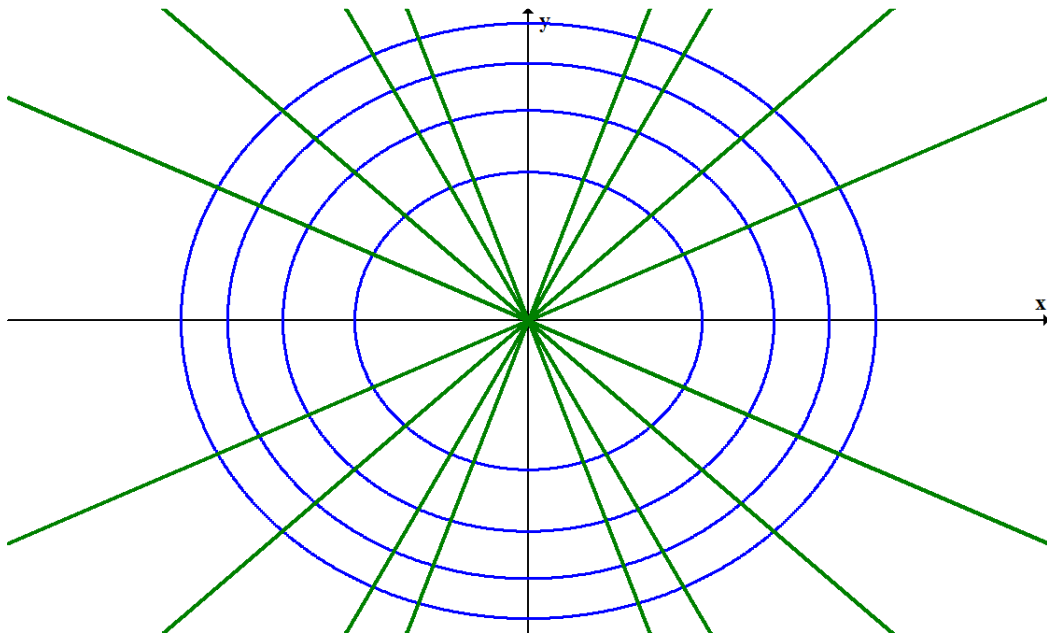


משוואות דיפרנציאליות רגילות



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

5	פרק 1 - משוואות מסדר ראשון
5	הפרדת משתנים
7	משוואה הומוגנית
9	משוואה הומוגנית – שיטת ההצבה
11	משוואה מדויקת
13	גורם אינטגרציה
15	משוואה לינארית מסדר ראשון
17	משוואת ברנולי
19	משוואת ריקטי
20	משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה
22	משפט הקיום והיחידות
23	פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני
23	משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה
25	משוואה לינאריות, הומוגנית, עם מקדמים קבועים
27	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים - שיטת השוואת מקדמים
29	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים
31	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית
33	משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים – שיטת משוואת אוילר
34	משוואה לינארית, כללית – שיטת הפתרון השני
35	פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר n
35	משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים
37	שיטת השוואת מקדמים
38	שיטת וריאציית פרמטרים
39	השיטה האופרטורית
41	פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות
41	חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים
43	מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון
45	מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים
47	מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה
49	פרק 5 - פתרון משוואות לינאריות באמצעות טורים
49	פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית
51	פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית
53	פרק 6 - התמרת לפלס
53	התמרת לפלס והתמר הפוכה
57	התמרת לפלס ההפוכה
64	פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

66	פרק 7 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות
66	בעיות גיאומטריות
67	עקומות אורתוגונליות
69	בעיות גדילה ודעיכה
70	בעיות שונות
74	דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור, התמרות לפלס)
74	נוסחאות - נגזרות
75	נוסחאות - אינטגרלים
76	נוסחאות - טריגו
77	נוסחאות - אלגברה
78	נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות
79	נוסחאות - התמרת לפלס
82	סיכום מד"ר
82	משוואות הניתנות להפרדת משתנים
82	משוואות הומוגניות (ניתנות להפרדת משתנים בעזרת הצבה מתאימה)
83	משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$
83	משוואות לינאריות מסדר ראשון
84	משוואת ברנולי (לינארית על ידי הצבה)
84	משוואות מדויקות
85	משוואות כמעט מדויקות (מדויקות לאחר הכפלה בגורם אינטגרציה)
86	משוואות מסדר ראשון וממעלות גבוהות
87	הורדת סדר המשוואה
87	משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים
88	משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים
90	משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים
92	משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות (שיטה אופרטורית)
94	התמרת לפלס
95	פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס:
96	נוסחאות - התמרת לפלס
98	פתרון מד"ר בעזרת טורים - נקודה רגולרית
99	פתרון מערכת מד"ר כללית 2×2 - שיטת החילוץ
99	פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - שיטת הלכסון
100	אלגוריתם פתרון (וריאציית פרמטרים):
101	פתרון נומרי (מקורב) של מד"ר מסדר ראשון (שיטת רונגה-קוטה)
102	בעיות מילוליות גיאומטריות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

הפרדת משתנים

- מדר הניתנת להפרדת משתנים - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy' \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1) \frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + k} \quad (1)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (3)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1| \quad (5)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, \quad y = -2 \quad (7)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (8)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (9)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (10)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (11)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (12)$$

משוואה הומוגנית

- פונקציה הומוגנית - הסבר
- הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.
- מדר הומוגנית - הסבר
- הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.
 ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה הומוגנית - שיטת ההצבה

- מדר הומוגנית, פתרון על ידי הצבה - הסבר
 הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות:

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4} \ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (2)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} + 1 \right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4} \left[-(2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} - 2 \frac{y+2}{x-1} \right| + (-2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} + 2 \frac{y+2}{x-1} \right| \right] + c, \quad y = \sqrt{0.5x-2} - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5x-2} + \sqrt{0.5} \quad (4)$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2} \ln \left(2 + 2 \frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2} \right)^2 \right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

- מדר מדויקת - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה

פתור את המשוואות הבאות :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0 \text{ באשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

- גורם אינטגרציה - הסבר
הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת.

(1) הראה שהמשוואה $x^2 y^3 + x(1 + y^2) y' = 0$ אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$

אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x .

(4) פתור את המשוואה $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$.

(5) פתור את המשוואה $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$.

(6) פתור את המשוואה $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$.

(7) פתור את המשוואה $(y^2 - y) dx + x dy = 0$.

(8) פתור את המשוואה $(y - xy^2) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$.

