

## סטודנטים יקרים

לפניכם חוברת מטלות לדוגמה בקורס חדו"א לכלכלנים באוניברסיטה הפתוחה (10142).

לחוברת פתרונות מלאים המוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי.

את הפתרונות הכין מר גיא סלומון, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת הקורס הנ"ל באו"פ.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין. לצפייה בסרטון הדגמה, היכנסו עכשיו לאתר התרגול של ישראל,

**GooL.co.il**

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול, בשביל התרגול...**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

## לדוגמה

הקורס: 10142 - חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1-2

### שאלה 1 - ישרים וגרפים של פונקציות

נגדיר  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ -1.5x+7 & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

א. שרטט את הגרף של  $f(x)$ .

ב. מצא את הערך של  $f(4)$ ,  $f(2)$  ו-  $f(8)$ .

ג. הגרף של  $h(x) = \frac{6+x}{x}$  פוגש בנקודה אחת את הגרף של  $f(x)$ .

הראה גרפית את המצב המתואר לעיל ומצא את הנקודה בעזרת חישוב מתאים.

### שאלה 2 - פונקציה ריבועית

באיור שלפניך גרף של פונקציה ריבועית

$f(x) = ax^2 + bx + c$ . על הגרף סימנו את

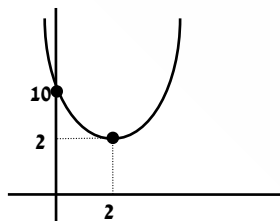
הקדקוד ואת החיתוך עם ציר  $y$ .

א. מצא את  $a, b, c$ .

ב. 1. הישר  $y = x$  חותך את הגרף של  $f(x)$ .

שרטט ומצא את נקודות החיתוך.

2. לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) \leq x$ ? הסתמך רק על הגרף שציירת בסעיף הקודם.



### שאלה 3 - הפונקציה המעריכית וכללי חזקות

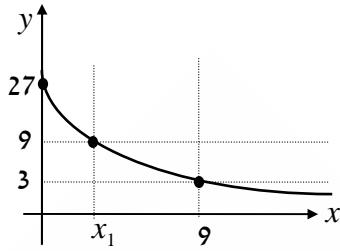
(אין להיעזר בלוגריתמים או במחשבון)

באיור שלפניך גרף הפונקציה  $f(x) = a \cdot b^{-x}$ ,  $x \geq 0$ .

א. מצא את  $a$  ו- $b$ . הצב ב- $f(x)$  ורשום את

הנוסחה ל- $f$  באופן הבא:  $f(x) = a \cdot b^{-x/n}$ .

ב. מצא את  $x_1$ .



### שאלה 4 - הפונקציה הלוגריתמית וכללי לוגריתמוס

(אין להיעזר במחשבון)

באיור שלפניך גרף הפונקציה  $f(x) = \log_3(Ax)$  העובר

בנקודה  $(81, 9)$ .

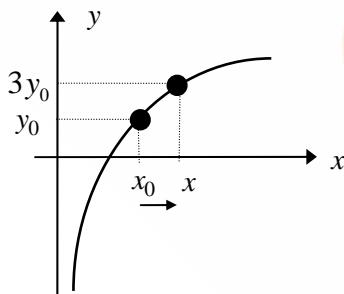
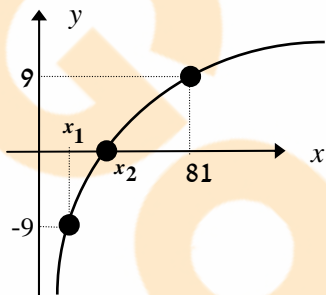
א. מצא את הקבוע  $A$  והצב אותו ב- $f(x)$ .

ב. מצא את  $x_1$ ,  $x_2$ .

ג. הנך נמצא בנקודה  $(x_0, y_0)$ . על מנת להכפיל את

ערך הפונקציה ל- $3y_0$  עליך להגדיל את  $x_0$  ל- $x$ .

בטא את הערך של  $x$  במונחי  $x_0$ .



### שאלה 5 - אחוזים (וקצת כללי חזקות ולוגריתמוס)

דני קנה רכב חדש. עברו 4 שנים והרכב איבד 50% מערכו. עברו שנתיים נוספות וערך הרכב היה

50000 ש"ח. מה היה ערכו ההתחלתי של הרכב?

