

# GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את  
סודות ההצלחה בלימודים

## תוכן עניינים

3	פרק 1 – גבולות
3	הסבר כללי
3	חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה
3	חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום
4	חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד
5	חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף
5	חישוב גבול של פונקציה כאשר $x$ שואף לאינסוף
7	חישוב הגבול של אוילר
8	חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה
9	פרק 2 – רציפות
11	פרק 3 – חישוב נגזרות
11	כללי הגזירה
13	נגזרת של פונקציה רציונלית
14	נגזרת של פונקציה מעריכית
15	נגזרת של פונקציה לוגריתמית
16	נגזרת של פונקציה $x$ בחזקת פונקציה של $x$
18	פרק 4 – נגזרת סתומה
20	פרק 5 – כלל לופיטל
20	כלל לופיטל $0/0$
21	כלל לופיטל $0 \cdot \infty$
22	כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו
22	כלל לופיטל $\infty - \infty$
23	פרק 6 – חקירת פונקציה
23	שלבי חקירת פונקציה
23	חקירת פולינום
24	חקירת פונקציה רציונלית
26	חקירת פונקציה מעריכית
28	חקירת פונקציה לוגריתמית
30	חקירת פונקציה עם שורשים

## פרק 1 – גבולות

### הסבר כללי

- בסרטון זה הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה.

### חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה

- בסרטון זה תוסבר טכניקת הצבה לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 100} 20 & .4 \end{array}$$

### פתרונות

$$(1) \quad 21 \quad (2) \quad \frac{11}{12} \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 20$$

### חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום

- בסרטון זה תוסבר טכניקת צמצום לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{x^2 - 5^2} & .5 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} & .7 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} & .9 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & .11 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} & .13 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} & .15 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} & .4 \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} & .6 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x} & .8 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 2x + 3} & .10 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} & .12 \\ \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} & .14 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 4} & .16 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad .21$$

### פתרונות

- 7 (12 1 (11  $-\frac{13}{4}$  (10  $\frac{5}{6}$  (9  $\frac{1}{2}$  (8  $-1.5$  (7  $\frac{1}{10}$  (6 0 (5 6 (4  $\frac{1}{2}$  (3  $-1$  (2  $-4$  (1  
 $n-1$  (22 6 (21 27 (20  $\frac{8}{17}$  (19 32 (18 3 (17  $-\frac{3}{4}$  (16  $-3$  (15  $\frac{10}{8.5}$  (14  $\frac{2}{3}$  (13

### חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד

- בסרטון זה תוסבר טכניקת כפל בצמוד לחישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{2x - 6} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x + 3}}{x^2 - x} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x + 1}}{1 - \sqrt{2x - 1}} \quad .9$$

### פתרונות

- $-\frac{13}{4}$  (10  $\frac{3}{4}$  (9  $\frac{1}{6}$  (8  $\frac{3}{8}$  (7  $\frac{2}{3}$  (6 1 (5  $-\frac{1}{12}$  (4  $\frac{1}{4}$  (3 4 (2  $\frac{1}{2}$  (1

### חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^+} 7^{\frac{1}{x}} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 19876^{\frac{1}{x}} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} & .4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} & .5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2} \ln(2-x) & .8 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} & .7 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} & .10 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) & .9 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & .12 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & .11 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & .13 \end{array}$$

14. נתון: מספר סופי  $k$ . חשב את  $k$  ואת ערך הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x + k}{x^2 - 4}$$

### פתרונות

- (1  $\infty$  (2 0 (3  $\infty$  (4  $\infty$  (5  $-\infty$  (6 לא קיים גבול (7  $-\infty$  (8  $\infty$  (9  $\infty$  (10 לא קיים גבול  
(11 0 (12 1 (13 לא קיים גבול (14  $k = -10$ ,  $\frac{11}{4}$ )

### חישוב גבול של פונקציה כאשר $x$ שואף לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה כאשר  $x$  שואף לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x & .3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x & .4 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x .6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x}} .8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}} .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} .10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} .9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} .12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} .13$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1} .16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{5x^4 + x^3} .15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x} .18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} .17$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} .20$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6} .19$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} .21$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2} .24$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} .23$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{3x - 1} .26$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} .25$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} .28$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} .27$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} .30$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} .29$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} .32$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 7^x}{-2^x + 7^{x-1}} .31$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} .33$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad .40$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad .39$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad .42$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad .41$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x) \quad .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad .43$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x) \quad .46$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x \quad .45$$

