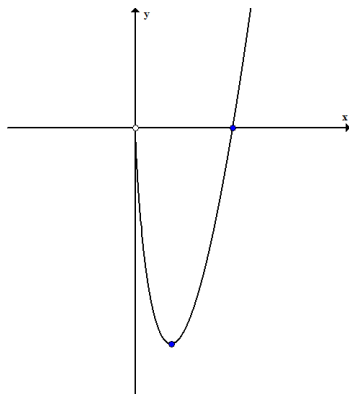
(2)



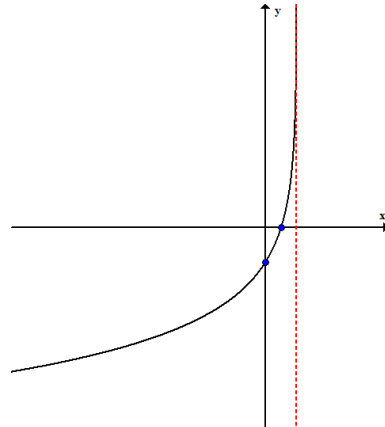
(1)



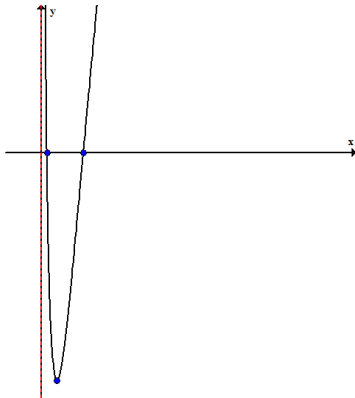
(4)



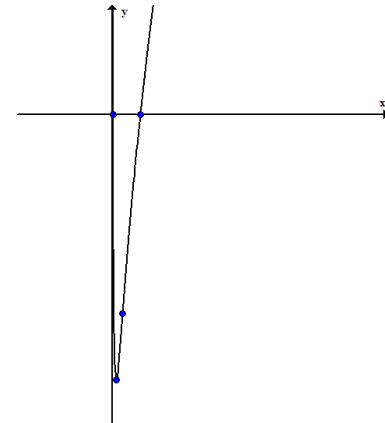
(3)



(6)



(5)



פרק 8 – אינטגרלים

אינטגרלים לא מסוימים

• בסרטון זה הסבר על אינטגרלים לא מסוימים.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int 4dx \quad .1 \qquad \int x^4 dx \quad .2 \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad .3$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad .4 \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad .5 \qquad \int 4x^{10} dx \quad .6$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad .7 \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad .8 \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad .9$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad .10 \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad .11 \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad .12$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad .13 \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad .14 \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad .15$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad .16 \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad .17 \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad .18$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad .19 \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad .20 \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad .21$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad .22 \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad .23 \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad .24$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad .25 \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad .26 \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad .27$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad .28 \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad .29 \qquad \int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad .30$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad .31$$

פתרונות

$$\begin{aligned}
 & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \quad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) \quad -\frac{1}{x} + c \quad (3) \quad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \quad 4x + c \quad (1) \\
 & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \quad -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) \\
 & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \quad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) \\
 & \frac{3}{16} \cdot \sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) \quad -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \quad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{11}}{11} + c \quad (13) \\
 & -\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + c \quad (19) \quad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) \quad 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \\
 & (24) \quad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) \quad \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|x| + c \quad (21) \quad \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) \\
 & 4\left[x - 1.75\ln|x+2| \right] + c \quad (26) \quad x + \ln|x+2| + c \quad (25) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|4x-1| + c \\
 & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln(2/5)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln(16/5)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (29) \quad \frac{1}{2}e^{2x+2} + c \quad (28) \quad \frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c \quad (27) \\
 & -\left[x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] + c \quad (31) \quad 8e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}x} + c \quad (30)
 \end{aligned}$$

אינטגרלים בשיטת ההצבה

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad .3 \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad .2 \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad .1 \\
 & \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad .6 \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad .5 \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad .4 \\
 & \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad .8 \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad .7
 \end{aligned}$$

פתרונות

$$2 \left[\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right] + c \quad (3) \quad \frac{2}{3} \left[\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3+4} \right] + c \quad (2) \quad \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + c \quad (1)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (6) \quad \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (5) \quad \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad -\frac{1}{4} \left[\frac{(1-x^4)^{-1}}{-1} - \ln|1-x^4| \right] + c \quad (7)$$

אינטגרלים של פונקציות רציונלית

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad .3 \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad .2 \quad \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad .1$$
$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad .5 \quad \int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad .4$$

פתרונות

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3) \quad -\frac{1}{3(x-1)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2) \quad \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5) \quad \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5} \ln|x+5| + c \quad (4)$$

האינטגרל המסוים

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad .ג \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad .ב \quad \int_1^4 (x^2-4x+1) dx \quad .א$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad \text{ד.}$$

פתרונות

$$(1) \text{ א. } -\frac{18}{3} \quad \text{ב. } \ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{ג. } -2e^{-1} + 1 \quad \text{ד. } \frac{1}{5}$$

אינטגרציה בחלקים
חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad .3$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad .2$$

$$\int x e^x dx \quad .1$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad .6$$

$$\int \ln x dx \quad .5$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad .4$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 9 – פונקציות של שני משתנים