(9) פתור את המשוואה $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

תשובות:

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

משוואה לינארית מסדר ראשון

- מדר לינארית מסדר ראשון - הסבר הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

תשובות:

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[-5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[-\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

משוואת ברנולי

- משוואות ברנולי - הסבר
הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

- משוואת ריקטי - הסבר
הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (4)$$

תשובות:

$$y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (1)$$

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (3)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (4)$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

- בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.
- מדר מסדר ראשון וממעלה גבוהה - הסבר הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2 \ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3 \ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6 \left(\frac{c}{y^2} \right)^2 y^2 + 3 \left(\frac{c}{y^2} \right) x - y = 0 \quad (6)$$

משפט הקיום והיחידות

משפט הקיום והיחידות למדר מסדר ראשון - הסבר

$$(1) \quad y(2) = -1, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$$

א. הוכיחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.

קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

$$(2) \quad y(0) = 0, \quad y' = \sqrt[3]{y} + 4$$

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה :

$$y(0) = 0, \quad y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$$

$$(4) \quad y(0) = 4, \quad y' = (y-1)(x^2 + y)^5$$

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שלכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

- מדר חסרה מסדר שני – הסבר
הגדר משוואה חסרה מסדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (8)$$

תשובות:

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1(x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k ; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2(x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx+k) ; y = c \quad (8)$$

משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

- מדר לינארית הומוגנית, מסדר שני, עם מקדמים קבועים – הסבר הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (6)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (7)$$

$$c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{-4x/5} \left[c_1 \cos\left(\frac{2}{5}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \right] \quad (10)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים - שיטת השוואת מקדמים

- מדר לינארית, לא הומוגנית, מסדר שני, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת השוואת מקדמים – הסבר
הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

- הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

- הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3 \sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (7)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \text{ – הערת סימון}$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים – שיטת משוואת אוילר

(1) מדר לינארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר הומוגנית – הסבר ותרגיל

דוגמא 1: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, (x \neq 0)$

דוגמא 2: $x^2 y'' + 3xy' + y = 0, (x \neq 0)$

דוגמא 3: $x^2 y'' + xy' + y = 0, (x \neq 0)$

(2) מדר לינארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר לא הומוגנית – הסבר ותרגיל

דוגמא 1: $x^2 y'' - xy' + y = x^2, (x > 0)$

דוגמא 2: $x^2 y'' + xy' = x \ln x, (x > 0)$

משוואה לינארית, כללית – שיטת הפתרון השני

- מדר לינארית, מסדר שני, כללית – הסבר

$$(1) \text{ פתור } y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$$

$$\text{כאשר ידוע } y_1(x) = e^{2x}$$

$$(2) \text{ פתור } (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

- (3) הסבר את שיטת הפתרון השני לפתרון מד"ר לינארית, לא הומוגנית, מסדר שני.

$$\text{הדגם על המד"ר } (0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

$$\text{כאשר ידוע } y_1(x) = e^{2x} \text{ פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.}$$

תשובות:

$$(1) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$$

$$(2) \quad y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$$

פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר n

משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

- מדר לינארית הומוגנית, מסדר n, עם מקדמים קבועים - הסבר
- משפטים הקשורים לפתרון משוואות פולינומיאליות - הסבר

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = -1; y''' - y'' + y' - y = 0 \quad (14)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -19, y'''(0) = -47; y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \quad (15)$$

(16) נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$ א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

ב. מצא את המשוואה

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$(a) y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$(b) y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'' - 150y' + 125y = 0$$

שיטת השוואת מקדמים

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2 ; y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (7)$$

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית פרמטרים

- מדר ליניארית, מסדר n, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת וריאציית הפרמטרים - הסבר

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

השיטה האופרטורית

- מדר ליניארית, מסדר n, חא הומוגנית, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטה האופרטורית - הסבר

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104 \sin(2x + 1) + \cos(x + 10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5 \sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48 \cos^2 x - 16 \quad (7)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2 \sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4 \sin 2x - 22 \cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5 \sin x + 25 \cos x}{26} + \frac{-3 \cos 2x - 18 \sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

נתונה מטריצה A , מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות:

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1 + i, 2), v_{x=1-2i} = (1 - i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1), \quad (8)$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

- מערכת משוואות דיפרנציאליות, מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת הלכסון - הסבר
פתור את התרגילים:

$$(1) \text{ פתור את המערכת: } \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(2) \text{ פתור את המערכת: } \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ נתון } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ כד ש-} \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \text{ הוכח כי } z(t) = y(t)$$

$$(4) \text{ פתור את המערכת: } \begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$$

$$(5) \text{ פתור } \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(6) \text{ נתון } \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \text{ כד ש-} \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \text{ חשב: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

$$(7) \text{ פתור את המערכת: } \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(8) \text{ פתור את המערכת: } \bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t) \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- הערה: בשאלות 8,9 יש להגיע מהפתרון המרוכב לפתרון ממשי.

תשובות:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(3)

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

0 (6)

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

- מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת וריאציית הפרמטרים - הסבר

פתור את מערכות המשוואות הבאות :

$$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t} \quad (1)$$

$$x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t}$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + e^{at} \quad (2)$$

$$x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \quad (a \text{ קבוע}).$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$x' = x + y + 2z + e^t$$

$$y' = x + 2y + z \quad (4)$$

$$z' = 2x + y + z + e^t$$

- (5) המר את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$ במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

תשובות:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (a = -1), \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} \quad (a \neq 1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} t e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{בהינתן} \quad \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות:

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

פרק 5 - פתרון משוואות לינאריות באמצעות טורים

פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית

- פתרון מדר בעזרת פיתוח טור חזקות סביב נקודה רגולרית - הסבר

פתור את המשוואות הבאות (2-8) על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$. במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור. (הערת ניסוח: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן).

$$y(0) = 3, y'(0) = 12 ; y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \quad (1)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 ; y'' - xy = 0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$(x^2 + 4)y'' + xy = x + 2 \quad (4)$$

$$y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0 \quad (5)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 ; y'' + ty = e^{t+1} \quad (6)$$

$$y'' + (t-1)y' + (2t-3)y = 0 \quad (7) \text{ (השתמש בפתרון בסימן } \sum \text{)}$$

$$y(1) = 1, y'(1) = 2 ; y'' + (x-1)y = e^x \quad (8) \text{ פתור את המשוואה}$$

על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

$$y(-1) = 2, y'(-1) = -2 ; y'' + xy' + (2x-1)y = 0 \quad (9) \text{ פתור את המשוואה}$$