### פתרונות

0 (13  $-\infty$  (12 4 (11 0 (10 0 (9 1 (8 1 (7  $\infty$  (6 0 (5 0 (4  $\infty$  (3 0 (2 0 (1  
 $-2$  (24  $\frac{3}{2}$  (23  $-3$  (22  $-1$  (21 1 (20  $-\frac{1}{3}$  (19  $\frac{2}{5}$  (18  $\frac{1}{2}$  (17 0 (16 0 (15  $-5$  (14  
4 (34  $-\frac{1}{2}$  (33 1 (32  $-10$  (31  $\frac{1}{9}$  (30 4 (29 0 (28  $\frac{1}{4}$  (27  $-\frac{1}{3}$  (26  $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$  (25  
 $\frac{1}{2}$  (42  $-\frac{1}{2}$  (41  $\frac{1}{2}$  (40  $\frac{k}{2}$  (39 2.5 (38  $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{\frac{a}{b}}, 0, \infty, -\infty$  (37  $\frac{1}{3}$  (36  $\ln 3$  (35  
 $-\frac{1}{4}$  (46  $\infty$  (45 1 (44  $\frac{a-b}{2}$  (43

### חישוב הגבול של אוילר

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי נוסחת אוילר

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2} \right)^{10x} \quad .7$$

### פתרונות

$$e^{30} \quad (7) \quad e^{-12} \quad (6) \quad e^3 \quad (5) \quad \frac{1}{e} \quad (4) \quad e^2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{e} \quad (1)$$

### חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14$ .

2. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$ .

3. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$ .

4. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1}$ .

5. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$ .

6. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$ .

7. חשב על פי הגדרת הגבול את  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ .

8. הוכח על פי הגדרת הגבול כי  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$ .

### פתרונות

$$\delta = \min\{1, 10\varepsilon\} \quad (4) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad (3) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} \quad (2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{7} \quad (1)$$

$$\delta = \left| \frac{1}{M} \right|, \quad \frac{1}{x^2-1} < M \quad (7) \quad \delta = \varepsilon \quad (6) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} \quad (5)$$



## פרק 2 – רציפות

- בסרטון זה הסבר כללי על פונקציה רציפה.

בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודות התפר" שלהן. בסיום, שרטט את גרף הפונקציה.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad .2 \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad .1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \quad .3$$

בדוק את רציפות הפונקציה הבאה ב"נקודות התפר" שלה:

4. מה צריך להיות ערכו של הקבוע  $k$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases}$$

5. מה צריך להיות ערכו של הקבוע  $k$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 2 \end{cases}$$

6. מה צריך להיות ערכו של הקבוע  $k$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$$

7. מה צריך להיות ערכו של הקבוע  $k$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases}$$

8. מה צריך להיות ערכם של הקבועים  $a$  ו- $b$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases}$$

9. מה צריך להיות ערכם של הקבועים  $a$  ו- $b$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{1}{2^x} + 4} & x < 0 \end{cases}$$

10. מה צריך להיות ערכם של הקבועים  $a$  ו- $b$  על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 = b & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases}$$

### פתרונות

- (1) רציפה בנקודה  $x=2$  (2) רציפה בנקודה  $x=1$  (3) רציפה בנקודה  $x=1$ ,  $f$  אינה רציפה בנקודה  $x=2$  (4)  $k=1$  (5)  $k=4$  (6)  $k=\frac{2}{3}$  (7)  $k=-1$  (8)  $a=1, b=2$  או  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$  (9)  $a=2, b=1$  (10)  $a=-\frac{2}{e}, b=\frac{1}{e}$

### פרק 3 – חישוב נגזרות

#### כללי הגזירה

#### **בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקציות חזקה**

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

#### **בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע כפול פונקציה**

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

#### **בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע**

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

#### **בסרטון זה הסבר על הנגזרת של סכום והפרש**

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

**בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקציות חזקה מורכבת**

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 & \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & & \text{ג.} & f(x) = 3(x-x^2)^2 \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} & \text{ה.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \end{array}$$