קיצון של פונקציה של שני משתנים

1. נתונה הפונקציה $f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
2. נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
3. נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
4. נתונה הפונקציה $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
5. נתונה הפונקציה $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
6. נתונה הפונקציה $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
7. נתונה הפונקציה $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy}$. מצא נקודות קיצון וקבע את סוגן.
8. מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את מימדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
9. יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות מחשבון בארץ היא 6\$, ועלות מחשבון בסין היא 8\$. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:
$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$
$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- 1) אוכף: $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, מינימום: $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ (2) מינימום: $(1, 2)$, אוכף: $(-1, 2)$, אוכף: $(1, -2)$,
מקסימום: $(-1, -2)$ (3) אוכף: $(0, 0)$, מינימום: $(1, 1)$ (4) מקסימום: $(1, 0)$, אוכף: $(1, 1)$,
אוכף: $(1, -1)$, אוכף: $(-1, 0)$, מינימום: $(-1, 1)$, מינימום: $(-1, -1)$ (5) מקסימום: $(0, 2)$,
 $y_z(0, 2, 0) = \frac{1}{2e^4}$ (6) מקסימום: $(4, 4)$ (7) מקסימום: $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ (8) $x = 4, y = 4, z = 2$
(9) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, הרווח המקסימלי: $288\$$

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג')

1. מצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ בכפוף לאילוץ $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$.
2. מצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x, y) = x^2 - y^2$ בכפוף לאילוץ $x^2 + y^2 = 1$.
3. מצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x, y) = 4x + 6y$ בכפוף לאילוץ $x^2 + y^2 = 13$.
4. מצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x, y) = x^2 y$ בכפוף לאילוץ $x^2 + 2y^2 = 6$.
5. לפניך בעיית קיצון: $\max\{x \cdot y\}$ s.t. $x + 3y = 12$ $x, y > 0$
 - א. פתור את הבעיה – פתרון אלגברי.
 - ב. פתור את הבעיה – פתרון גרפי.
6. לפניך בעיית קיצון: $\max\{2x + y\}$ s.t. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$ $x, y \geq 0$
 - א. פתור את הבעיה – פתרון אלגברי.
 - ב. פתור את הבעיה – פתרון גרפי.
7. מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלית.
8. מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) היא $u(x, y) = \ln x + \ln y$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ₪. מחיר ק"ג עגבניות 2 ₪.
מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

9. דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי

$$u(x, y) = xy$$

לדני תקציב של 12 ₪.

נסח ופתור את בעיית דני.

10. עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה המביא למקסימום את התועלת

שלו מצריכת מנגו ואננס.

נסח ופתור את הבעיה.

11. ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$.

המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה (K^*, L^*) והוא

מחפש את הצירוף y המביא למינימום את העלות.

נסח את בעיית היצרן.

פתרונות

(1) מינימום: $B\left(-\sqrt{\frac{1}{7}}, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right), \frac{1}{7} \left(\sqrt{-}, \sqrt{-}\right)$ מקסימום: $D(-1, 1), C(1, -1)$

(2) מינימום: $A(0, 1), B(0, -1)$, מקסימום: $D(-1, 0), C(1, 0)$ (3) מקסימום: $A(2, 3)$, מינימום:

(4) $B(-2, -3)$ מקסימום: $A(2, 1), B(-2, 1)$, מינימום: $D(-2, -1), C(2, -1)$

(5) א. מקסימום: (6, 2) (6) א. מינימום: (9, 36) (7) (6, 2) (8) $\min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$

(9) $\max(6, 2)$ (10) $\max(2, 3)$ (11) $\min\{2K + L\} \text{ s.t. } \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$

פרק 10 – מטריצות

הגדרות

- בסרטון זה הסבר על מהי מטריצה.
- בסרטון זה הסבר על מטריצות מיוחדות.
- בסרטון זה הסבר על כפל בסקלר וחיבור מטריצות.
- בסרטון זה הסבר על כפל מטריצות.
- בסרטון זה המשך ההסבר על כפל מטריצות.
- בסרטון זה המשך ההסבר על כפל מטריצות.

1. נתון:

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

פתור את התרגילים הבאים:

$$\begin{array}{lll} E + D & (1) & E - D + I_3 & (2) & 5C & (3) \\ 2D + 4EI_3 & (4) & I_2 \cdot B \cdot C & (5) & D \cdot A \cdot B \cdot C & (6) \end{array}$$

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , x ו- b המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"ה המשוואה היחידה $Ax = b$.

$$\begin{array}{ll} 2x + y - z = 3 & \text{א.} \\ x + 2y - 4z = 5 & \text{ב.} \\ x + 4y + z = 2 & \text{ג.} \\ 2x - 3y - z + t = 1 & \text{ד.} \\ 4x + y + 2z = 4 & \text{ה.} \\ x - 4z - 2y = 10 & \text{ו.} \end{array}$$

- בסרטון זה הסבר על מהי מטריצה הופכית.
- בסרטון זה הסבר על מציאת מטריצה הופכית.
- בסרטון זה הסבר על פתרון מערכת משוואות לינאריות בעזרת מטריצה הופכית.

3. מצא את המטריצה ההופכית. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{ב.} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{ג.} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ד.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{ה.} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{ו.} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} .\text{ט} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} .\text{ח} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .\text{ז}$$

פתרונות

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix} .\text{ד} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix} .\text{ה} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} .\text{ו} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} .\text{ז} \quad (1)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} .\text{א} \quad \begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix} .\text{ב} \quad \begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix} .\text{ג}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} .\text{א} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} .\text{ב} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} .\text{ג} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .\text{א} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} .\text{ב} \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} .\text{ג} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} .\text{ד}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .\text{א} \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} .\text{ב} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} .\text{ג}$$

כלל קרמר

1. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \text{ג.} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} & \text{ב.} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{ו.} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{ה.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{ד.} \end{array}$$

2. פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases} & \text{א.} \end{array}$$

פתרונות

1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1 ד. -1 ה. -3 ו. -14 ז. 2 א. $x=1, y=2$ ב. $x=1, y=1, z=2$