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות:

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad (n \geq 4), \quad (4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3), \quad (5)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3) \quad , \quad (6)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3), \quad (7)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3) \quad , \quad (8)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3), \quad (9)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots$$

פתרון מדור בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

- פתרון מדור בעזרת פיתוח טור חזקות סביב נקודה רגולרית-סינגולרית – הסבר

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ופתור את המשוואה על יד פיתוח הפתרון לטור חזקות בסביבת הנקודה.

$$3x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2 y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (5)$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2 y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2 y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

הערה: בשאלות 2-5 הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6,7 הפתרונות שווים ובשאלות 8,9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות:

$$y = k_1 x^{1/3} \left(1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left(1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left(1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$y = k_1 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + k_2 \left[\ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left(\frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (8) \quad y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left(1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

פרק 6 - התמרת לפלס

התמרת לפלס והתמרה הפוכה

- התמרת לפלס והתמרה הפוכה - הסבר

חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס :

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1)$$

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3)$$

$$L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5)$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7)$$

$$L(\sin^2 t) \quad (8)$$

$$L(\cos^2 4t) \quad (9)$$

$$L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

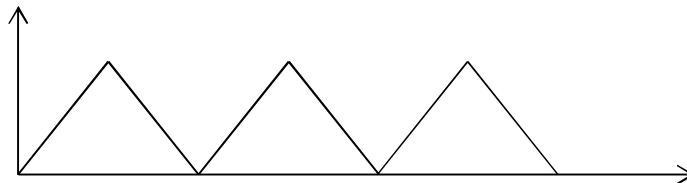
$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

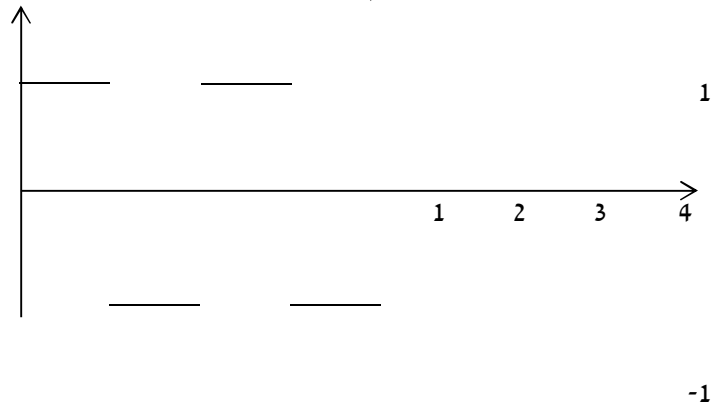
$$g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad (13) \text{ מצא התמרת לפלס של הפונקציה}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases} \quad (14) \text{ מצא התמרת לפלס של הפונקציה}$$

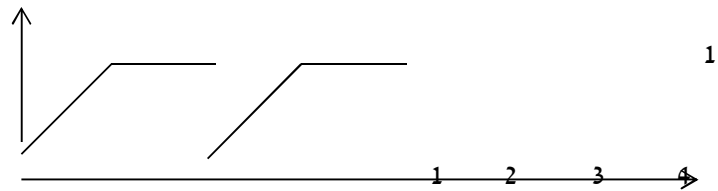
$$(15) \text{ מצא התמרת לפלס של פונקציה המחזורית הבאה}$$



16 מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17 מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18 הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19 שרטט את הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20 רשום את הפונקציה $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

21 רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$, של הפונקציה $u(t-k)$

ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$

23 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$

24 א. הגדר ושרטט את פונקציית הדלתא $\delta(t)$

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$

תשובות:

$$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$

$$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{4}{s^2+16} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+64} \quad (9)$$

$$\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3} \quad (10)$$

$$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$

$$\frac{4}{(s-2)^2+16} \quad (12)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$

$$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$

$$\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$

$$\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$

(19)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16\frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

התמרת לפלס ההפוכה

חשב את התמרת לפלס ההפוכה :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4 - 13s^2 + 36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3 + s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3 + 6s^2 + 9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 2s + 3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2 + s - 1}{(s^2 + 1)(s - 3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2 + 2s + 1}{(s^2 + 1)(s + 2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2 + 4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

(30) נתון $F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$ חשב את $f(0)$ ו- $f(\infty)$ כאשר $f(t) = L^{-1}(F(s))$.

פתור בשתי דרכים שונות.

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad , \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

הערה:

(31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-4)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

• בשאלה 27 הוסף סעיף ב המבקש לשרטט את הפתרון.

תשובות:

1 (1)

$\frac{t^3}{3!}$ (2)

e^{10t} (3)

$\frac{1}{3} \sin 2t$ (4)

$\cos 2t$ (5)

$e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$ (6)

$e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$ (7)

$\frac{1}{4} t \sin 2t$ (8)

$\frac{1}{4} t \sin 2t$ (9)

$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$ (10)

$\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$ (11)

$1 - 2e^{-5t}$ (12)

$3e^{-3t} - 2e^{-2t}$ (13)

$1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$ (14)

$e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$ (15)

$e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$ (16)

$e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$ (17)

$-6 + 5t + 6e^{-2t}$ (18)

$4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$ (19)

$2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$ (20)

$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t$ (21)

$\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t$ (22)

$\sin t + 2e^{3t}$ (23)

$\cos t + e^{-2t}$ (24)

$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$ (25)

$$e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad (26)$$

$$3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3) \quad (27)$$

$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2) \sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

– (31)

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4} \sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4} e^{4t} (t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2} (-2 \cos t + 2 - t \sin t) \quad (35)$$

פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

- מדר ליניארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים, פתרון בעזרת התמרת לפלס - הסבר

פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ כאשר היא פונקציית המדרגה.}$$

הערה: יש המסמנים $u(t-4) = u_4(t)$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y'''' + 4y''' + 5y'' + 2y' = 10\cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3 ; y'' + 3y' + -10y = 4\delta(t-2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = \delta(t-2\pi) - \delta(t-\pi) \quad (12)$$

תשובות:

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2)\frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t) \quad (10)$$

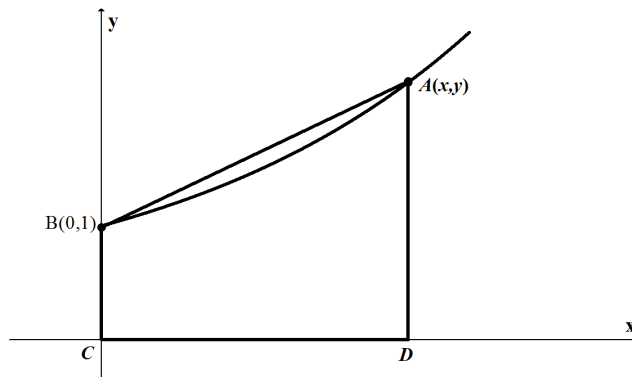
$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

