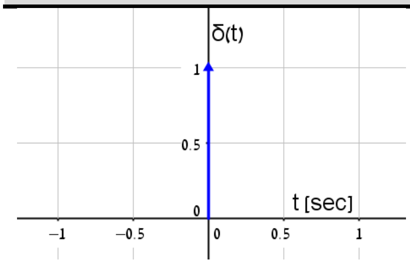
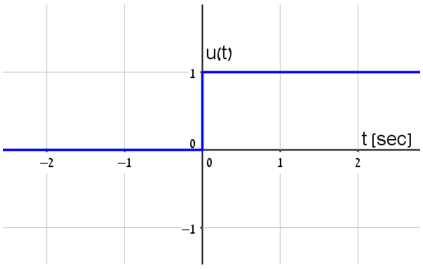
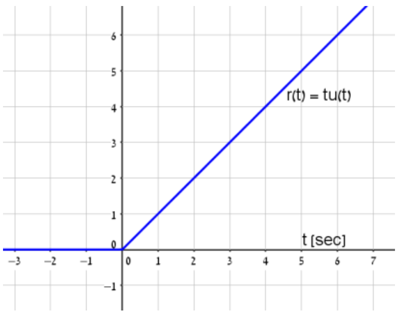
תוכן העניינים:

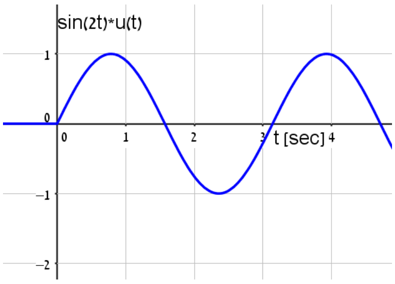
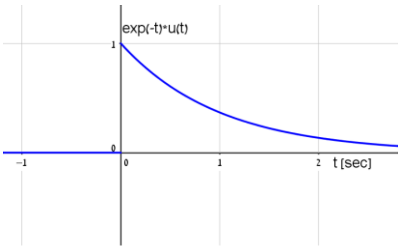
פרק 6

תופעות מעבר במעגלים מסדר ראשון ושני

עירורי כניסה שונים:

סוגי עירורי כניסה:

סוג העירור	תיאור מתמטי	תיאור גרפי
כניסת הלם (דלתא)	$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$	
כניסת מדרגה	$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$	
כניסת רמפה	$r(t)=ramp(t)=tu(t)$	

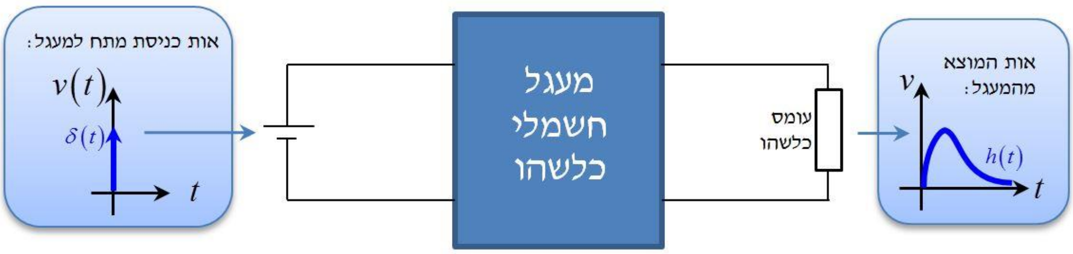
כניסה סינוסית	$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)u(t)$	
כניסה מעריכית דועכת	$f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$	

קשרים בין פונקציות:

- קשר בין הלם למדרגה: $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.
- קשר בין מדרגה ורמפה: $\frac{dr(t)}{dt}=u(t)$.
- קשרים בין הלם, מדרגה ורמפה (מוכלל): $\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.
- הכפלה בפונקצית דלתא: $f(t)\cdot\delta(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$.

תגובה להלם של מערכת ליניארית:

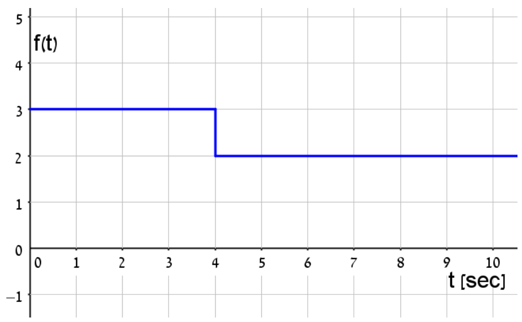
תגובה להלם מוגדרת להיות תגובת מוצא המעגל כאשר בכניסתו ישנה פונקצית דלתא. מקובל לסמן את התגובה להלם ב-$h(t)$:



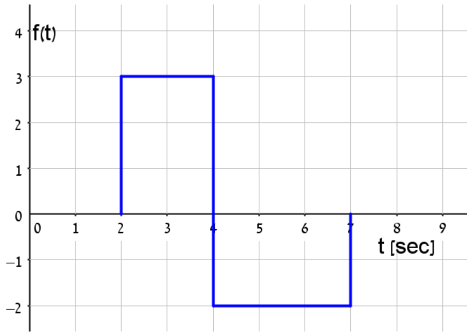
תרגילים:

1) כתוב ביטוי מתמטי לכל אחד מאותות הכניסה במקרים הבאים :

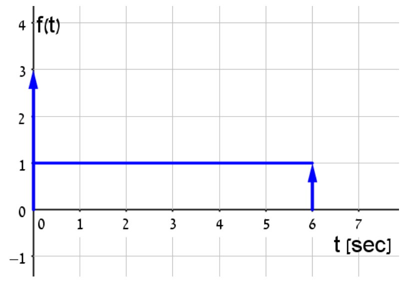
א.



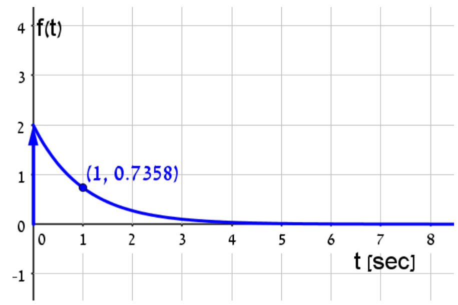
ב.



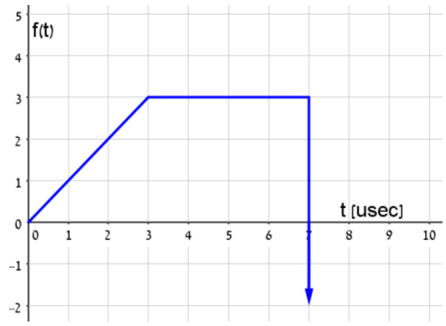
ג.



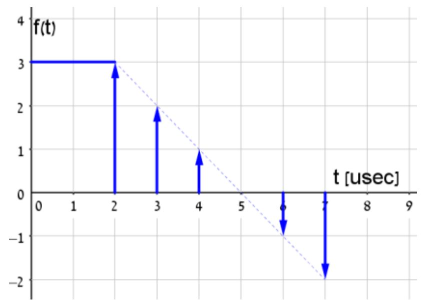
ד.



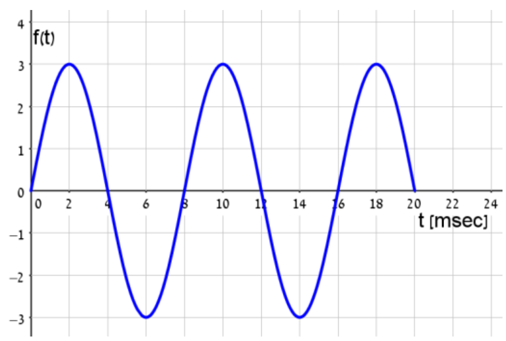
ה.



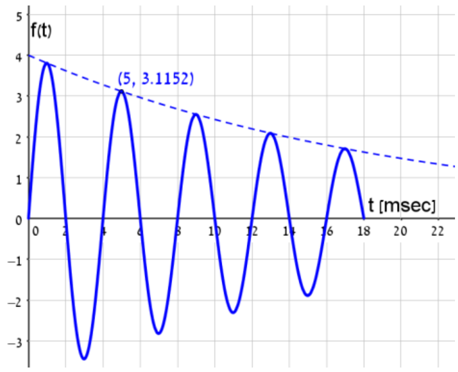
ו.



ז.



ח.



2) צייר את צורות הגל המתאימות בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $f(t)=2u(t)-3u(t-1)$

ב. $f(t)=3t\left[u(t)-u(t-5)\right]$

ג. $f(t)=10\sin(30t)u(t)$

ד. $f(t)=e^{-2t}\left(\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\right)$

ה. $f(t)=6\sin(10t)\left[u(t-1)-u(t-6)\right]$

ו. $f(t)=e^{-0.1t}\cos(4t)u(t)$

ז. $f(t)=e^{-10t}u(t)-2\delta(t)$

ח. $f(t)=\left(e^{-5t}-3e^{-15t}\right)\cdot\left(\delta(t)+u(t)\right)$

ט. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k)$

י. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}4^{2-t}\delta(t-k)$

3) חשב את הביטויים הבאים :

א. $\left(t^2-3t\right)\delta(t)$

ב. $\left(t^2-3t\right)\delta(t-2)$

ג. $t\cdot e^{-t}\left[\delta(t-1)-5\delta(t-2)\right]$

ד. $e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\left[\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]$

ה. $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-t}\delta(t-k)$

ו. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta(t-k)}{t^2}$

4) גזור את הפונקציות הזמניות הבאות :

א. $f(t)=e^{-20t}u(t)$

ב. $f(t)=\sin(\omega t)u(t)$

ג. $f(t)=tu(t)$

ד. $f(t)=t^2u(t)$

ה. $f(t)=e^{-5t}\left(\cos 3t-3\sin 3t\right)u(t)$

ו. $f(t)=\sum_{k=1}^{N}ku(t-k)$

ז. $f(t)=\delta(t)+\sum_{k=1}^{N}e^{-10kt}u(t-2k)$

תשובות סופיות:

1) א. $f(t)=3u(t)-u(t-4)$ ב. $f(t)=3u(t-2)-5u(t-4)+2u(t-7)$.

ג. $f(t)=3\delta(t)+\delta(t-6)+u(t)-u(t-6)$ ד. $f(t)=2\delta(t)+e^{-t}u(t)$.

ה. $f(t)=t\left[u(t)-u(t-3)\right]+3\left[u(t-3)-u(t-7)\right]-2\delta(t-7)$.