**בסרטון זה הסבר על הנגזרת של  $\frac{1}{x}$**

6. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ב.} & f(x) = -\frac{2}{x} \\ \text{ב.} & & \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} & \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \end{array}$$

**בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מכפלה**

7. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) & \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & & \text{ד.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

**בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מנה**

8. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ב.} & & \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & & \text{ז.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

### פתרונות

(1) א.  $3x^2$  ב.  $7x^6$  ג.  $2x$  ד.  $1$  ה.  $-\frac{3}{x^4}$  ו.  $-\frac{1}{x^2}$  ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$  (2) א.  $6x^2$  ב.  $21x^6$  ג.  $2x^3$  ד.  $\frac{6x^5}{7}$  ה.  $8$  ו.  $-\frac{6}{x^3}$  ז.  $-\frac{4}{x^2}$

ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$  ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$  (3) א.  $0$  ב.  $0$  (4) א.  $3x^2+4x-3$  ב.  $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

(5) א.  $15(5x-2)^2$  ב.  $15x^2(x^3+6)^4$  ג.  $6(x-x^2)(1-2x)$  ד.  $-\frac{3}{4}(5-x)^2$

ה.  $\frac{8(x+1)^3}{3}$  (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$  ב.  $\frac{2}{x^2}$  ג.  $-\frac{2}{x^3}$  ד.  $-\frac{9}{x^4}$  ה.  $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו.  $\frac{2}{(3-x)^2}$  ז.  $-\frac{6}{(x+3)^2}$  (7) א.  $10x-14$  ב.  $(5x+1)^2(20x-44)$

ג.  $x^2(6-x)^3(18-7x)$  (8) א.  $\frac{5}{(1+2x)^2}$  ב.  $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$  ג.  $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד.  $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$  ה.  $-\frac{1}{x^2}$  ו.  $-\frac{9}{x^4}$

### נגזרת של פונקציה רציונלית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של מנה

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

1.  $f(x) = \left( \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \right)$  2.  $f(x) = \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \right)$  3.  $f(x) = \left( \frac{2x^2}{(x+1)^2} \right)$

4.  $f(x) = \left( \frac{x^3}{x^2 - 4} \right)$  5.  $f(x) = \left( \frac{x^3}{(x+1)^2} \right)$  6.  $f(x) = \left( \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^3 \right)$

### פתרונות

(1)  $\frac{4}{x^3}$  (2)  $\frac{448}{(2x+10)^3}$  (3)  $\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$  (4)  $\frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3}$  (5)  $\frac{6x}{(x+1)^4}$  (6)  $\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^3}$

### נגזרת של פונקציה מעריכית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה מעריכית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$       ב.  $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג.  $f(x) = e^{\sin x}$       ד.  $f(x) = 2^{3x}$

ה.  $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = x \cdot e^x$       ב.  $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

ג.  $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$       ב.  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$       ב.  $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ .

6. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$ .

7. גזור את הפונקציה  $f(x) = \left(x \cdot e^{-2x^2}\right)$ .

### פתרונות

(1) א.  $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$       ב.  $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$       ג.  $\cos x \cdot e^{\sin x}$       ד.  $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

ה.  $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$       (2) א.  $e^x(1+x)$       ב.  $2x \cdot e^{4x}(1+2x)$       (3) א.  $\frac{x(2-x)}{e^x}$

$$e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1+2x}{x^4} \right) \quad (5) \quad \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}} \quad .ג \quad 30e^{2x} (e^{2x} - 1)^2 \quad .א \quad (4) \quad \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad .ב$$

$$-4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (7) \quad e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x+2}{x^4} \right) \quad (6)$$

### נגזרת של פונקציה לוגריתמית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה לוגריתמית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x) \quad .ב \quad f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad .א$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) \quad .ד \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad .ג$$

$$f(x) = \log_2(x) + 5\log_3(2x-1) \quad .ו \quad f(x) = \ln(\cos x) \quad .ה$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad .ב \quad f(x) = x \ln x \quad .א$$

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \quad .ד \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad .ג$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x + x} \quad .ה$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 3\ln^2 x \quad .ב \quad f(x) = \ln^3 x \quad .א$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2} \quad .ד \quad f(x) = x^2 \ln^2 x \quad .ג$$

$$.4 \quad \text{גזור פעמיים את הפונקציה } f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$.5 \quad \text{גזור פעמיים את הפונקציה } f(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$$

6. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = (x \cdot \ln x)$ .

7. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = (x^2 \ln x)$ .

8. גזור שלוש פעמים את הפונקציה  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$  ( $x < 2$ ).

9. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 32)$ .

10. גזור פעמיים את הפונקציה  $f(x) = ((\ln x)^2 + (\ln x)^{-2})$ .

### פתרונות

(1) א.  $\frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$  ב.  $\frac{2x-3}{x^2-3x}$  ג.  $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$  ד.  $\frac{e^x}{e^x+1}$

ה.  $-\tan x$  ו.  $\frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$  ז.  $\ln x + 1$  ח.  $(3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$  ט.  $\frac{1-\ln x}{x^2}$

י.  $\frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$  יא.  $\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$  יב.  $\frac{3 \ln^2 x}{x}$

יג.  $\frac{6 \ln x}{x}$  יד.  $2x \ln x (\ln x + 1)$  יו.  $\frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$  יז.  $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$  יח.  $\frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}}$  יט.  $\frac{1}{x}$

כ.  $2 \ln x + 3$  כא.  $\frac{2}{(4-2x)^2}$  כב.  $\frac{-2 \ln x}{x^2}$  כג.  $-\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$

### נגזרת של פונקצית $x$ בחזקת פונקציה של $x$

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של  $x$  בחזקת פונקציה של  $x$

גזור את הפונקציות הבאות:

1.  $y = x^{x^2}$

2.  $y = x^{\frac{x}{2}}$



$$y = (\ln x)^{4x} \quad .4$$

$$y = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad .6$$

$$y = (x+1)e^x \quad .3$$

$$y = x^{ax} \quad .5$$

### פתרונות

$$y' = e^x (x+1)^{e^x} \left[ \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] \quad (3) \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} [\ln x + 1] \quad (2) \quad y' = x^{x^2} [2x \cdot \ln x + x] \quad (1)$$

$$y' = ax^{ax} [\ln x + 1] \quad (5) \quad y' = 4(\ln x)^{4x} \left[ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \quad (4)$$

$$y' = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x+1-k) + \frac{1}{x+1-k} \cdot \sqrt{x} \right] \quad (6)$$

## פרק 4 – נגזרת סתומה

- בסרטון זה הסבר על נגזרת סתומה.

גזור את הפונקציות הבאות:

2.  $4\ln x + 10\ln y = y^2$

1.  $x^2 + y^5 - y = 1$

3.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

4. מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה (3,4).

5. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$  דרך הנקודה (1,1) הנמצאת על גרף הפונקציה.

6. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$  דרך הנקודה (1,2) הנמצאת על גרף הפונקציה.

7. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$  דרך הנקודה (1,2) הנמצאת על גרף הפונקציה.

8. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y^3 + e^{x-2y} = 2x + y$  דרך הנקודה (2,1) הנמצאת על גרף הפונקציה.

9. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$  דרך הנקודה (0,2) הנמצאת על גרף הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .

א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן  $y = 0$ .

ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים של גרף הפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף א'.

11. גזור את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .

12. גזור את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .

13. נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ .

מצא את ערך  $y''$  בנקודה בה  $y = 1$ .

**פתרונות**

$$y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y}, \frac{10}{y} - 2y \neq 0 \quad (2) \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1}, 5y^4 - 1 \neq 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5) \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4) \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}, \sqrt{x} \neq 0,1 \quad (3)$$

$$(0,0), (1,0) \cdot \aleph \quad (10) \quad y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (9) \quad y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad (8) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (7) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \ln x - x}, (x^y \ln x - x \neq 0) \quad (11) \quad y = -x, y = x - 1 \quad \text{ב.}$$

$$-1 \quad (13) \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}}, \left( x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0 \right) \quad (12)$$

## פרק 5 – כלל לופיטל

### כלל לופיטל – 0/0

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג  $\frac{0}{0}$ .