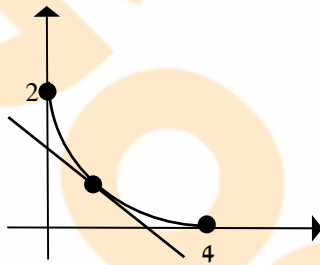
## מטלת מנחה (ממ"ן) 12

### לדוגמה

הקורס: 10142 - חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3-4

#### שאלה 1 - משיק



לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{6}{x+2} - 1$  ברביע הראשון.

הישר  $y = \frac{5}{3} - ax$  משיק לגרף בנקודה המודגשת.

א. מצא את נקודת ההשקה ואת הפרמטר  $a$ .

ב. השלם את גרף הפונקציה לכל  $x \neq -2$ .

ג. על הגרף של הפונקציה יש נקודה בה הישר המשיק יקביל לישר המשיק מסעיף א. מצא נקודה זו, מצא את משוואת המשיק הנ"ל והראה גרפית את המצב המתואר כאן.

#### שאלה 2 - חקירת פונקציה מלאה

נגדיר  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 4)^2$ .

חקור את  $f(x)$  חקירה מלאה לפי הפירוט הבא:

תחומי מונוטוניות, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, גרף.

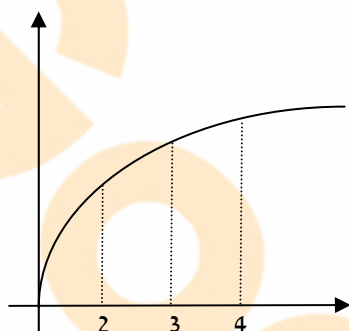
### שאלה 3 - תכונות של פונקציות מונוטוניות

- א. תהיינה  $f(x)$  ;  $g(x)$  פונקציות עולות.  
הוכח, בשתי דרכים שונות, כי הפונקציה  $2f(x) + 3g(x) + 4$  היא פונקציה עולה.  
ב. תהיינה  $f(x)$  ;  $g(x)$  פונקציות יורדות. האם פונקציית המכפלה  $f(x) \cdot g(x)$  היא בהכרח פונקציה יורדת? הוכח או הבא דוגמא נגדית.  
ג. תהי  $h(x)$  פונקציה עולה. הוכח, ללא שימוש בנגזרות, כי הפונקציה  $h(h(x))$  היא פונקציה עולה.

### שאלה 4 - תכונות של פונקציה קעורה

א. תהי  $u: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  פונקציה עולה וקעורה.

$$\text{הוכח כי } u(3) > \frac{u(2) + u(4)}{2}.$$



ב. נגדיר  $f(x) = (2x)^b$  לכל  $x > 0$  ,  $b$  קבוע חיובי.

- מצא תנאי על  $b$  על מנת שהפונקציה תהיה עולה וקעורה.
  - לפניך טענה. אם הטענה נכונה - הוכח אותה. אם הטענה שגויה הבא דוגמא נגדית.
- הטענה: אם  $g(x)$  עולה וקעורה אזי גם  $(g(x))^5$  עולה וקעורה.

### שאלה 5 - בעיית קיצון כלכלית

יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק  $x$  ק"מ מכיכר המדינה דמי השכירות החודשיים הינם  $P(x) = 60 - 4x$ . בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר המדינה.

$$\text{הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על-ידי } D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}.$$

- א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל,  $TC(x)$ .
- ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?
- ג. שרטט גרף איכותי של  $TC(x)$ . הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

## לדוגמה

הקורס: 10142 - חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5-6

### שאלה 1

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ .

ב. נגדיר  $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$ . הנח כי  $x, y \geq 0$ .

שרטט את העקומות שוות הערך  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

### שאלה 2

תהי  $u(x, y) = (x + p)(y + q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות  $(1, 6)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(0, 14)$  מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקצית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?

עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

ג. על העקומה שציינת סמן שתי נקודות כלליות  $C$  ו- $D$  כך ש- $C$  היא הנקודה העליונה.

הוכח כי  $16 \geq MRS(C) > MRS(D) \geq \frac{1}{4}$ .

### שאלה 3

א.1. תהי  $g(x, y) = xy$  ותהי  $f(t) = e^t$  פונקציה של משתנה אחד. נגדיר פונקציה

חדשה של שני משתנים  $h(x, y) = f(g(x, y))$ . מצא את  $h_y(x, y)$ .