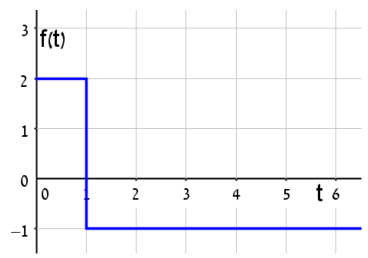
ו. $f(t)=3\left[u(t)-u(t-2)\right]+\sum_{k=2}^{7}(5-k)\delta(t-k)$.

ז. $f(t)=3\sin(250\pi t)\left[u(t)-u(t-0.02)\right]$.

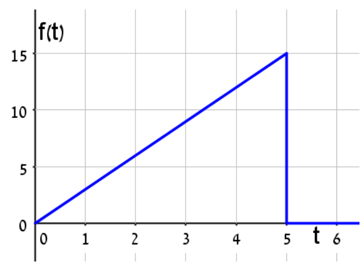
ח. $f(t)=4\sin(500\pi t)e^{-50t}\left[u(t)-u(t-0.018)\right]$.

2) להלן תוצאות התיאורים הגרפיים:

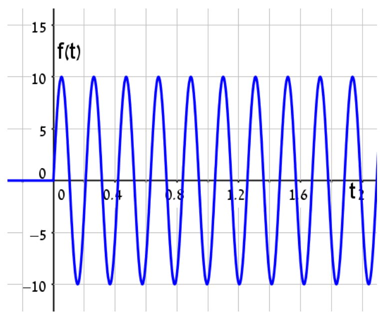
א.



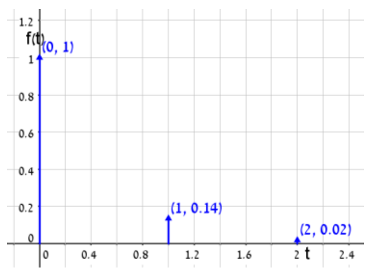
ב.



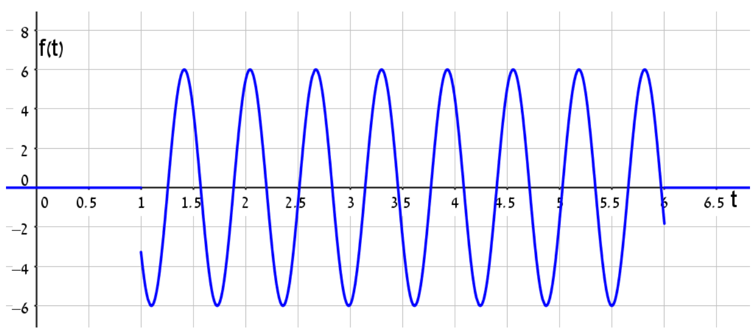
ג.



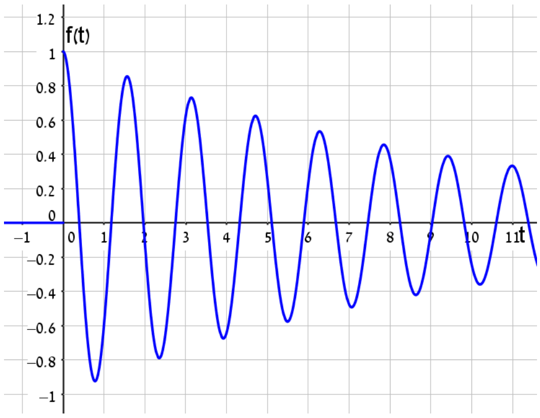
ד.



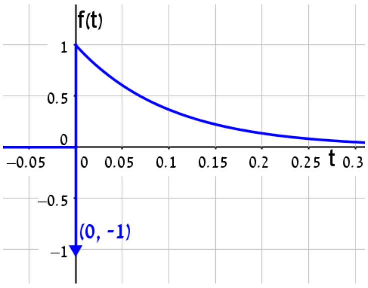
ה.



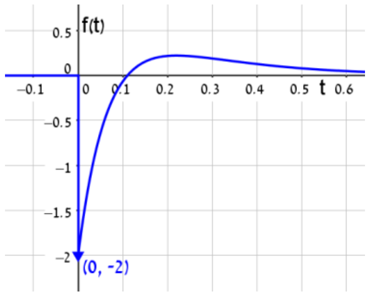
ו.



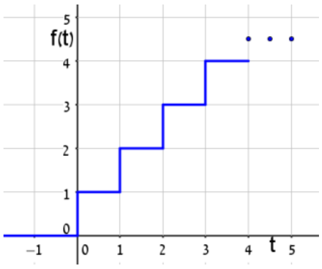
ז.



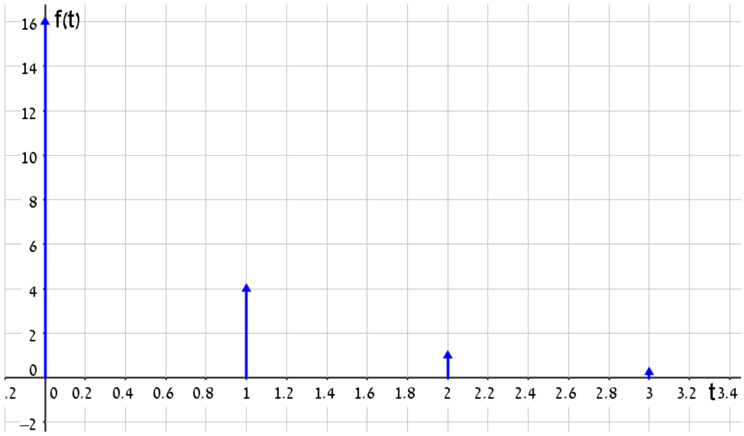
ח.



ט.



י.



3) א. 0 ב. $-2\delta(t-2)$ ג. $e^{-1}\delta(t-1)-10e^{-2}\delta(t-2)$

ד. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2}\delta(t-1)+e^{-4}\delta(t-2)$ ה. $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}\delta(t-k)$ ו. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\delta(t-k)$.

4) א. $f'(t)=-20e^{-20t}u(t)+\delta(t)$ ב. $f'(t)=\omega\cos(\omega t)u(t)$ ג. $f'(t)=u(t)$

ד. $f'(t)=2tu(t)$ ה. $f'(t)=2e^{-5t}(6\sin 3t-7\cos 3t)u(t)+\delta(t)$

ו. $f'(t)=\sum_{k=1}^{N}k\delta(t-k)$ ז. $f'(t)=\delta'(t)+\sum_{k=1}^{N}\left[-10ke^{-10kt}u(t-2k)+e^{-20k^2}(t-2k)\right]$.

מד"ר מסדר ראשון וסוגי פתרונות:

תבנית כללית של מד״ר מסדר ראשון:

נעסוק במד״ר מהצורה: $y'(x)+ay(x)=f(x)$ כאשר יש למצוא את $y(x)$ ונתונה פונקציה כלשהי $f(x)$.

בקורס שלנו נעסוק בפונקציות זמניות, ולכן נחליף $x\to t$ ונכתוב משוואות עבור אות זרם ואות מתח:

משוואה עבור אות מתח	משוואה עבור אות זרם
$\boxed{\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)}$	$\boxed{\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=f(t)}$

כאשר τ (בשתי הצורות) הוא קבוע כלשהו שערכו נקבע לפי רכיבי המעגל ו- $f(t)$ הינה פונקציה זמנית כלשהי המתארת התנהגות של אות מתח/זרם.

סוגי משוואות ודרך פתרון:

משוואה הומוגנית:

משוואה הומוגנית היא משוואה אגף ימין שלה הוא אפס: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0$.

במילים אחרות, משוואה הומוגנית מקיימת: $f(t)=0$.

הפתרון הוא: $v(t)=v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ - אות מתח, $i(t)=i_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ - אות זרם.

פתרון זה נקרא **הפתרון ההומוגני של המשוואה** ומסומן: $v_h(t)$, $i_h(t)$.

תנאי התחלה:

ערך הפונקציה בזמן מוגדר נקרא תנאי התחלה של המשוואה.

במקרים שלנו נעסוק בזמן $t=0^+$ ולכן נקבל: $v(t=0^+)=v_0$ או $i(t=0^+)=i_0$.

עבור משוואות הומוגניות מתקיים: $f(t=0^-)=f(t=0^+)$ כאשר f היא פונקציה של מתח או זרם.

משוואה לא הומוגנית:

משוואה שאינה הומוגנית מכילה פונקציה $f(t)$ כלשהי.

כלומר: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ עבור אות מתח, או $\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=f(t)$ עבור אות זרם.

פתרון משוואה שאינה הומוגנית יכתב ע״י הסכום של פתרון הומוגני + פתרון פרטי.

דוגמא עבור מתח: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ נקבל: $v(t)=v_h(t)+v_p(t)$.

דוגמא עבור זרם: $\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=f(t)$ נקבל: $i(t)=i_h(t)+i_p(t)$.

שלבי פתרון מד״ר לא הומוגנית:

1. מנחשים פתרון פרטי:
   - אם קיים פולינום מסדר n ננחש פולינום מסדר n.
   - אם קיים ביטוי מעריכי מהצורה $f(t)=Ce^{-\alpha t}$ ננחש: $v_p(t)=Ce^{-\alpha t}$.
   - אם קיים ביטוי מעריכי מהצורה $f(t)=P_n(t)e^{-\alpha t}$ כאשר $P_n(t)$ הוא פולינום מסדר n כלשהו, ננחש: $v_p(t)=Q_n(t)e^{-\alpha t}$ כאשר $Q_n(t)$ גם הוא פולינום (מלא) מסדר n.
   - אם מתקיים: $\alpha=\frac{1}{\tau}$ וישנו: $f(t)=Ce^{-\alpha t}$, נצטרך לנחש: $v_p(t)=(At+B)e^{-\alpha t}$.
   - אם קיים ביטוי טריגונומטרי מהצורה $f(t)=A\sin(\omega_0 t)$ או מהצורה: $f(t)=A\cos(\omega_0 t)$, ננחש: $v_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$.
2. גוזרים את הפתרון הפרטי ומציבים במשוואה כדי למצוא את המקדם.
3. כותבים פתרון מלא (הומוגני + פרטי).
4. מציבים בפתרון המלא את תנאי ההתחלה למציאת המקדם.
5. כותבים פעם נוספת את הפתרון המלא.