מצא את הגבולות הבאים:

- |   |   |
|---|---|
| <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^5 - 50}{2x^2 + 3x - 35}</math></p>                               | <p>1. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}</math></p>           |
| <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}</math></p>  | <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1}</math></p>                   |
| <p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}</math></p>                             | <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}</math></p>    |
| <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}</math></p>                 | <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}</math></p> |
| <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b &gt; 0)</math></p>                        | <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}</math></p>                     |
| <p>12. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3}</math></p>                               | <p>11. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}</math></p>              |
| <p>14. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}</math></p> | <p>13. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1}</math></p>   |
| <p>16. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2}</math></p>                              | <p>15. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x}</math></p>             |
| <p>18. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}</math></p>   | <p>17. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3}</math></p>    |
| <p>20. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x}</math></p>                         | <p>19. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x}</math></p>       |
| <p>22. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{20}}{e^x}</math></p>  | <p>21. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^x}</math></p>              |

23. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 2} = 4$  מצא את הקבועים  $a$  ו- $b$ .

24. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$  מצא את הקבועים  $a$  ו- $b$ .

25. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2e^{a+2x} + bx}{1 - x^2} = 3e$  מצא את הקבועים  $a$  ו- $b$ .

**פתרונות**

- (1)  $\frac{5}{6}$  (2)  $\frac{20}{17}$  (3)  $n-1$  (4) 4 (5)  $\frac{1}{6}$  (6)  $\frac{3}{2}$  (7)  $\frac{5}{6}$  (8)  $-\frac{3}{2}$  (9) 1 (10)  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$  (11)  $\frac{1}{2}$  (12)  $\frac{1}{6}$
- (13)  $-\frac{1}{2}$  (14) 2 (15) 1 (16) 2 (17)  $\frac{1}{2}$  (18)  $-\infty$  (19) 0 (20) 0 (21) 0 (22) 0
- (23)  $a=1.5, b=4$  (24)  $a=12, b=-32$  (25)  $a=3+\ln\frac{6}{5}, b=\frac{6}{5}e$

**כלל לופיטל –  $0 \cdot \infty$**

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג  $0 \cdot \infty$ .

מצא את הגבולות הבאים:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3)$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right]$

**פתרונות**

- (1)  $\infty$  (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) 0 (7)  $\frac{5}{2}$

### כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג משהו בחזקת משהו.

מצא את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad .4$$

### פתרונות

$$e^2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad e \quad (1)$$

### כלל לופיטל – $\infty - \infty$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג  $\infty - \infty$ .

מצא את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad .3$$

### פתרונות

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

## פרק 6 – חקירת פונקציה

### שלבי חקירת פונקציה

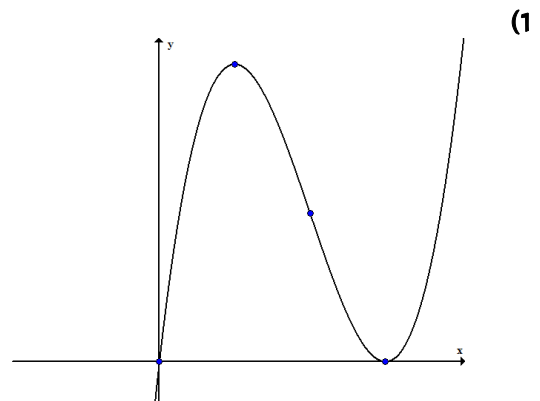
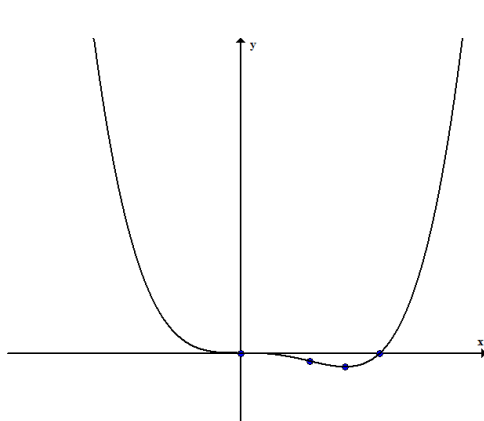
1. בסרטון זה הסבר על נקודות קיצון.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות קיצון.
3. בסרטון זה הסבר על נקודות פיתול.
4. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות פיתול.
5. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה אנכית.
6. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה משופעת.