פרק 7 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

בעיות גיאומטריות

- (1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$. מצא את משוואת העקום.
- (2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$ ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$. מצא את משוואת העקום.
- (3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה $(1, 2)$ ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.
- (4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.
- (5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.
- (6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$. נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .
- (7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.
- (8) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר x נחצה ע"י ציר y . מצא את משוואת עקום זה.
- (9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה $(0, 1)$ כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM מהראשית O ל- M הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע MN . N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר y . צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.
- (10) נתון עקום העובר בנקודה $(0, 1)$. בכל נקודה A שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$ הנראה בציור. מהי משוואת העקום.



עקומות אורתוגונליות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות :

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

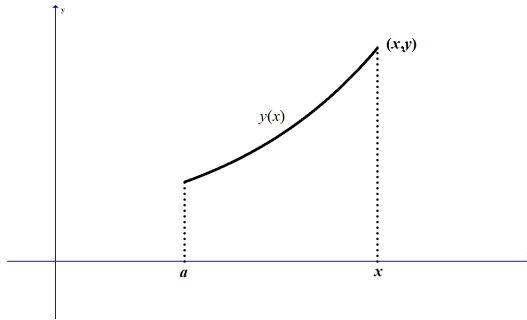
$$x^2 + 2y^2 = c \quad \text{א.} \quad (3)$$

ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$, בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

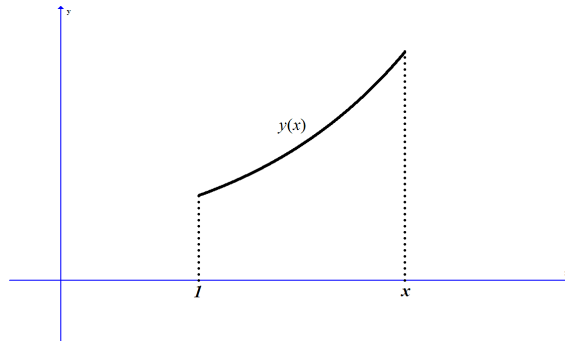
$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

(5) מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית של 45° עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$

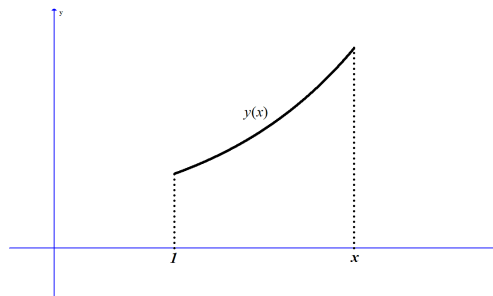
- (6) שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$, ו- x משתנה. ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$, מצא את משוואת העקום.



- (7) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה. ידוע כי $y(1) = 2$ האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$



- (8) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה. ידוע כי $y(1) = 2$ האם קיים עקום כזה שהשטח של S שווה ל- $y(x) = 2$



בעיות גדילה ודעיכה

- גדילה ודעיכה – בניית הנוסחה הכללית (הסבר ווידאו)
 - ניח שכמות $y(t)$ גדלה (או דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית).
 - כלומר בגל רגע קצב הגידול שלה פרופורציונאלי לערכו.
 - ניח שבזמן התחלתי מסויים $t = 0$ הכמות היא y_0 ונניח שקבוע הפרופורציה הוא k מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן t

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
 - א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 - ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 - ג. באיזה שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
 (הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר שבכל רגע קצב הגידול פרופורציוני לערכו))

- (2) האוכלוסיה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.
 - א. מצא את אחוז הגידול השנתי
 - ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.

- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית שנתית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.
 - א. כמה כסף הפקיד האדם.
 - ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?

- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה ראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?

- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
 - א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1000 שנים מכמות התחלתית של 100 גרם?
 - ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?

- (6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 4% כל שבוע. בבריכה שנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 10% כל שבוע.
 - א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
 - ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

בעיות שונות

- (1) בזמן $t = 0$ יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
 א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$ כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחרור בכיוון התנועה ומפעיל כח של 20 ניוטון על הסירה. אם משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג וההתנגדות (ק"ג) שווה ל- $2v$ כאשר v נמדדת ב-מטר/שניה, מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שניה.
 ג. מצא את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונאלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
 א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונאלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים וב- k את קבוע הפרופורציה.
 א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$. מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$. פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?
- (5) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כד שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
 א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח הכדור השלג $1/64$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$ כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
 הוכח כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמיניית מנפחו התחלתי.

תשובות:**בעיות גיאומטריות**

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (2)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (4)$$

$$y^2 = ax \quad (5)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (6)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (7)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (8)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (9)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh \left(\pm \frac{1}{k} x + C \right) \quad (6)$$

לא (7)

כן (8)

בעיות גדילה ודעיכה

2106 שנים (1)

א.02 (2)

ב. 15.92 שנים

א. 4093.65 (3)

ב. 13.41 שנים

40.77 חודשים (4)

א. 88.69 גרם (5)

ב. 19188 שנים

6) א. 3.04 שבועות

ב. 14.6 שבועות

בעיות שונות

1) א. 26.75 ק"ג

ב. 0.942 דקות

2) א. $4.09 \frac{m}{sec}$

ב. 72 שניות

ג. $10 \frac{m}{sec}$

3) א. $43 \frac{1}{3}$

ב. 1.13 שעות

4) א. $h(0) = 4$, $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$

ב. $\sqrt{2} + 2$

5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$

ב. 4.5 שעות

6) הוכחה

דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור,

התמרות לפלס)

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ e^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ e^{k \ln x} = x^k \\ e^{-k \ln x} = \frac{1}{x^k} \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = a \cdot d - b \cdot c \\ \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right| = a \left| \begin{array}{cc} e & f \\ h & i \end{array} \right| - b \left| \begin{array}{cc} d & f \\ g & i \end{array} \right| + c \left| \begin{array}{cc} d & e \\ g & h \end{array} \right| \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות טור מקלורן