פתרונות ZIR ו-ZSR:

פתרון ZIR:

פתרון המהווה את התגובה הטבעית של המעגל כאשר לא מוכנס עירור חיצוני.
מצב זה נקרא כניסת אפס למעגל, או Zero Input Response (ZIR).
המשוואה המתארת את מצב ZIR היא: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0$ עם: $v(0^+)=v_0$.
הפתרון כאן הוא הפתרון ההומוגני בלבד וזהו: $v(t)=v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$.
ניתן לראות כי תנאי ההתחלה מייצג את האנרגיה האגורה במעגל החשמלי.
לכן אם אין אנרגיה לא נקבל פתרון ZIR מכיוון שאין למעגל תגובה טבעית.

פתרון ZSR:

הפתרון זה הוא מציאת תגובת המעגל לעירור החיצוני.
יש לאפס את תנאי ההתחלה ולקחת את גורם העירור.
מצב זה נקרא Zero state response (ZSR) מכיוון שמצב המעגל שרוי ללא אנרגיה בתחילה.
המשוואה היא: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ עם תנאי התחלה: $v(0^+)=0$.
יש לפתור לפי העיקרון של פתרון הומוגני + פרטי.

סיכום פתרונות:

- פתרון כללי של המשוואה יחולק: $v(t)=v_{ZIR}(t)+v_{ZSR}(t)$.
- פתרון ZIR: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0$ עם: $v(0^+)=v_0$ צורתו: $v_{ZIR}(t)=v_h(t)$.
- פתרון ZSR: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ עם: $v(0^+)=0$ צורתו: $v_{ZSR}(t)=v_h(t)+v_p(t)$

.

הכללת פתרונות ZSR:

פתרון משוואה בעלת N עירורים: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\sum_{k=1}^{N}f_k(t)$ הוא: $v(t)=v_{ZIR}(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{ZSRk}(t)$.

רציפות תנאי התחלה ואיזון הלמים:

פתרון ZSR קיים כאשר יש למעגל עירור חיצוני.
תנאי ההתחלה במשוואה עבור פתרון ZSR הוא עבור הרגע $t=0^+$.
כל עירור כניסה למעט $\delta(t)$ גורר כי האות $v(t)$ יהיה רציף ב-$t=0$, ז"א: $v(0^-)=v(0^+)$.
יש למצוא את תנאי ההתחלה $v(0^+)=?$ או $i(0^+)=?$ במד"ר: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=C\delta(t)$
או $\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=C\delta(t)$, כאשר $v(0^-)=0$ או $i(0^-)=0$ בהתאמה.

איזון הלמים:

המערכת: $\begin{cases} y^{(N)}(t)+...+a_0y^{(0)}(t)=C\cdot\delta(t) \\ y^{(N-1)}(0^-)=...=y(0^-)=0 \end{cases}$

שקולה למערכת: $\begin{cases} y^{(N)}(t)+...+a_0y^{(0)}(t)=0 \\ y^{(N-1)}(0^+)=C,\ \ y^{(N-2)}(0^+)...=y(0^+)=0 \end{cases}$.

איזון הלמים במד"ר מסדר ראשון (במקרה שלנו):

יש להוסיף את ערך הקבוע C לתנאי ההתחלה: $v(0^+)=v(0^-)+C=C$.

תרגילים:

1) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=0$, כאשר $\tau=\frac{1}{4}\sec$ ו- $i(0^-)=5A$.

א. מהו פתרון ZIR ופתרון ZSR של המשוואה?

ב. כתוב את הפתרון הכללי.

2) פתור את המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=0$, $\tau=\frac{1}{2}\sec$, $v(0^-)=1v$.

3) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=5\cdot u(t)$ כאשר $\tau=40m\sec$.

מהו פתרון המשוואה עבור כל אחד מתנאי ההתחלה הבאים:

א. $i(0^-)=0A$.

ב. $i(0^-)=3A$.

4) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=6\cdot\sin(4t)\cdot u(t)$ כאשר $\tau=20m\sec$

ו- $i(0^-)=3mA$. מצא את הפתרון הכללי של $i(t)$.

5) מצא את הפתרון הכללי של המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=e^{-4t}u(t)$

אם ידוע כי $\tau=0.25\sec$ ותנאי ההתחלה הוא $v(0^+)=30mv$.

6) פתור את המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=4\delta(t)-3\cdot\cos(2t)\cdot u(t)$

כאשר: $\tau=1\sec$ ו- $i(0^-)=200mA$.

7) נתונה המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=2\delta(t)+5\cdot\sin(3t)\cdot u(t)+e^{-12t}\cdot u(t)+2e^{-10t}\cdot u(t)$.

מצא את הפתרון הכללי עבור $v(t)$ כאשר $\tau=0.1\sec$ ו- $v(0^-)=0v$.

תשובות סופיות:

1) א. $i_{ZSR}(t)=0\ ,\ i_{ZIR}(t)=5e^{-4t}\ ;\ t\geq 0$ ב. $i(t)=i_{ZIR}(t)=5e^{-4t}\ ;\ t\geq 0$.

2) $v(t)=v_{ZIR}(t)=e^{-2t}\ ;\ t\geq 0$.

3) א. $i(t)=i_{ZIR}(t)=\frac{1}{5}\left(1-e^{-25t}\right)\ ;\ t\geq 0$ ב. $i(t)=\frac{1}{5}+2\frac{4}{5}e^{-25t}\ ;\ t\geq 0$.

4) $i(t)=12.4\cdot 10^{-3}e^{-50t}+0.119\sin 4t-9.54\cdot 10^{-3}\cos 4t\ \ ;\ t\geq 0$.

5) $v(t)=e^{-4t}\left(t+0.03\right)\ ;\ t\geq 0$.

6) $i(t)=\left[4.8e^{-t}-0.6\cos 2t-1.2\sin 2t\right]u(t)$.

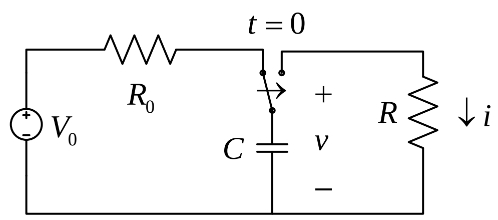
7) $v(t)=\left(\frac{575}{218}+2t\right)e^{-10t}-\frac{1}{2}e^{-12t}+\frac{1}{109}\left(50\sin 3t-15\cos 3t\right)\ ;\ t\geq 0$.

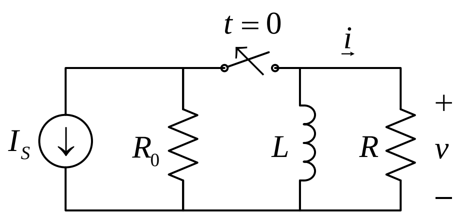
ייצוג מעגלים מסדר ראשון ותופעות מעבר:

התגובה הטבעית של מעגלים מסדר ראשון:

תיאור כללי של מעגלי RL ו-RC:

נתון מעגל המכיל מקור אנרגיה שטוען את הסליל/הקבל.
בזמן $t=0$ פותחים את המפסק והסליל/הקבל פורקים את האנרגיה שלהם.





משוואות דיפרנציאליות המתקבלות בכל מעגל:

מד"ר ליניארית מסדר ראשון עבור מעגל RL: $\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}+Ri=0 \\ i_L(0)=I_S \end{cases}$.

מד"ר ליניארית מסדר ראשון עבור מעגל RC: $\begin{cases} C\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{R}=0 \\ u_C(0)=V_0 \end{cases}$.

אותות זרם, מתח, הספק ואנרגיה המתקבלים מפתרון המשוואות:

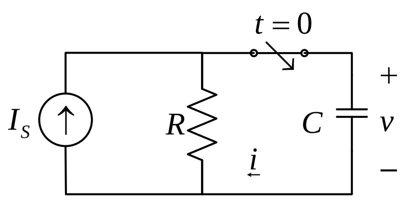
סוג אות	מעגל RL	מעגל RC
זרם	$i(t)=I_0e^{-t/\tau}$	$i(t)=\dfrac{V_0}{R}e^{-t/\tau}$
מתח	$v(t)=I_0R\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$v(t)=V_0e^{-t/\tau}$
הספק	$P(t)=I_0^2R\cdot e^{-2t/\tau}$	$P(t)=\dfrac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau}$
אנרגיה	$E(t)=\dfrac{1}{2}LI_0^2\left(1-e^{-2t/\tau}\right)$	$E(t)=\dfrac{1}{2}CV_0^2\left(1-e^{-2t/\tau}\right)$

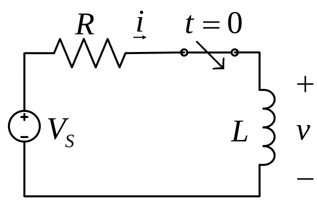
קבוע הזמן במעגל RL הוא: $\tau=L/R_{eq}$ וקבוע הזמן במעגל RC הוא: $\tau=R_{eq}C$
כאשר R_{eq} הוא ההתנגדות השקולה שרואה הסליל/קבל.

התגובה למדרגה של מעגלים מסדר ראשון:

תיאור כללי של מעגלי RL ו-RC:

כאשר סוגרים את המפסק ומקור האנרגיה חוזר למעגל מתקבלת תגובה מדרגה.





משוואות דיפרנציאליות המתקבלות בכל מעגל:

מד"ר ליניארית מסדר ראשון עבור מעגל RL:

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}+Ri=V_S \\ i_L(0)=I_0 \end{cases}.$$

מד"ר ליניארית מסדר ראשון עבור מעגל RC:

$$\begin{cases} C\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{R}=I_S \\ u_C(0)=V_0 \end{cases}.$$

פתרון כללי של המשוואות:

אות זרם במעגל RL:

$$i(t)=\frac{V_S}{R}+\left(I_0-\frac{V_S}{R}\right)e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau=L/R_{eq}.$$

אות מתח במעגל RC: $\tau=R_{eq}C \quad , \quad v_c(t)=I_SR+(V_0-I_SR)e^{-t/\tau}$.