א.2. תהי  $g(x, y) = 4x + 5y$  ותהי  $f(t)$  פונקציה יורדת של משתנה אחד.

נגדיר פונקציה חדשה של שני משתנים  $h(x, y) = f(g(x, y))$ .

\* האם הנקודות  $(1, 2), (3, 0)$  מונחות על אותה עקומה שוות ערך של  $h$ ?

\* הוכח כי  $MRS_g = MRS_h$  בכל נקודה  $(x, y)$ .

### שאלה 4

יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות מחשבון בארץ היא \$6 ועלות מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין

על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו

רווח זה?

### שאלה 5

תהי  $D(p)$  פונקצית ביקוש יורדת ותהי  $S(p)$  פונקצית היצע עולה.

במצב של שיווי משקל בשוק, הביקוש שווה להיצע והמחיר  $p$  נקרא מחיר שיווי משקל.

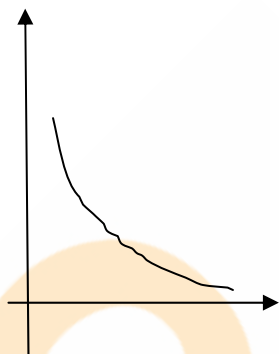
מסיבות כלכליות חל גידול בביקוש ב-  $a$ . כלומר, הביקוש החדש הוא  $a + D(p)$ .

א. רשום את המשוואה המגדירה את מחיר שיווי המשקל.

ב. המשוואה שרשמת מגדירה את  $p$  כפונקציה סתומה של  $a$ . הראה, בעזרת משפט הפונקציות

הסתומות, כי  $\frac{dp}{da} > 0$ . נסח את התוצאה במילים.

## שאלה 6



נתונה התועלת  $u(x, y) = 2 \ln x + \ln y$  ,  $x > 0$  ,  $y > 0$  .

באיור שלפניך עקומת אדישות של  $u$  .

הנקודה  $(e, e)$  מונחת על העקומה.

א. מצא את רמת התועלת של העקומה הנ"ל.

ב. על עקומת האדישות 0 יש נקודה בה

שיעור התחלופה השולי הוא 2 .

מצא את הנקודה. הדגם עוד נקודה על עקומת אדישות זאת.

ג. הישר  $y = -2x + b$  משיק לעשי"ע 3 של הפונקציה. מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

ד. האם הפונקציה  $y = \frac{1}{x}$  היא עשי"ע של הפונקציה  $u$  ?



## מטלת מנחה (ממ"ן) 14

### לדוגמה

הקורס: 10142 - חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6

שאלה 1 - קואזי קעירות / קואזי קמירות - האספקט הגיאומטרי

חלק ראשון

שרטט מפת עקומות שוות ערך לפונקציה  $f(x, y) = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{4} \ln y$

חלק שני

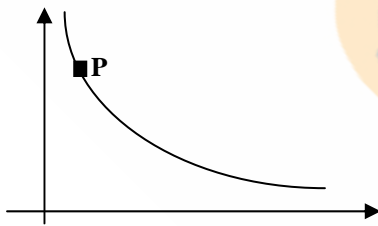
נתונה פונקצית התועלת  $u(x, y) = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{4} \ln y$

באיור שלפניך עקומת האדישות העוברת בנקודה  $P = (2, 4)$ .  
א. מצא את התועלת.

יש להגיע לביטוי מהצורה  $c \cdot \ln d$  ללא מחשבון.

מהי המשוואה המפורשת של עקומת האדישות?

ב. הדגם שלוש - ארבע נקודות המונחות על העקומה שלנו.



שאלה 2 - פתרון אלגברי וגרפי לבעיית קיצון תחת אילוץ

לפניך בעיית קיצון:  $\max\{x \cdot y\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, x, y > 0$

א. פתור את הבעיה – פתרון אלגברי.

ב. פתור את הבעיה – פתרון גרפי.

שאלה 3 - פתרון אלגברי וגרפי לבעיית קיצון תחת אילוץ

נתונה בעיית הקיצון:  $\min\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, x, y \geq 0$

א. פתור את הבעיה – פתרון אלגברי.

ב. פתור את הבעיה – פתרון גרפי.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

#### שאלה 4 – בעיה כלכלית

מוישראל קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו-  $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  היא  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישראל קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישראל.