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
 $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
 $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
 $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(for $n = 1, 2, 3, \dots$) t^n
$\frac{1}{s^n}$	(for $n = 1, 2, 3, \dots$) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2 + a^2 \right]}$	$e^{-bt} \sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2 + a^2 \right]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	\sqrt{t}
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$
e^{-ks}	$\delta(t-k)$

תכונות נוספות

$$L[ag(t) + bh(t)] = aL[g(t)] + bL[h(t)] \quad (1)$$

$$L^{-1}[aG(s) + bH(s)] = aL^{-1}[G(s)] + bL^{-1}[H(s)] \quad (2)$$

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-at}L^{-1}[f(s-a)] \quad , \quad L^{-1}[F(s)] = e^{at}L^{-1}[f(s+a)] \quad (3)$$

$$L[ay'(t) + by(t)] = Y(s)[as + b] - y(0)[a] \quad (4)$$

$$L[ay''(t) + by'(t) + cy(t)] = Y(s)[as^2 + bs + c] - y(0)[as + b] - y'(0)[a]$$

$$L[ay'''(t) + by''(t) + cy'(t) + dy(t)] =$$

$$Y(s)[as^3 + bs^2 + cs + d] - y(0)[as^2 + bs + c] - y'(0)[as + b] - y''(0)[a]$$

$$L[ay''''(t) + by'''(t) + cy''(t) + dy'(t) + ey(t)] =$$

$$Y(s)[as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e] - y(0)[as^3 + bs^2 + cs + d]$$

$$- y'(0)[as^2 + bs + c] - y''(0)[as + b] - y'''(0)[a]$$

לדף התמורות לפלס מורחב

http://www.gool.co.il/laplace_table.pdf

סיכום מד"ר

משוואות הניתנות להפרדת משתנים

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה: $f(x)dx = g(y)dy$

אז הפתרון ניתן ע"י: $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

משוואות הומוגניות (ניתנות להפרדת משתנים בעזרת הצבה מתאימה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

כאשר $M(x, y)$ וגם $N(x, y)$ הומוגניות מאותו סדר!

מציבים: $y = v \cdot x$, $dy = dv \cdot x + dx \cdot v$,

ומקבלים מד"ר הניתנת להפרדת משתנים.

לאחר האינטגרציה יש להציב $\frac{y}{x}$ במקום v .

הערה: פונקציה $f(x, y)$ תקרא הומוגנית מסדר n אם $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

מקרה I - $a_1b_2 \neq a_2b_1$

פותרים את מערכת המשוואות $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ומקבלים $x = h$ ו- $y = k$.
מציבים $x = X + h$, $y = Y + k$ ומקבלים מד"ר הומוגנית מסדר ראשון.

מקרה II - $a_1b_2 = a_2b_1$

במקרה זה :

1. מציבים : $z = a_1x + b_1y + c_1$

2. גוזרים : $\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}$

$$dy = \frac{1}{b_1}(dz - a_1 dx)$$

ומקבלים משוואה הניתנת להפרדת משתנים במשתנים z ו- x .

משוואות לינאריות מסדר ראשון

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $y' + a(x)y = b(x)$.

הפתרון ניתן ע"י : $y = e^{-A(x)} \left[\int b(x)e^{A(x)} dx + C \right]$ $(A(x) = \int a(x)dx)$

זכור :

$$e^{k \ln f(x)} = (f(x))^k , \quad e^{-k \ln f(x)} = \frac{1}{(f(x))^k} \quad (1)$$

$$\int e^f f' dx = e^f \quad (2)$$

משוואת ברנולי (לינארית על ידי הצבה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה : $y' + a(x)y = y^n b(x)$

אז ההצבה $v = y^{1-n}$ הופכת את המד"ר למד"ר לינארית מסדר ראשון :

$$v' + (1-n) \cdot a(x)v = (1-n) \cdot b(x)$$

משוואות מדויקות

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

$$M_y = N_x : \text{כך שמתקיים}$$

אז המשוואה נקראת מדויקת.

פתרון המשוואה נתון ע"י : $F(x, y) = c$

$$\text{כאשר ידוע ש: } F_x = M \quad \text{ו-} \quad F_y = N$$

אלגוריתם פתרון :

1. $F(x, y) = C$
2. $F_x = M$
3. $F = \int M dx = g(x, y) + h(y)$
4. $F_y = N \Rightarrow g_y + h'(y) = N \Rightarrow h(y) = \dots$
5. $F = g(x, y) + h(y) = C$

הערה : במידה והאינטגרל $F = \int M dx$ מסובך, ניתן להתחיל מ- $F = \int N dy$.

משוואות כמעט מדויקות (מדויקות לאחר הכפלה בגורם אינטגרציה)

נתונה משוואה: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ומתקיים: $M_y \neq N_x$

במקרה כזה המשוואה אינה מדויקת.

ייתכן שקיים גורם אינטגרציה $h(x, y)$ שאם נכפול אותו במשוואה המקורית

נקבל משוואה מדויקת.

כלומר המשוואה $h(x, y)M(x, y)dx + h(x, y)N(x, y)dy = 0$ היא מדויקת.

במידה וגורם האינטגרציה אינו מופיע בשאלה מצאו אותו בעזרת השיטות הבאות:

1. אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.
2. אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.
3. אם לאחר כינוס איברי המשוואה אתם מזהים את קבוצת האיברים מימין אז השתמשו בגורם האינטגרציה משמאל.

גורם אינטגרציה	קבוצת איברים
$\frac{1}{x^2}$	$xdy - ydx$
$\frac{1}{y^2}$	$xdy - ydx$
$\frac{1}{xy}$	$xdy - ydx$
$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$xdy - ydx$
$\frac{1}{(xy)^n}$	$xdy + ydx$
$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$	$xdx + ydy$

משוואות מסדר ראשון וממעלות גבוהות

המשוואה הכללית מסדר ראשון וממעלה n נתונה ע"י :

$$(*) \quad a_0(x, y) + a_1(x, y)p^1 + a_2(x, y)p^2 + \dots + a_n(x, y)p^n = 0 \quad ; \quad p = y' = \frac{dy}{dx}$$

סוג I - משוואות פתירות עבור p

במקרה זה מתייחסים לאגף שמאל של (*) כאל פולינום ב- p .

משווים את הפולינום לאפס ומקבלים : $p = F_1(x, y), p = F_2(x, y), \dots, p = F_n(x, y)$

פותרים את המשוואות שהתקבלו, כל אחת מהצורה $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ שפתרונה מהצורה

$$f_1(x, y, c) \cdot f_2(x, y, c) \cdot \dots \cdot f_n(x, y, c) = 0 \quad . \quad f(x, y, c) = 0$$

סוג II - משוואות פתירות עבור y

כלומר, משוואות מהצורה $y = f(x, p)$.

$$p = f_x + f_p \cdot \frac{dp}{dx} \quad : \quad \text{נגזור לפי } x \text{ את שני האגפים ונקבל}$$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $y = f(x, p)$ ומכאן y .