הכללה למשוואת הדפקים:

ניתן לכתוב את הביטויים הזמניים של אות המתח והזרם באופן כללי בצורה הבאה:

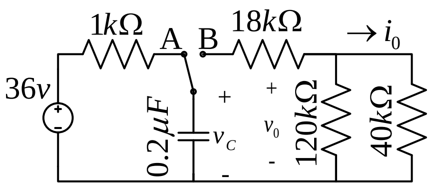
$$\text{האות הרצוי כתלות בזמן } t = \text{הערך הסופי של האות } (t=\infty \text{ :עבור}) + \left(\text{הערך ההתחלתי של האות } (t=t_0 \text{ :עבור}) - \text{הערך הסופי של האות } (t=\infty \text{ :עבור})\right)\times \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

תרגילים:

1) במעגל שלפניך כל הערכים מופיעים בסכמה החשמלית הבאה:

המפסק נמצא במצב A למשך הרבה זמן.

בזמן $t=0$ מעבירים אותו למצב B באופן מיידי.



א. מצא את הביטוי הזמני $v_C(t)$ עבור: $t\geq 0$.

ב. מצא את הביטוי הזמני $v_0(t)$ עבור: $t\geq 0$.

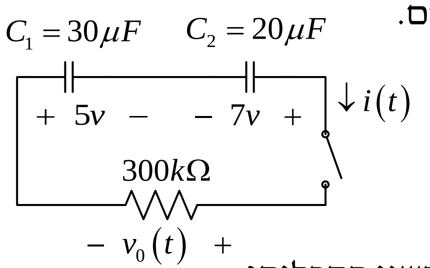
ג. מצא את הביטוי הזמני $i_0(t)$ עבור: $t\geq 0$.

ד. חשב את האנרגיה הכוללת שהתפרקה על פני הנגד של $40k\Omega$.

2) במעגל שלפניך כל הערכים מופיעים בסכמה החשמלית הבאה.

ערכי המתח ההתחלתיים של הקבלים מצוינים לידם.

בזמן $t=0$ סוגרים את המפסק.



א. מצא את הביטויים הזמניים

של: $v_2(t)$, $v_1(t)$, $v_0(t)$ עבור: $t\geq 0$

ואת $i(t)$ עבור $t\geq 0^+$.

ב. מהי האנרגיה ההתחלתית הכוללת האגורה בשני הקבלים?

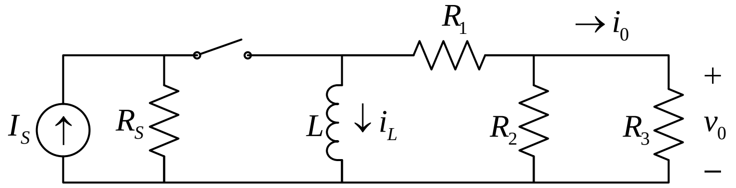
ג. קבע כמה אנרגיה תהיה בקבלים כאשר $t\to\infty$.

ד. הראה כי האנרגיה שהועברה לנגד שווה להפרש בין התוצאות שהושגו בסעיפים ב' ו-ג'.

3) במעגל שלפניך נתונים ערכי הרכיבים הבאים:

$I_S=20\text{A}$, $R_S=0.1\Omega$, $L=3.3\text{H}$, $R_1=2\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=20\Omega$

המפסק היה סגור במשך הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.



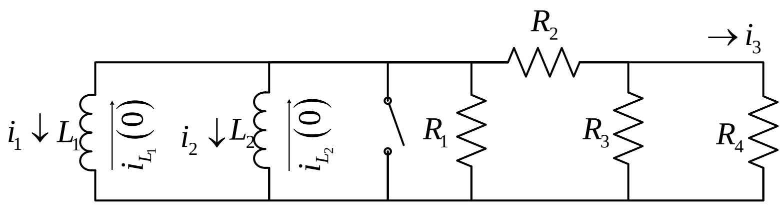
א. מצא ביטוי זמני ל- $i_L(t)$ עבור: $t\geq 0$.

ב. מצא ביטוי זמני ל- $i_0(t)$ עבור: $t\geq 0^+$.

ג. מצא ביטוי זמני ל- $v_0(t)$ עבור: $t\geq 0^+$.

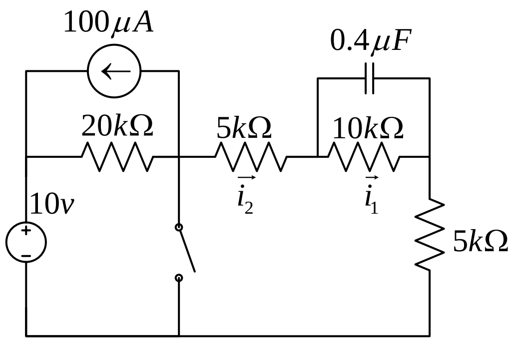
ד. מצא את האחוז מהאנרגיה הכללית שאגורה בסליל, אשר התפרקה על הנגד R_2.

4) במעגל שלפניך נתונים ערכי הרכיבים הבאים:
$L_1 = 4\text{H}\ ,\ L_2 = 16\text{H}\ ,\ R_1 = 10\Omega\ ,\ R_2 = 20\Omega\ ,\ R_3 = 40\Omega\ ,\ R_4 = 40\Omega$
הסלילים $L_1\ ,\ L_2$ נטענו מבעוד מועד וכעת מחזיקים את
הזרמים: $i_{L_1}(0) = 8\text{A}\ ,\ i_{L_2}(0) = 6\text{A}$. פותחים את המפסק בזמן $t = 0$.



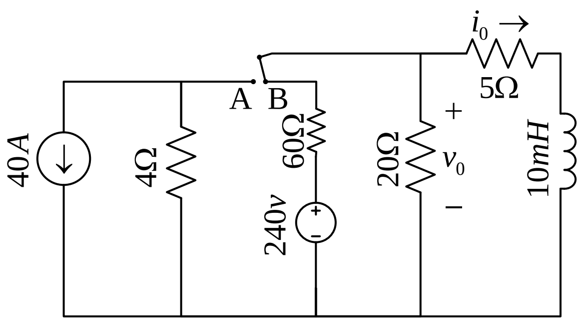
א. מצא את ערכי הביטויים הזמניים של $i_1\ ,\ i_2\ ,\ i_3$ עבור: $t \geq 0$.
ב. מהי האנרגיה ההתחלתית האגורה בשני הסלילים יחדיו?
ג. כמה אנרגיה תהיה בסלילים כאשר $t \to \infty$?
ד. הראה כי האנרגיה הכוללת שהועברה לרשת הנגדים שווה להפרש בין התוצאות של סעיפים ב' ו-ג'.

5) במעגל שלפניך נתונים הערכים המופיעים בתרשים.
המפסק נסגר ברגע $t = 0$ לאחר שהיה פתוח במשך הרבה זמן.



א. מצא את $i_1(0^-)$ ואת $i_2(0^-)$.
ב. מצא את $i_1(0^+)$ ואת $i_2(0^+)$.
ג. הסבר מדוע $i_1(0^-) = i_1(0^+)$.
ד. הסבר מדוע $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$.
ה. מצא את $i_1(t)$ עבור: $t \geq 0$.
ו. מצא את $i_2(t)$ עבור: $t \geq 0^+$.

6) המפסק במעגל שלפניך היה במצב A למשך הרבה זמן. ברגע $t = 0$ העבירו אותו באופן מיידי למצב B.
מצא ביטויים מספריים עבור $i_0(t)$ ל- $t \geq 0$
ועבור $v_0(t)$ ל- $t \geq 0^+$.



תשובות סופיות:

1) א. $t \geq 0 \quad v_C(t) = 36e^{-104\frac{1}{6}t}[\mathrm{V}]$ ב. $t \geq 0 \quad v_0(t) = 22.5e^{-104\frac{1}{6}t}[\mathrm{V}]$

ג. $t \geq 0 \quad i_0(t) = 562.5e^{-104\frac{1}{6}t}[\mu\mathrm{A}]$ ד. $E = 60.75\mu\mathrm{J}$

2) א. $t \geq 0 \quad v_2(t) = 1.2e^{-\frac{t}{3.6}} + 5.8[\mathrm{V}]$, $v_1(t) = 0.8e^{-\frac{t}{3.6}} - 5.8[\mathrm{V}]$, $v_0(t) = 2e^{-\frac{t}{3.6}}[\mathrm{V}]$

$t \geq 0^+ \quad i(t) = 6\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{3.6}}[\mu\mathrm{A}]$

ב. $E_0 = 865\mu\mathrm{J}$ ג. $E_0(t \to \infty) = 841\mu\mathrm{J}$

3) א. $t \geq 0 \quad i_L(t) = 20e^{-\frac{20}{11}t}[\mathrm{A}]$ ב. $t \geq 0^+ \quad i_0(t) = -4e^{-\frac{20}{11}t}[\mathrm{A}]$

ג. $t \geq 0^+ \quad v_0(t) = -80e^{-\frac{20}{11}t}[\mathrm{V}]$ ד. $53\frac{1}{3}\%$

4) א. $t \geq 0 \quad i_1(t) = 3.2 - 11e^{-2.5t}[\mathrm{A}]$, $t \geq 0 \quad i_2(t) = -3.2 - 2.8e^{-2.5t}[\mathrm{A}]$,

$t \geq 0 \quad i_3(t) = 1.4e^{-2.5t}[\mathrm{A}]$ ב. $E = 416\mathrm{J}$

ג. $E\ (t \to \infty) = 102.4\mathrm{J}$

5) א. $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0.2\mathrm{mA}$ ב. $i_1(0^+) = -i_2(0^+) = 0.2\mathrm{mA}$

ג. הקבל רציף לעניין מתח: $v_C(0^+) = v_C(0^+)$.

היות והזרם i_1 מאולץ ע"י ממתח הקבל הרי שמתקיים: $i_1(0^-) = i_1(0^+)$.

ד. פעולת המיתוג על רשת נגדים גוררת שינוי מיידי בכיוון הזרם ברשת.

לכן: $i_2(0^-) = -i_2(0^+)$.

ה. $t \geq 0 \quad i_1(t) = 0.2e^{-500t}[\mathrm{mA}]$ ו. $t \geq 0 \quad i_2(t) = -0.2e^{-500t}[\mathrm{mA}]$

6) $t \geq 0 \quad i_0(t) = 3 - 19e^{-2000t}[\mathrm{A}]$, $t \geq 0 \quad v_0(t) = 15 + 285e^{-2000t}[\mathrm{V}]$.