### חקירת פולינום

1. חקור את הפונקציה  $f(x) = x(x-9)^2$ .
2. חקור את הפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x^3$ .

### פתרונות

- (1) תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(9,0)$ , נקודות קיצון:  $max(3,108)$ ,  $min(9,0)$ , תחומי עליה:  $x < 3$  או  $x > 9$ , תחום ירידה:  $3 < x < 9$ , נקודת פיתול:  $(6,54)$ , תחום קמירות:  $x > 6$ , תחום קעירות:  $x < 6$ . (2) תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ , נקודות קיצון:  $min\left(1.5, -\frac{27}{16}\right)$ , תחום עליה:  $x > 1.5$ , תחום ירידה:  $x < 1.5$ , נקודות פיתול:  $(0,0)$ ,  $(1,-1)$ , תחומי קמירות:  $x > 1$  או  $x < 0$ , תחום קעירות:  $0 < x < 1$ .



### חקירת פונקציה רציונלית

1. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ .

2. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$ .

3. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ .

4. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ .

5. חקור את הפונקציה  $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ .

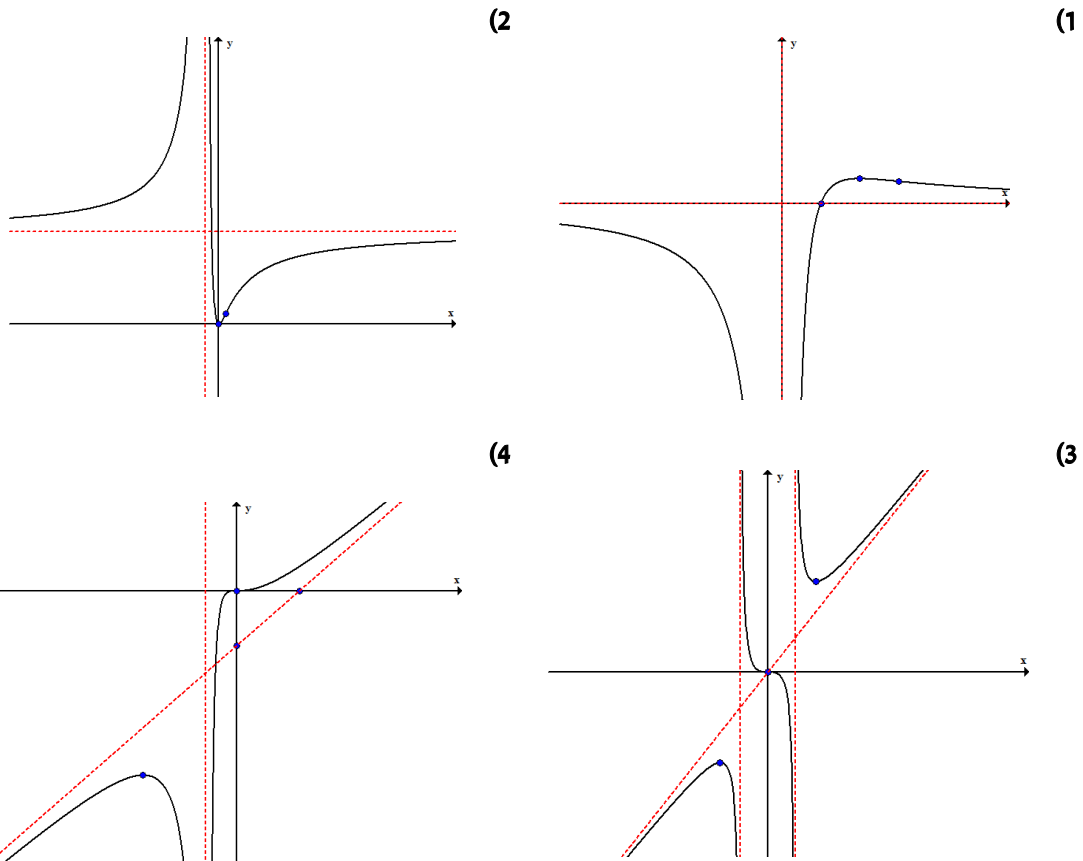
6. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$ .