סוג III - משוואות פתירות עבור x

כלומר, משוואות מהצורה $x = f(y, p)$.

$$\frac{1}{p} = f_y + f_p \cdot \frac{dp}{dy} \quad : \quad \text{נגזור לפי } y \text{ את שני האגפים ונקבל}$$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $x = f(y, p)$ ומכאן x .

הורדת סדר המשוואה

(1) אם המשוואה היא מהצורה $f(x, y', y'') = 0$ אז מציבים $y' = z(x)$, $y'' = z'$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

$$\therefore y = \int z(x) dx \quad \Leftarrow \quad y' = z(x)$$

(2) אם המשוואה היא מהצורה $f(y, y', y'') = 0$ אז מציבים $y' = z(y)$, $y'' = z' \cdot z$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

$$\int \frac{1}{z(y)} dy = \int dx \quad \Leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = z(y)$$

משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים

הצורה הכללית של משוואה הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

אלגוריתם פתרון:

1. נרשום את הפולינום האופייני של המשוואה (1) לפי $y^{(n)} \Leftarrow k^n$ ונמצא את שורשיו.

2. נחלק את השורשים לקבוצות :

קבוצה ראשונה – שורשים ממשיים ושונים $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m$

$$c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_m e^{k_m x} \quad \text{תרומתם לפתרון הכללי:}$$

קבוצה שנייה – שורשים ממשיים ושוים $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k$ (שורש מריבוי m)

$$c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} + c_3 x^2 e^{kx} + \dots + c_m x^{m-1} e^{kx} \quad \text{תרומתם לפתרון הכללי:}$$

קבוצה שלישית – שורשים מרוכבים

כל זוג שורשים מרוכבים $k_{1,2} = a \pm bi$ תורם לפתרון הכללי :

$$e^{ax} [c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$$

הערה : במידה ומתקיים $k_{3,4} = a \pm bi$, $k_{1,2} = a \pm bi$ רושמים :

$$e^{ax} [c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)] + e^{ax} [c_1 x \cdot \cos(bx) + c_2 x \cdot \sin(bx)]$$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר m עם מקדמים קבועים היא :

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y = y_h + y_p$

כאשר : y_h הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל-(1). (מסמנים גם \bar{y}).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם y^*).

להלן שיטת השוואת מקדמים למציאת הפתרון הפרטי :

מכינים רשימה המכילה את כל הפונקציות שמופיעות ב- $Q(x)$ והפונקציות המתקבלות מ-
 $Q(x)$ על ידי גזירה. כאשר בכל אחת מהפונקציות הנ"ל מתעלמים מהקבועים.

נניח שרשימת הפונקציות שהתקבלו מהתהליך הנ"ל היא $f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x)$

אזי, פתרון פרטי יהיה מהצורה $(3) \quad y_p = A \cdot f_1(x) + B \cdot f_2(x) + C \cdot f_3(x) + \dots + G \cdot f_i(x)$

כאשר A, B, C, \dots, G הם קבועים. למשל,

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = x^3$$

$$y_p = Ae^x + Be^{3x} \quad \text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = e^x + e^{3x}$$

$$y_p = A \sin(2x) + B \cos(2x) \quad \text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = \sin 2x$$

$$y_p = Ae^{-x} + Bxe^{-x} \quad \text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = xe^{-x}$$

$$y_p = Ae^{2x} \cos 4x + Be^{2x} \sin 4x \quad \text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = e^{2x} \cos 4x$$

$$\text{פתרון פרטי} \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 3x^2 + x \cdot \cos 4x$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + D \cos 4x + E \sin 4x + Fx \cos 4x + Gx \sin 4x$$

מהצבת (3) ב (1) נוכל למצוא את הקבועים A, B, C, \dots, G .

יש לשנות את התהליך במקרה הבא:

אם אחד (או יותר) מהמחברים בפתרון הפרטי הראשוני, מופיע בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה יש לכפול אותו (אותם) בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שמניבה פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע בפתרון ההומוגני או בפתרון הפרטי הראשוני. **למשל:**

$$y'''' - y'' - 8y' + 12y = \underbrace{e^{2x} + x^2}_{Q(x)}$$

הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-3x}$.

פתרון פרטי ראשוני $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{2x}$. עתה, ב- ראשוני y_p מופיע המחובר De^{2x}

שמופיע גם בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה לכן עלינו להכפיל אותו בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שתניב פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע במד"ר ההומוגנית או בפתרון

הפרטי הראשוני. מכאן שעלינו להכפיל את De^{2x} ב- x^2 ולרשום את הביטוי שהתקבל $Dx^2 \cdot e^{2x}$

בפתרון הפרטי. נקבל אם כן שהפתרון הפרטי הוא מן הצורה $y^* = Ax^2 + Bx + C + Dx^2 e^{2x}$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y = y_h + y_p$

כאשר y_h : הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל-(1). (מסמנים גם \bar{y}).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם y^*).

להלן שיטת וריאציית הפרמטרים למציאת הפתרון הפרטי:

(היות ובד"כ מדובר על מד"ר מסדר שני או שלישי נתחיל בכך)

מד"ר מסדר שני –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay'' + by' + cy = Q(x)$

שלב I

פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה: $ay'' + by' + cy = 0$ ומקבלים $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

שלב II

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$:

שלב III

מציבים בנוסחה: $y_p = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)} dx$

מד"ר מסדר שלישי –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay''' + by'' + cy' + dy = Q(x)$

I שלב

פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה: $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$

ומקבלים $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$

II שלב

מחשבים את: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$

$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 1 & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$, $W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & 1 & y_3'' \end{vmatrix}$, $W_3(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & 1 \end{vmatrix}$: מחשבים את:

III שלב

מציבים בנוסחה: $y_p = y_1 \int \frac{W_1 \cdot Q}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2 \cdot Q}{W} dx + y_3 \int \frac{W_3 \cdot Q}{W} dx$

מד"ר מסדר n –

I שלב

פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה ומקבלים $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$

II שלב

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

מחשבים את W_1, W_2, \dots, W_n , כאשר W_i היא הדטרמיננטה המתקבלת מהוורונסקיאן W

על ידי החלפת העמודה ה- i בוקטור העמודה

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שלב III

מציבים בנוסחה: $y_p = y_1 \int \frac{W_1 \cdot Q}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2 \cdot Q}{W} dx + \dots + y_n \int \frac{W_n \cdot Q}{W} dx$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות (שיטה אופרטורית)