ניתוח מתקדם של מעגלים מסדר ראשון:

תזכורת - קשרים כלליים בין מתח ובזרם בקבל ובסליל:

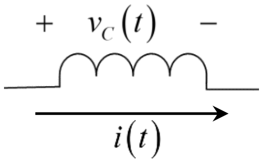
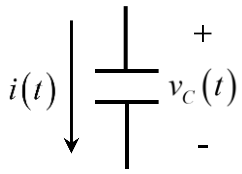
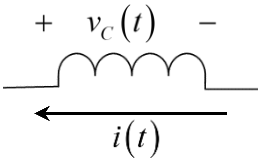
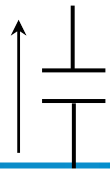
- עבור קבל מתקיים: $i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$.
  כתיבה בצורה האינטגרלית: $v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(x)dx=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(x)dx+v_0$.
- עבור סליל מתקיים: $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$
  כתיבה בצורה האינטגרלית: $i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(x)dx=\frac{1}{L}\int_{0}^{t} v_L(x)dx+i_0$.

גישת פתרון לשאלות:

תיאור המקרה - מתבקשים למצוא זרם על פני קבל או מתח על פני סליל.

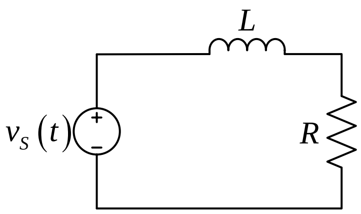
- פתרון ע"י משוואה אינטגרלית – יש לדעת את ערכי האנרגיה ההתחלתיים בכל רכיב.
- פתרון ע"י משוואה מתאימה לכל רכיב:
- נחבר משוואה למציאת אות המתח בקבל או אות הזרם בסליל.
- נעזר בתכונות:
  $i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$ - כדי למצוא את אות הזרם בקבל.
  $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$ - כדי למצוא את אות המתח בסליל.

סימני זרמים ומתחים:

סליל	קבל
 $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$	$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$ 
 $v_L(t)=-L\frac{di_L(t)}{dt}$	$i_C(t)=-C\frac{dv_C(t)}{dt}$ 

תרגילים:

1) לפניך המעגל הבא ובו: $L=6\text{H}$, $R=3\Omega$.



מקור המתח הוא: $v_S(t)=40e^{-0.1t}u(t)$.

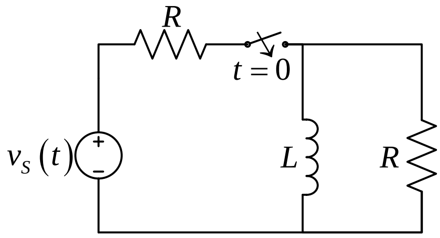
א. כתוב משוואה דיפרנציאלית עבור הזרם במעגל.

ב. מצא את האות $i(t)$ עבור תנאי ההתחלה הבאים:

i. $i(0^+)=0\text{A}$.

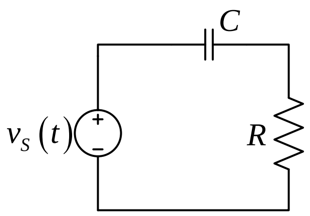
ii. $i(0^+)=1\text{A}$.

2) במעגל שלפניך המפסק פתוח למשך הרבה זמן.



בזמן $t=0$ סוגרים אותו. נתון: $R=4\Omega$, $L=1\text{H}$.
מצא את $v_L(t)$ עבור $t\ge 0$ כאשר מקור המתח הוא $v_S(t)=3u(t)$ והזרם בסליל רגע לפני סגירת המפסק הוא $200\,\text{mA}$.

3) במעגל שלפניך מתח המקור הוא $v_S(t)=30e^{-25t}u(t)$.

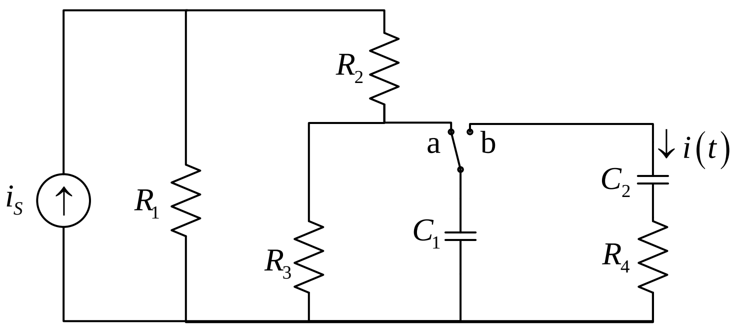


בתחילה הקבל אינו טעון כלל.
נתון: $R=1.25\,\text{k}\Omega$, $C=80\,\mu\text{F}$.

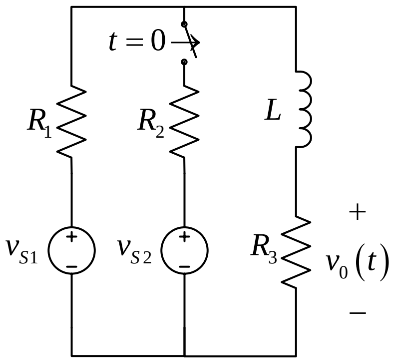
א. מצא את אות הזרם במעגל, $i(t)$, עבור $t\ge 0$.

ב. משנים את ערכי הרכיבים: $R=2\,\text{k}\Omega$, $C=20\,\mu\text{F}$.
מתח המקור הוא: $v_S(t)=v_0\cdot e^{-25t}u(t)$.
מצא את v_0 המקסימלי אם ידוע כי הזרם המירבי בערכו המוחלט חייב להיות קטן מ- $2.7\,\text{mA}$ לכל $t\ge 0$.

4) במעגל שלפניך המפסק נמצא במצב a למשך הרבה זמן.



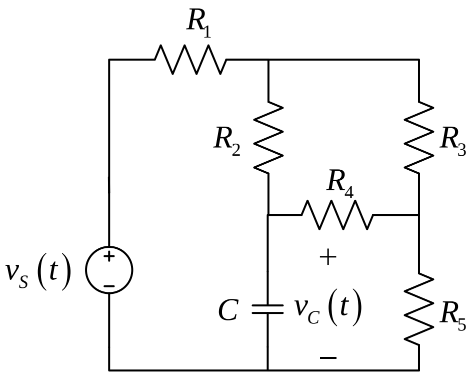
נתונים ערכי הרכיבים:
$i_S=3\text{A}$, $R_1=60\Omega$, $R_2=40\Omega$
$R_3=80\Omega$, $R_4=2k\Omega$
$C_1=20\,\mu\text{F}$, $C_2=30\,\mu\text{F}$
בזמן $t=0$ מעבירים את המפסק למצב b.
תחת ההנחה כי הקבל C_2 אינו טעון כלל, מצא את הזרם $i(t)$.

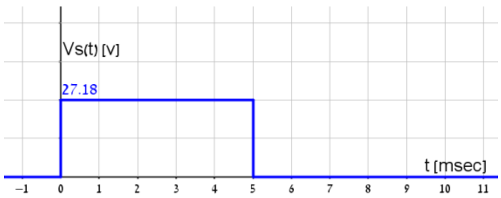


5) במעגל שלפניך המפסק סגור במשך הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.
נתון: $v_{S1}=8\text{V}$, $v_{S2}=6\text{V}$, $R_1=1\text{k}\Omega$
$R_2=3\text{k}\Omega$, $R_3=3\text{k}\Omega$, $L=1\text{H}$.
מצא ביטוי ל- $v_0(t)$.

<u>הערה:</u> ניתן לנסח את שאלה זו באופן הבא:
"הוכח כי $v_0(t)$ הוא גודל קבוע לכל $t\geq 0$ ומצא את ערכו".
עיין בסרטון כדי לראות כיצד להוכיח זאת.

6) במעגל שלפניך מכניסים אות פולס כמתואר באיור הסמוך.
נתון: $R_1=2\text{k}\Omega$, $R_2=4\text{k}\Omega$, $R_3=8\text{k}\Omega$, $R_4=28\text{k}\Omega$, $R_5=35\text{k}\Omega$, $C=31\mu\text{F}$.





מצא את אות המתח $v_C(t)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{di}{dt}+\frac{1}{2}i=6\frac{2}{3}e^{-0.1t}u(t)$ ב. i. $i(t)=16\frac{2}{3}\left[e^{-0.1t}-e^{-2t}\right]u(t)$

ב. ii. $i(t)=\left[17\frac{2}{3}e^{-0.1t}-16\frac{2}{3}e^{-2t}\right]u(t)$.

2) $v_L(t)=\left(-0.4e^{-2t}+1.5e^{-2t}\right)u(t)$.

3) א. $i(t)=4\left[5e^{-25t}-2e^{-10t}\right]u(t)\ [\mathrm{mA}]$ ב. $v_0=40v$.

4) $i(t)=40e^{41\frac{2}{3}t}u(t)$.

5) $v_0(t)=6\mathrm{V}$.

6) $v_C(t)=21\left(1-e^{-5.95t}\right)u(t)-21\left(1-e^{-5.95(t-5m)}\right)u(t-5m)\ [\mathrm{V}]$.

מד"ר מסדר שני וסוגי פתרונות:

תבנית כללית של מד"ר מסדר שני:

נעסוק במד"ר מהצורה: $y''(x)+ay'(x)+by(x)=cf(x)$ כאשר יש למצוא את $y(x)$ ונתונה פונקציה כלשהי $f(x)$.

בקורס שלנו נעסוק בפונקציות זמניות, ולכן נחליף $x\to t$ ונכתוב משוואות עבור אות זרם ואות מתח:

משוואה עבור אות מתח	משוואה עבור אות זרם
$\boxed{\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot v(t)=f(t)}$	$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{di(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot i(t)=f(t)}$

כאשר $\frac{rad}{\sec}=[\omega_0]=[\alpha]$ (בשתי הצורות) הם קבועים שערכם נקבע לפי רכיבי המעגל ו- $f(t)$ הינה פונקציה זמנית כלשהי המתארת התנהגות של אות מתח/זרם.

תנאי ההתחלה של משוואה מסדר שני:

עבור אות מתח: $\left[\frac{\mathrm{V}}{\sec}\right]\ \frac{dv(0^+)}{dt}=v_0'\ ;\ [\mathrm{V}]\ v(0^+)=v_0$.

עבור אות זרם: $\left[\frac{\mathrm{A}}{\sec}\right]\ \frac{di(0^+)}{dt}=i_0'\ ;\ [\mathrm{A}]\ i(0^+)=i_0$.

משוואה הומוגנית – צורה ודרך הפתרון:

צורת משוואה הומוגנית: $\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot v(t)=0$ (עבור אות מתח).