#### שאלה 5

לפניך בעיית קיצון:  $\max \{2x + 3y\} \text{ s.t. } g(x, y) = 0 ; x, y \geq 0$

נתון כי:  $g_1 > 0, g_2 > 0 ; g_{11} > 0, g_{22} > 0 ; g_{12} = 0$ .

תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הקיצון של הבעיה.

הראה כי:

$$\frac{g_1(x^*, y^*)}{2} = \frac{g_2(x^*, y^*)}{3} \quad \text{א.}$$

ב.  $(x^*, y^*)$  נקודת מקסימום.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

## לדוגמה

הקורס: 10142 - חשבון דיפרנציאלי לתלמידי כלכלה וניהול

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6-7

### שאלה 1

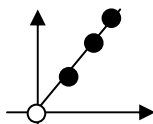
- א. הוכח כי פונקצית התועלת  $u(x, y) = \left( \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m \right)^{1/m}$  הומוגנית. הנח כי  $m$  קבוע חיובי.
- ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$ .
- ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$ .

### שאלה 2

- תהי  $f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר  $m$  המקיימת  $f(6, 3) = 243$  ו-  $f(2, 1) = \sqrt{27}$ .
- א. מצא את סדר ההומוגניות,  $m$ .
- ב. בנקודה  $(6, 3)$  עוברת עש"ע של  $f$ . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא  $2x + 3y = 21$ . מצא את  $f_x(1, 0.5)$ ,  $f_y(2, 1)$ ,  $f_x(2, 1)$ .

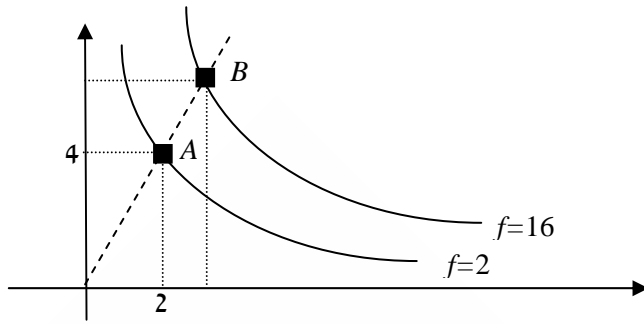
### שאלה 3

- תהי  $g(t)$  פונקציה של משתנה אחד.
- על הפונקציה  $g$  ידוע כי  $g'(8) = 2$ ,  $g(1) = 3$ ,  $g(4) = 5$ .
- המשתנה  $t$  תלוי במשתנים החיוביים  $(x, y)$  כך:  $t = \frac{4y}{x}$ .
- מגדירים תועלת  $u$  כפונקציה של המשתנים  $(x, y)$  באופן הבא:  $u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$ .



- א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
- מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?
- ב. הוכח כי הקרן  $4y - x = 0$  היא עקומת אדישות של התועלת.
- צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.
- ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?
- ד. הוכח כי  $u_x(1, 2) = -16$ .

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



#### שאלה 4

הפונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מסדר 3 .  
הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה  $B$  .

ב. מצא את ערך הסכום  $f_x(4,8) + 2f_y(4,8)$  .

ג. נגדיר פונקציה חדשה  $u(x, y)$  על ידי  $u(x, y) = (f(x, y))^2$

ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים  $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$  . הסבר זאת בקצרה.

ג.2. הוכח כי  $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$  . היעזר ב-1 ובנתונים על  $f$  .

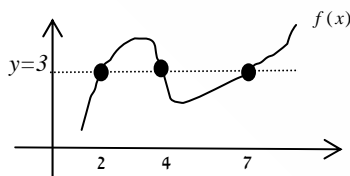
#### שאלה 5

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של  $y = \frac{36}{x} - 3$  ,  $y = \frac{9}{x-2}$  .

#### שאלה 6

חשב את השטח הכלוא בין הישר  $y = -0.6x + 0.6$  , גרף הפונקציה  $y = \sqrt{5-x}$  וציר  $x$  .

#### שאלה 7



$$A = \int_2^4 (f(x) - 3) dx - \int_4^7 (f(x) - 3) dx$$

מה מבטא הביטוי

לפי האיור המונח לפניך.

**סיימתם את חוברת המטלות בשעה טובה !  
הנכם מוזמנים לאתרנו, לתרגול בחינות הגמר**

**בהצלחה בבחינות**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר – גיא סלומון ©