משוואה לינארית לא הומוגנית במקדמים קבועים היא משוואה מהצורה

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_2 y'' + A_1 y' + A_0 y = Q(x)$$

בשיטה האופרטורית מסמנים: $y' = Dy$, $y'' = D^2 y$, ... (אופרטור הגזירה), ומקבלים:

$$(A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_2 D^2 + A_1 D + A_0) y = Q(x)$$

או בקיצור

$$F(D)y = Q(x)$$

פתרון המשוואה נתון על ידי $y = y_h + y_p$

$$F(D)y = 0 \text{ - פתרון המשוואה } y_h$$

$$F(D)y = Q(x) \text{ - פתרון פרטי של המשוואה } y_p$$

מציאת y_p

$$1. \text{ אם המד"ר מהצורה } F(D)y = e^{ax+b} \text{ אז } \frac{1}{F(D)} e^{ax+b} = \frac{1}{F(a)} e^{ax+b}$$

$$\cdot \frac{1}{(D-a)^n} e^{ax+b} = \frac{x^n}{n!} e^{ax+b} \text{ במידה והמכנה מתאפס ניעזר בנוסחה}$$

$$2. \text{ א. אם המד"ר מהצורה } F(D^2)y = \sin(ax+b)$$

$$\text{ אז } y_p = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$$

ב. אם המד"ר מהצורה $F(D)y = \sin(ax + b)$

אז:

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \sin(ax + b) \quad *$$

* רשום $F(D)$

* החלף כל הופעה של D^2 ב- $-a^2$.

* לאחר ההחלפה הנ"ל תקבל:

$$\frac{1}{AD + B} \sin(ax + b)$$

$$\frac{1}{AD + B} \frac{AD - B}{AD - B} \sin(ax + b)$$

$$\frac{AD - B}{A^2 D^2 - B^2} \sin(ax + b)$$

$$\frac{AD - B}{A^2(-a^2) - B^2} \sin(ax + b)$$

$$\frac{AD \sin(ax + b) - B \sin(ax + b)}{A^2(-a^2) - B^2}$$

$$\frac{A \cos(ax + b)a - B \sin(ax + b)}{A^2(-a^2) - B^2}$$

* אם במקום קוסינוס רשום סינוס פועלים באופן זהה.

.3

$$F(D)\left[e^{ax}h(x)\right] = e^{ax}F(D+a)h(x)$$

$$\frac{1}{D+2}e^{3x}\sin x = e^{3x}\frac{1}{D+5}\sin x$$

התמרת לפלס

הגדרה:

התמרת לפלס של פונקציה $g(t)$ שתסומן ב- $L[g(t)]$ הוא פונקציה חדשה במשתנה s שתסומן ב-

$$G(s) = L[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

ההתמרה ההפוכה נתונה ע"י: $L^{-1}[G(s)] = g(t)$

כללים:

$$G(s) = \frac{\int_0^{\omega} e^{-st} g(t) dt}{1 - e^{-\omega s}}$$

1. אם $g(t)$ מחזורית עם מחזור ω אז התמרת לפלס נתונה ע"י:

זכור:

$$\int e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int e^{-st} \cdot t dt = -\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)$$

$$\int e^{-st} \cdot t^2 dt = -\frac{1}{s^3}e^{-st}(s^2t^2 + 2st + 2)$$

$$\int e^{-st} \sin(at) dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2}[-s \cdot \sin(at) - a \cos(at)]$$

$$\int e^{-st} \cos(at) dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2}[-s \cdot \cos(at) + a \sin(at)]$$

$$L[ag(t) + bh(t)] = aL[g(t)] + bL[h(t)] \quad .2$$

$$L^{-1}[aG(s) + bH(s)] = aL^{-1}[G(s)] + bL^{-1}[H(s)]$$

Examples : $L[2 \sin t + 5t^2] = 2L[\sin t] + 5L[t^2]$; $L^{-1}\left[\frac{4}{s} + 5e^{-s}\right] = 4L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 5L^{-1}[e^{-s}]$

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-at} L^{-1}[f(s-a)] \quad .3$$

$$L^{-1}[F(s)] = e^{at} L^{-1}[f(s+a)]$$

Examples : $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2 + 4}\right] = e^{-2t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4}\right]$; $L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2 + 4}\right] = e^{2t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4}\right]$

.4

$$L[ay'(t) + by(t)] = Y(s)[as + b] - y(0)[a]$$

$$L[ay''(t) + by'(t) + cy(t)] =$$

$$Y(s)[as^2 + bs + c] - y(0)[as + b] - y'(0)[a]$$

$$L[ay'''(t) + by''(t) + cy'(t) + dy(t)] =$$

$$Y(s)[as^3 + bs^2 + cs + d] - y(0)[as^2 + bs + c] - y'(0)[as + b] - y''(0)[a]$$

$$L[ay''''(t) + by'''(t) + cy''(t) + dy'(t) + ey(t)] =$$

$$Y(s)[as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e] - y(0)[as^3 + bs^2 + cs + d] - y'(0)[as^2 + bs + c] - y''(0)[as + b] - y'''(0)[a]$$

פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס:

נתונה מד"ר מהצורה $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$ עם תנאי התחלה $y(0) = y_0$; $y'(0) = y_1$

שלב I

מפעילים את התמרת לפלס על שני אפי המשוואה ומקבלים:

$$L[ay''(t) + by'(t) + cy(t)] = L[g(t)]$$

$$Y(s)[as^2 + bs + c] - y_0[as + b] - y_1[a] = G(s) \quad \text{מכאן:}$$

II שלב

מבודדים מהמשוואה האחרונה את $Y(s)$ ומקבלים:

$$Y(s) = \frac{G(s) + y_0[as + b] + y_1[a]}{as^2 + bs + c}$$

III שלב

מבצעים התמרת לפלס הפוכה לשני האגפים של המשוואה האחרונה ומקבלים את $y(t)$:

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{G(s) + y_0[as + b] + y_1[a]}{as^2 + bs + c} \right]$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(for $n = 1, 2, 3 \dots$) t^n
$\frac{1}{s^n}$	(for $n = 1, 2, 3 \dots$) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$

$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \sin at$
$\frac{s+b}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-3/2}$	\sqrt{t}
$\sqrt{\pi} s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות:

1.
 נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$ של פונקציה $f(t)$
 ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
 אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

2. קונולוציה :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

פתרון מד"ר בעזרת טורים - נקודה רגולרית

נתונה מד"ר מסדר שני : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x) = r(x)$

I שלב

מציבים במד"ר :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

$$+ a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2}$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots$$

$$+ (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$

$$+ (n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-4} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

II שלב

משווים את המקדם של x^n באגף ימין עם המקדם של x^n באגף שמאל ומקבלים נוסחת נסיגה עבור a_n .