שלבי הפתרון הם:

1. מוצאים את שורשי הפולינום האופייני: $S_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$.
2. מסווגים למקרה המתאים ובוחרים את הפתרון ההומוגני $v_h(t)$:
   - $\alpha>\omega_0$: במקרה זה יש לנו שני פתרונות ממשיים שליליים $S_{1,2}$.
     הפתרון ההומוגני יהיה מהצורה: $v_h(t)=Ae^{-S_1t}+Be^{-S_2t}$.
   - $\alpha=\omega_0$: במקרה זה יש לנו פתרון אחד והוא: $S_1=S_2=S=-\alpha$.
     הפתרון ההומוגני יהיה מהצורה: $v_h(t)=Ae^{-St}+Bte^{-St}=e^{-St}(A+Bt)$.
   - $\alpha<\omega_0$: נגדיר: $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-a^2}$ ונקבל את הפתרונות המרוכבים הצמודים: $v_h(t)=-\alpha\pm j\omega_d$.
     הפתרון יהיה מהצורה: $v_h(t)=e^{-\alpha t}\left(A\cos(\omega_d t)+B\sin(\omega_d t)\right)$.
3. נמצא את ערכי A ו-B ע״י תנאי ההתחלה:
   - נציב ב-$v_h(t)$ את: $v(0^+)=v_0$.
   - נגזור $v'_h(t)$ ונציב בו את: $\frac{dv(0^+)}{dt}=v_0'$.
   - נפתור מערכת משוואות עבור המקדמים.

משוואה לא הומוגנית – דרך פתרון:

1. מנחשים פתרון פרטי:
   - אם קיים פולינום מסדר n ננחש פולינום מסדר n.
   - אם קיים ביטוי מעריכי מהצורה: $f(t)=Ce^{-\alpha t}$ ננחש: $v_p(t)=Ce^{-\alpha t}$.
   - אם קיים ביטוי מעריכי מהצורה: $f(t)=P_n(t)e^{-\alpha t}$ כאשר $P_n(t)$ הוא פולינום מסדר n כלשהו, ננחש: $v_p(t)=Q_n(t)e^{-\alpha t}$ כאשר $Q_n(t)$ גם פולינום מסדר n.
   - אם קיים ביטוי טריגונומטרי מהצורה $f(t)=A\sin(\omega_0 t)$ או מהצורה: $f(t)=A\cos(\omega_0 t)$, ננחש: $v_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$.
   - אם ישנה התלכדות של גורם הדעיכה, או תדר האוסילציות עם שורשי הפולינום האופייני, נכפיל את הפתרון ב- t.
2. גוזרים את הפתרון הפרטי כדי לקבל את הביטויים עבור: $\frac{d^2v_p}{dt^2}$, $\frac{dv_p}{dt}$, v_p ומציבים אותם במשוואה כדי למצוא את ערכי המקדמים.
3. כותבים פתרון מלא (הומוגני + פרטי) כאשר לחלק ההומוגני ישנם 2 פרמטרים **חדשים!**
4. מציבים בפתרון המלא את תנאי ההתחלה הראשון.
גוזרים את הפתרון המלא כדי לקבל dv/dt ומציבים בו את תנאי ההתחלה השני.
פותרים את מערכת המשוואות עבור מציאת ערכי המקדמים.
5. כותבים פעם נוספת את הפתרון המלא.

תכונות ליניאריות והזזה בזמן:

אם הפתרון $v_{ZSR}(t)$ מתקבל עבור עירור כניסה $f(t)$ אז:

- $Av_{ZSR}(t)$ הוא הפתרון של מד״ר עבור כניסה של $Af(t)$.
- $\frac{dv_{ZSR}(t)}{dt}$ הוא הפתרון של מד״ר עבור כניסה של $\frac{df(t)}{dt}$.
- $\int_{-\infty}^{t} v_{ZSR}(x)dx$ הוא פתרון של מד״ר עבור כניסה של $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.
- $v_{ZSR}(t-T_0)$ הוא פתרון של מד״ר עבור כניסה של $f(t-T_0)$.

תרגילים:

1) נתונה המד"ר הבאה: $i''+2\alpha\cdot i'+\omega_0^2\cdot i=0$ כאשר $\omega_0=2\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=2.5\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

תנאי ההתחלה הם: $i(0^-)=2\text{A}$, $i'(0^-)=1\frac{\text{A}}{\text{sec}}$.

א. האם יש למשוואה פתרונות ZIR ו-ZSR? אם כן מצא אותם.

ב. מצא את $i(t)$.

2) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=0$.

א. מצא את $v(t)$ עבור: $\omega_0=\sqrt{10}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

ו- $\frac{dv}{dt}(0^-)=-120\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v(0^-)=35\text{mV}$.

ב. מצא את $v(t)$ עבור: $\alpha=\omega_0=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

ו- $\frac{dv}{dt}(0^-)=-120\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v(0^-)=35\text{mV}$.

3) מצא את הפתרון של המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=e^{-3t}u(t)$

אם ידועים: $\omega_0=\sqrt{5}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=3\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\frac{dv}{dt}(0^-)=10\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v(0^-)=1\text{V}$.

4) חזור על שאלה 3 עם: $\omega_0=2.5\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=\sqrt{6}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

5) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=3\delta(t)-e^{-4t}u(t)+\cos(2t)u(t)$.

כמו כן: $\omega_0=\sqrt{3}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=2\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\frac{dv}{dt}(0^-)=65\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v(0^-)=1\text{V}$.

א. מצא את תנאי ההתחלה עבור $t=0^+$, כלומר: $\frac{dv}{dt}(0^+)$, $v(0^+)$.

ב. מצא את $v_{ZIR}(t)$, את $v_{ZSR}(t)$.

ג. מצא את $v(t)$.

6) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=3\left(u(t)-u(t-10)\right)$.

נתון כי: $\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=6\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-70\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=2.4\text{V}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $v(t)$.

7) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=f(t)$ כאשר: $f(t)=\sum_{k=0}^{N}u(t-k)$.

נתון כי: $\alpha=\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-7\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=1\text{V}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $v(t)$ כתלות ב- N.

8) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2i=f(t)$ כאשר: $f(t)=\sum_{k=0}^{N}\delta(t-k)$.

נתון כי: $\alpha=\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{di}{dt}\left(0^-\right)=-7\frac{\text{A}}{\text{sec}}$, $i\left(0^-\right)=1\text{A}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $i(t)$ כתלות ב- N.

תשובות סופיות:

1) א. + ב. יש למשוואה רק פתרון ZIR : $i(t)=i_{ZIR}(t)=\left(-e^{-4t}+3e^{-t}\right)u(t)$.

2) א. $v(t)=e^{-t}\left(35m\cos 3t-39.98\sin 3t\right)u(t)$

ב. $v(t)=e^{-t}\left(35m-119.96t\right)u(t)$.

3) $v(t)=\left(-2\frac{5}{8}e^{-5t}+3\frac{7}{8}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right)u(t)$.

4) $v(t)=\left[e^{\sqrt{6}t}\left(-0.8\cos\frac{1}{2}t+26.8\sin\frac{1}{2}t\right)+1.8e^{-3t}\right]u(t)$.

5) א. $v(0^+)=1\text{V}\ ,\ v'(0^+)=68\frac{\text{V}}{\text{sec}}$ ב. $v_{ZIR}(t)=\left[35.5e^{-t}-34.5e^{-3t}\right]u(t)$

$$v_{ZSR}(t)=\left[\frac{37}{30}e^{-t}-\frac{23}{26}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{1}{65}(8\sin 2t-\cos 2t)\right]u(t)$$

ג. $v(t)=\left[36\frac{11}{15}e^{-t}-35\frac{5}{13}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{1}{65}(8\sin 2t-\cos 2t)\right]u(t)$.

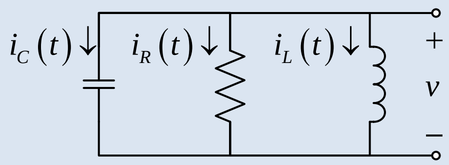
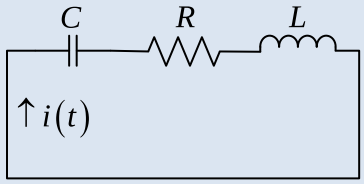
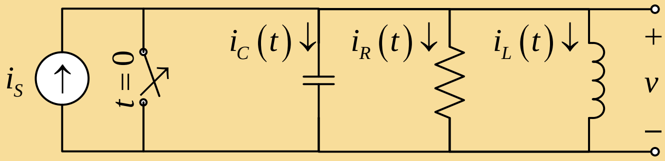
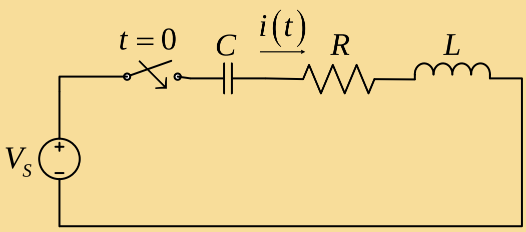
6)
$$\begin{aligned}v(t)&=\left[e^{-6t}\left(2.37\cos 8t-6.92\sin 8t\right)+0.03\right]u(t)\\&-3m\left[e^{-6(t-10)}\left(7.5\sin\left(8(t-10)\right)-10\cos\left(8(t-10)\right)\right)+10\right]u(t-10)\end{aligned}.$$

7) $v(t)=e^{-10t}(1+3t)u(t)+\sum_{k=0}^{N}\left(-e^{-10(t-k)}\left[0.01+0.1(t-k)\right]+0.01\right)u(t-k)$.

8) $i(t)=e^{-10t}(1+3t)u(t)+\sum_{k=0}^{N}(t-k)e^{-10(t-k)}u(t-k)$.

ייצוג מעגלים מסדר שני ותופעות מעבר:

מודלים של מעגלים מסדר שני:

תיאור המעגל	סכמה חשמלית
מעגל מקבילי ללא מקור חיצוני	
מעגל טורי ללא מקור חיצוני	
מעגל מקבילי עם מקור חיצוני	
מעגל טורי עם מקור חיצוני	

תיאור מתמטי וההגדרות:

תבנית כללית של מעגל מקבילי: $\boxed{\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v(t)=0}$.

תבנית כללית של מעגל טורי: $\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=0}$.

קבוע הריסון של המעגל: $\alpha=\frac{1}{2RC}$ - למעגל מקבילי, $\alpha=\frac{R}{2L}$ - למעגל מקבילי.

תדר התהודה של המעגל: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

יחידות: $[\omega_0] = [\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

גורם האיכות של המעגל: $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$.

שורשי הפולינום האופייני: $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

התגובה הטבעית של מעגלים מסדר שני:

נחלק את התגובה הטבעית ל-3 מקרים לפי ערכי α, ω_0 :

1. אם: $\alpha > \omega_0$ - ריסון יתר (over dumped)

   צורת הפתרון: $v(t) = Ae^{-S_1 t} + Be^{S_2 t}$.

2. אם: $\alpha = \omega_0$ - ריסון קריטי (critical dumped)

   צורת הפתרון: $v(t) = (At + B)e^{St}$.

3. אם: $\alpha < \omega_0$ - תת-ריסון (under dumped)

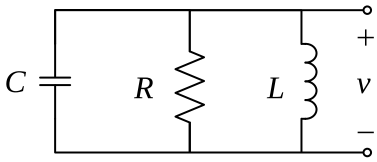
   צורת הפתרון: $v(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$.

   נגדיר את תדר הקפיצות: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

   (Dumped radian frequency).

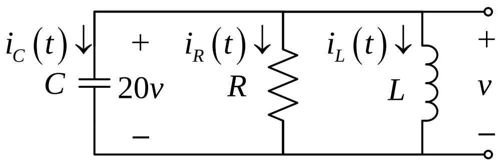
תרגילים:

1) לפניך המעגל RLC המקבילי הבא ובו:
$R = 200\Omega$, $L = 50\text{mH}$, $C = 0.2\mu\text{F}$.



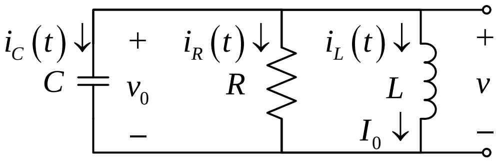
ענה על השאלות הבאות:
א. מצא את שורשי המשוואה האופיינית של המעגל.
ב. מהו סוג הריסון של המעגל?
ג. חזור על סעיפים א' ו-ב' עם: $R = 312.5\Omega$.
ד. מצא עבור איזה ערך של R המעגל ימצא בריסון קריטי.

2) לפניך המעגל RLC המקבילי הבא ובו נתון
כי קיבול הקבל הוא: $0.05\mu\text{F}$ והמתח ההתחלתי
עליו הוא $20v$. כמו כן הזרם ההתחלתי בסליל
הוא אפס ואות המתח עבור $t \ge 0$ הוא:
$v(t) = -5e^{-5000t} + 20e^{-20000t}\,[\text{V}]$.

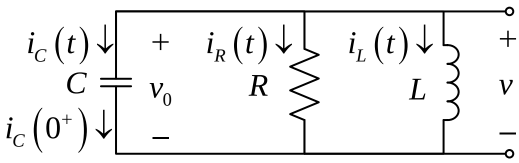


ענה על השאלות הבאות:
א. מצא את הערכים של R , L , α ו- ω_0.
ב. חשב את האותות: $i_R(t)$, $i_L(t)$ ו- $i_C(t)$ עבור $t \ge 0^+$.

3) התגובה הטבעית של המעגל המתואר היא:
$v(t) = 150e^{-8000t}(\cos 6000t - 2\sin 6000t)[\text{V}]$, $t \ge 0$.
ערך קיבול הקבל הוא $0.05\mu\text{F}$.
מצא את השראות הסליל, L, התנגדות הנגד, R,
המתח ההתחלתי, v_0, הזרם ההתחלתי בסליל, I_0
ואות הזרם בסליל $i_L(t)$ עבור $t \ge 0^+$.



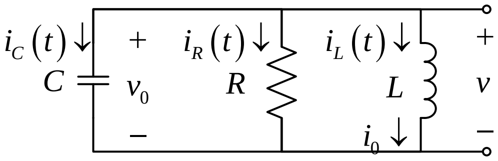
4) המתח ההתחלתי במעגל המתואר בסמוך הוא אפס. דרך הקבל ישנו זרם התחלתי
$i_C(0^+) = 15\text{mA}$. אות הזרם בקבל הוא: $i_C(t) = A_1e^{-160t} + A_2e^{-40t}[\text{A}]$, $t \ge 0^+$.
ערך הנגד הוא 200Ω.
א. מצא את α , ω_0 , L , C , A_1 ו- A_2.
ב. מצא את האות $v(t)$ עבור $t \ge 0$.
ג. מצא את האות $i_R(t)$ עבור $t \ge 0$.
ד. מצא את האות $i_L(t)$ עבור $t \ge 0$.



5) הנתונים עבור המעגל שלפניך הם:

$R=5\Omega, L=1\text{H}, C=0.1\text{F}$

$v_0=0\text{V}$, $i_0=-5\text{A}$.



א. כתוב את הביטוי של $v(t)$ עבור $t\geq 0$.

ב. מצא את שלושת הערכים הראשונים המקיימים: $\frac{dv}{dt}=0$.

סמן את ערכים אלו ב- t_1 , t_2 , t_3.

ג. הראה כי:

i. $t_3-t_1=T_d$.

ii. $t_2-t_1=0.5T_d$.

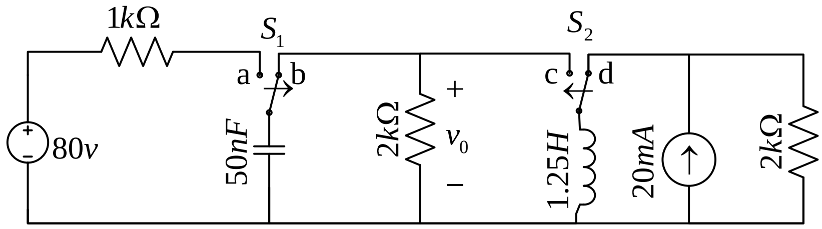
ד. חשב את: $v(t_k)$ לכל $k=1$, 2 , 3.

ה. צייר את הגרף של $v(t)$ בתחום $0\leq t\leq t_2$.

ו. כעת מסירים את הנגד R מהמעגל.

מצא את $v(t)$, את התדר שלו ואת האמפליטודה שלו.

6) במעגל שלפניך ישנם שני מפסקים אשר מסונכרנים יחדיו באופן הבא: כאשר מפסק 1 במצב a, המפסק השני במצב d, וכאשר מפסק 1 עובר למצב b, מפסק 2 עובר למצב c. מניחים כי מפסק 1 היה במצב a במשך הרבה זמן. ברגע $t=0$ מעבירים אותו למצב b.



א. כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\geq 0$.

ב. משנים את ערכי הנגד והסליל

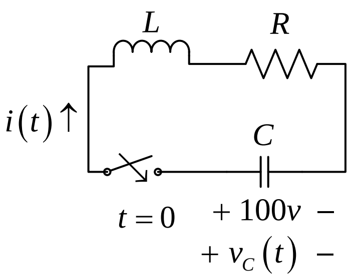
ל- $R=2.5\text{k}\Omega$, $L=0.8\text{H}$.

כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\geq 0$.

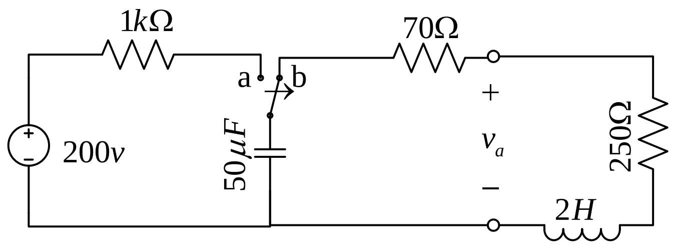
ג. משנים את ערכי הנגד והסליל ל- $R=1\text{k}\Omega$, $L=0.2\text{H}$..

כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\geq 0$.

7) במעגל שלפניך סוגרים את המפסק ב- $t=0$.
ידוע: $R=560\Omega$, $C=0.1\mu F$, $L=0.1H$.
המתח האגור בקבל הוא: $v_C(0^-)=100V$.
מצא את $v_C(t)$ ואת $i(t)$ עבור $t\geq 0$.



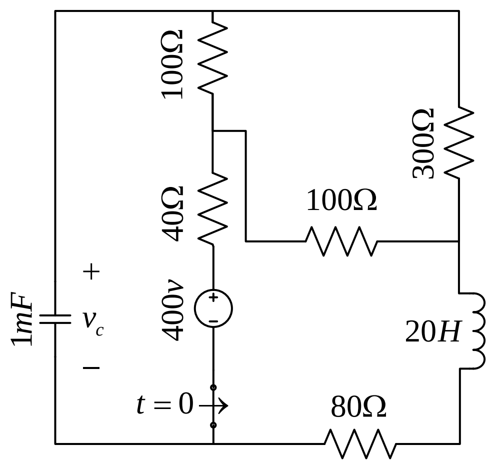
8) המפסק במעגל הבא נמצא בנקודה a במשך הרבה זמן.
בזמן $t=0$ מעבירים אותו למצב b כמתואר באיור:



א. מהם הערכים ההתחלתיים של v_a ושל $\frac{dv_a}{dt}$?

ב. מצא את $v_a(t)$ עבור $t\geq 0$.

9) במעגל שלפניך מחזיקים את מפסק סגור במשך הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.
כל הערכים כתובים בסרטוט. מצא את $v_C(t)$ עבור $t\geq 0$.



תשובות סופיות:

1) א. $S_1=-5000\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $S_2=-20,000\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ב. ריסון יתר.

ג. $S_{1,2}=-8000\pm 6000j\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ תת ריסון. ד. $R=250\Omega$.

2) א. $\omega_0=10\text{k}\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=12.5\text{k}\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $L=0.2\text{H}$, $R=800\Omega$

ב. $i_R(t)=\left[-6.25e^{-5000t}+25e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

$i_C(t)=\left[1.25e^{-5000t}-20e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

$i_L(t)=\left[5e^{-5000t}-5e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$.

3) $L=0.2\text{H}$, $R=1.25\text{k}\Omega$, $v_0=150\text{V}$, $I_0=30\text{mA}$

$i_L(t)=195e^{-8000t}\left(2\sin 6000t-\cos 6000t\right)\ \text{mA}$.