III שלב

במידה ונוסחת הנסיגה לא נותנת את כל המקדמים a_0, a_1, \dots משווים מקדמים של חזקות שוות בשני האגפים (מהחזקה הקטנה ביותר ומעלה) עד לקבלת כל המקדמים הדרושים.

הערות:

1. אם במד"ר המקורית מופיעה פונקציה שהיא איננה פולינום, מחליפים אותה בטור מקלורן שלה. (רשימת טורים בעמוד האחרון בחוברת www.gool.co.il/hedva1.pdf).

2. שים לב כי בהינתן תנאי התחלה, מתקיים: $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$. במידה ולא נתון תנאי התחלה אנו מניחים ש- a_0 ו- a_1 ידועים ומבטאים את יתר המקדמים בעזרתם.

3. באופן דומה פותרים מד"ר מכל סדר בעזרת טורים. בהקשר זה יש לזכור כי, $y^{(n)}(0) = n!a_n, \dots, y^{(4)}(0) = 4!a_4, y^{(3)}(0) = 3!a_3, y''(0) = 2!a_2$.

פתרון מערכת מד"ר כללית 2×2 - שיטת החילוף

נתונות שתי משוואות עם פונקציות $y(x)$ ו- $z(x)$ כך שלפחות אחת מהן משוואה דיפרנציאלית.

אסטרטגיית הפתרון:

נחלץ את אחת הפונקציות ממשוואה אחת ונציב במשוואה השנייה.

במידה והתהליך אינו מתאפשר ניתן לגזור את המשוואות. למשל, אם נתונה המערכת

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - z'' + 3z = x^2 & (2) \end{cases}$$

נגזור את המשוואה השנייה. נחלץ מהמשוואה השנייה את y'' ונציב אותו במשוואה הראשונה.

פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - שיטת הלכסון

מערכת הומוגנית:

מערכת מהצורה:

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\&\vdots \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}$$

או בכתיב מטריצות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}(t)}$$

אלגוריתם פתרון:

שלב I

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (ה-ע"ע לא בהכרח שונים).

שלב II

מצא את הוקטורים העצמיים של המטריצה A : v_1, v_2, \dots, v_n

שלב III

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

מערכת לא הומוגנית:

מערכת מהצורה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\underline{b}(t)}$$

אלגוריתם פתרון (וריאציית פרמטרים):

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}(t))$ הוא הסכום של הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה $(\underline{x}_h(t))$ ופתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}_p(t))$.

כלומר: $\underline{x}(t) = \underline{x}_h(t) + \underline{x}_p(t)$

שלב I

פתור את המערכת ההומוגנית המתאימה ונקבל: $\underline{x}_h(t) = c_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t} v_1}_{\underline{x}_1} + c_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t} v_2}_{\underline{x}_2} + \dots + c_n \underbrace{e^{\lambda_n t} v_n}_{\underline{x}_n}$

שלב II

פתור את מערכת המשוואות הבאה עבור הנעלמים $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \vdots & \underline{x}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

שלב III

בצע אינטגרציה לקבלת $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$

שלב IV

הפתרון הפרטי הוא: $\underline{x}_p(t) = C_1(t) \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2(t) \cdot e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + C_n(t) \cdot e^{\lambda_n t} v_n$

הערה: האלגוריתם הנ"ל עובד אם ורק אם למטריצה יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

פתרון נומרי (מקורב) של מד"ר מסדר ראשון (שיטת רונגה-קוטה)

נתונה מד"ר מסדר ראשון $y' = f(x, y)$.

נתון: $y(x_0) = y_0$

מחפשים: $y(x_1)$

תשובה: $y(x_1) = y_0 + k$

כאשר:

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$h = x_1 - x_0$$

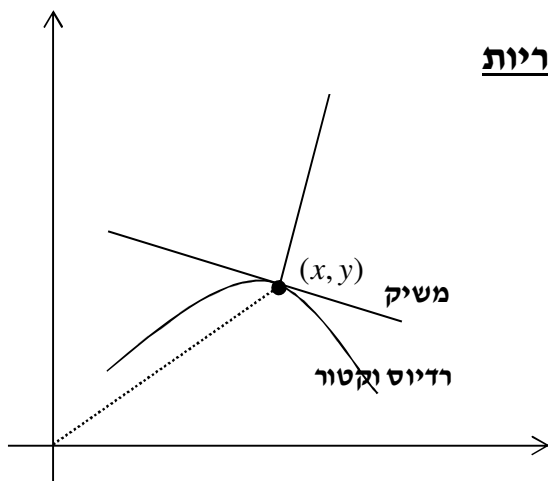
בעיות מילוליות גיאומטריות

נורמל

שיפוע המשיק לעקום בנקודה (x, y) . $\frac{dy}{dx}$

שיפוע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) . $-\frac{dx}{dy}$

שיפוע רדיוס וקטור. $\frac{y}{x}$



$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x)$ משוואת המשיק לעקום בנקודה (x, y) באשר (x_1, y_1) נקודה כלשהי על המשיק.

$y_1 - y = -\frac{dx}{dy}(x_1 - x)$ משוואת הנורמל לעקום בנקודה (x, y) באשר (x_1, y_1) נקודה כלשהי על הנורמל.

חיתוך המשיק עם ציר x וציר y בהתאמה: $x - y \frac{dx}{dy}$ ו- $y - x \frac{dy}{dx}$

חיתוך הנורמל עם ציר x וציר y בהתאמה: $x + y \frac{dy}{dx}$ ו- $y + x \frac{dx}{dy}$

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \leq x \leq b$ הוא $\int_a^b y(x) dx$.

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \leq x \leq b$ מסתובב סביב ציר x . הנפח: $\pi \int_a^b y^2(x) dx$

מציאת מסילות אורתוגונליות למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x, y, c) = 0$ למציאת משפחת העקומות האורתוגונליות:

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)

ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $-\frac{dx}{dy}$.

ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.

מציאת מסילות בזוית θ למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x, y, c) = 0$ למציאת משפחת העקומות בזוית θ :

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)

ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $\frac{y' - \tan \theta}{1 + y' \tan \theta}$.

ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.