4) א. $A_1=20\text{mA}$, $A_2=-5\text{mA}$, $C=25\mu\text{F}$, $L=6.25\text{H}$, $\omega_0=80\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=100\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$

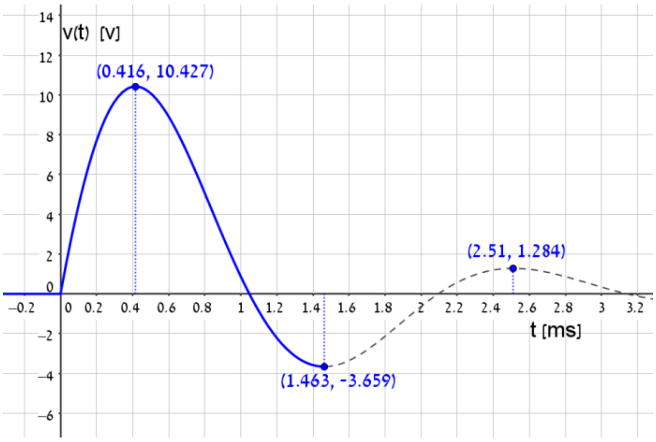
ב. $v(t)=\left[-5e^{-160t}+5e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{V}]$

ג. $i_R(t)=\left[-25e^{-160t}+25e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

ד. $i_L(t)=\left[5e^{-160t}-20e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$.

5) א. $v(t)=\left[16\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t\right]u(t)\ \ [\text{V}]$ ב. $t_1=416\text{ms}$, $t_2=1463\text{ms}$, $t_3=2510\text{ms}$

ד. $v(t_1)=10.43\text{V}$, $v(t_2)=-3.66\text{V}$, $v(t_3)=0.798\text{V}$ ה. להלן סרטוט:



ו. $A=15.8\text{V}$, $f=0.5\text{Hz}$.

6) א. $v_0(t)=\left[173\frac{1}{3}e^{-8000t}-93\frac{1}{3}e^{-2000t}\right]u(t)\quad [\mathrm{V}]$

ב. $v_0(t)=e^{-4000t}\left(80\cos(3000t)-720\sin(3000t)\right)u(t)\quad [\mathrm{V}]$.

ג. $v_0(t)=\left[80e^{-10^4 t}-1.2\cdot 10^6 te^{-10^4 t}\right]u(t)\quad [\mathrm{V}]$.

7) $v_C(t)=\left[100\cos(9600t)+29.17\sin(9600t)\right]e^{-2800t}u(t)\quad [\mathrm{V}]$

$i(t)=0.104e^{-2800t}\sin(9600t)u(t)\quad [\mathrm{A}]$.

8) א. $v_a=200\mathrm{V}\ ,\ \frac{dv_a}{dt}=-7000\frac{\mathrm{V}}{\sec}$

ב. $v_a(t)=50e^{-80t}\left[4\cos 60t+3\sin 60t\right]u(t)\quad [\mathrm{V}]$.

9) $v_C(t)=\left[280e^{-5t}\cos 5t-120e^{-5t}\sin 5t\right]u(t)\quad [\mathrm{V}]$.

ניתוח מתקדם של מעגלים מסדר שני:

צורת המשוואה הכללית:

צורת המשוואה הכללית מסדר שני עבור מתחים: $\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2v(t)=f(t)$.

שלבי הפתרון:

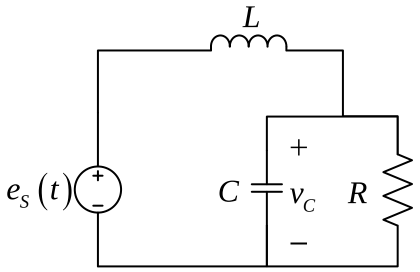
1. יש לכתוב משוואה דיפרנציאלית המתארת את הקשר שבין מקור הכניסה ומתח מוצא רצוי. כדי לעשות את זה נעזר בחוקי קירכהוף ובקשרים שבין מתח וזרם בקבל ובסליל. לאחר קבלת משוואה שבה הנעלם הוא האות הרצוי (אות מתח או זרם) נסדר לתבנית שלנו.
2. נפתור את המשוואה תחת האילוצים הנתונים בשאלה.
3. נסיק מסקנות נדרשות או נמצא ערכים של פרמטרים נדרשים.

רציפות תנאי התחלה:

במקרה של כניסת הלם יש לעדכן את תנאי ההתחלה של הנגזרת הראשונה.

תרגילים:

1) לפניך המעגל הבא:



נתון כי: $\omega_0=\sqrt{5}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\alpha=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

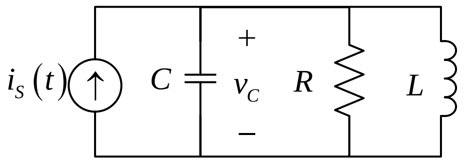
מקור הכניסה $e_S(t)$ הוא מקור מתח אשר יכול לקבל צורות פולס שונות.

א. כתוב את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הקשר שבין מתח הכניסה $e_S(t)$ למתח המוצא הרצוי $v_C(t)$.

ב. מצא את תגובת $v_C(t)$ כאשר מקור הכניסה הוא מדרגה, ז״א: $e_S(t)=u(t)$.

ג. מצא את תגובת $v_C(t)$ כאשר מקור הכניסה הוא רמפה, ז״א: $e_S(t)=tu(t)$.

2) במעגל שלפניך נתונים הערכים הבאים:



$R=25\text{k}\Omega$, $Q=\frac{1}{2}$, $\omega_0=20\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

מקור הזרם הוא: $i_S(t)=\cos(3t)u(t)$.

א. כתוב משוואה דיפרנציאלית המקשרת בין המתח בקבל $v_C(t)$ לבין זרם המקור $i_S(t)$.

ב. מניחים את תנאי ההתחלה הבאים: $i_L(0^-)=i_0$ ו- $v_C(0^-)=v_0$.
כתוב את פתרון ZIR של המד״ר מסעיף א׳ (הבע באמצעות v_0,i_0).

ג. מצא את פתרון ZSR של המד״ר מסעיף א׳ והסבר מה היה משתנה בפתרון זה אם במקום $i_S(t)=\cos(3t)u(t)$ היה העירור $i_S(t)=\sin(3t)u(t)$.

ד. מצא ערכים v_0,i_0 עבורם לא יהיו גורמים דועכים בתגובה $v_C(t)$.

3) בשאלה זו נתרגל את תכונות הליניאריות של פתרון ZSR.
נתון מעגל כלשהו מסדר שני שבו כל הרכיבים הם ליניאריים וקבועים בזמן.

- ידוע כי עבור כניסת עירור: $i_1(t)=\cos(4t)u(t)$
מתקבלת תגובת ZSR של המוצא: $v_1(t)=\left[e^{-t}+3e^{-4t}+\cos\left(4t+45^\circ\right)\right]u(t)$.
- כמו כן עבור עירור של $i_2(t)=5\cos(4t)u(t)$ מתקבלת התגובה המלאה הבאה של המעגל: $v_2(t)=\left[e^{-t}+6e^{-4t}+4\cos\left(4t+45^\circ\right)\right]u(t)$.

מצא את תגובת המעגל המלאה $v_3(t)$ עבור עירור של $i_3(t)=8\cos(4t)u(t)$.

4) במעגל RLC מקבילי שבו כל הרכיבים עם ליניאריים וקבועים בזמן ידוע כי עבור עירור של $i_1(t)=\sin(t)u(t)$ מתקבלת התגובה המלאה הבאה:

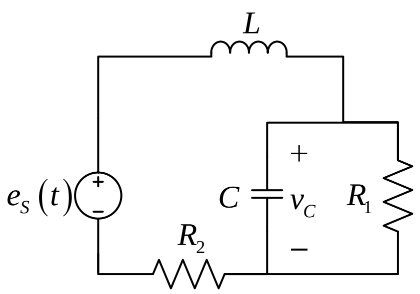
$v_1(t)=\left[e^{-2t}+e^{-3t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right]u(t)$. ועבור עירור של $i_2(t)=3\sin(t)u(t)$

מתקבלת תגובת ZSR הבאה: $v_2(t)=\left[3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{5}\cos(t)\right]u(t)$

א. מצא את תגובת המעגל המלאה לעירור: $i_4(t)=\cos(t)u(t)$.

ב. מצא את תגובת המעגל המלאה לעירור: $i_5(t)=\cos(t-2)u(t-2)$.

5) לפניך המעגל הבא:



מתח המקור מסומן ב- $e_S(t)$ ותגובת המעגל נמדדת על פני הקבל ומסומנת $v_C(t)$.

נתוני הרכיבים הם:

$R_1=4\text{k}\Omega$, $R_2=1\text{k}\Omega$, $L=1\text{kH}$, $C=0.25\text{mF}$.

א. חשב את תגובת המעגל לכניסת הלם, $h(t)$.

ב. חשב את התגובה המלאה להלם תחת תנאי ההתחלה הבאים: $i_L(0^+)=1\text{mA}$ ו- $v_C(0)=2v$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+2\frac{dv_C(t)}{dt}+5v_C(t)=5e_s(t)$

ב. $v_C(t)=\left[1-e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

ג. $v_C(t)=\left[e^{-t}(0.4\cos 2t-0.3\sin 2t)+t-0.4\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

2) א. $\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+40\frac{dv_C(t)}{dt}+400v_C(t)=10^6\frac{di(t)}{dt}$

ב. $v_{ZIR}(t)=e^{-20t}\left(v_0-t\left(10^6 i_0+20v_0\right)\right)\ ;\ t\ge 0$

ג. $v_{ZSR}(t)=10^3(2.15\cos 3t-7\sin 3t)-3.05\cdot 10^6 te^{-20t}\ ;\ t\ge 0$.

במקרה של החלפת עירור נקבל איבר אחד בפתרון $v_{ZSR}(t)$ ולא תהיה אי רציפות ב-0.

ד. $v_0=2.15\mathrm{kV},\ i_0=-3\mathrm{A}$.

3) $v_3(t)=4e^{-t}+15e^{-3t}+7\cos(4t+45°)\ \ [\mathrm{V}]$.

4) א. $v_4(t)=\left(-2e^{-2t}-3e^{-3t}-\frac{1}{2}\sin t\right)u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

ב. $v_5(t)=\left(-2e^{-2(t-2)}-3e^{-3(t-2)}-\frac{1}{2}\sin(t-2)\right)u(t-2)\ \ [\mathrm{V}]$.

5) א. $h(t)=0.4e^{-t}(3\sin 2t+4\cos 2t)u(t)$

ב. $v_C(t)=e^{-t}(5.2\sin 2t+3.6\cos 2t)u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.