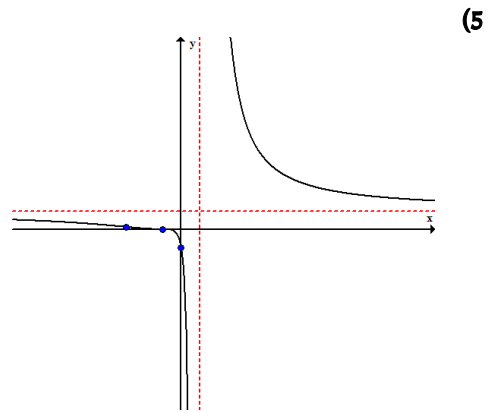
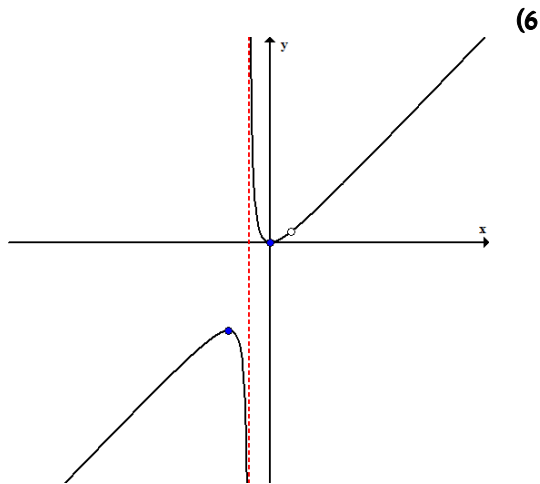
### פתרונות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$ , אסימפטוטות:  $x=0$ ,  $y=0$ , נקודת קיצון:  $\max(2, 0.25)$ , תחום עליה:  $0 < x < 2$ , תחום ירידה:  $x < 0$  או  $x > 2$ , נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ , תחום קמירות:  $x > 3$ .
- תחום קעירות:  $x < 0$  או  $0 < x < 3$ . (2) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq -1$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ , אסימפטוטות:  $x=-1$ ,  $y=2$ , נקודת קיצון:  $\min(0,0)$ , תחום עליה:  $x < -1$  או  $x > 0$ , תחום ירידה:  $-1 < x < 0$ , נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .
- תחום קמירות:  $x < -1$  או  $-1 < x < \frac{1}{2}$ , תחום קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq \pm 2$ , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ , אסימפטוטות:  $x = \pm 2$ ,  $y = x$ , נקודת קיצון:  $\min(\sqrt{12}, \sqrt{27}), \max(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , תחום עליה:  $x < -\sqrt{12}$  או  $x > \sqrt{12}$ , תחום ירידה:  $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$ , נקודת פיתול:  $(0,0)$ .
- תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  או  $x > 2$ , תחום קעירות:  $x < -2$  או  $0 < x < 2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq -1$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ , אסימפטוטות:  $x=-1$ ,  $y=x-2$ .



נקודת קיצון:  $\max\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ , תחום עליה:  $x < -3$  או  $x > -1$ , תחום ירידה:  $-3 < x < -1$ , נקודת פיתול:  $(0,0)$ , תחום קמירות:  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -1$  או  $-1 < x < 0$ . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq 1$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-1,0), (0,-1)$ , אסימפטוטות:  $x=1, y=1$ , אין נקודות קיצון, תחום ירידה: כל  $x$ , נקודת פיתול:  $(-1,0), \left(-3, \frac{1}{8}\right)$ , תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  ו- $x > 1$ , תחום קעירות:  $x < -3$  או  $-1 < x < 1$ . (6) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq \pm 1$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ , אסימפטוטות:  $x=-1$ , חור בנקודה  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ , נקודת קיצון:  $\min(0,0), \max(-2,-4)$ , תחום עליה:  $x < -2$  או  $0 < x < 1$  או  $x > 1$ , תחום ירידה:  $-2 < x < -1$  או  $-1 < x < 0$ , אין נקודות פיתול, תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  או  $x > 1$ , תחום קעירות:  $x < -1$ .





### חקירת פונקציה מעריכית

1. חקור את הפונקציה  $f(x) = x - e^x$ .

2. חקור את הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .

3. חקור את הפונקציה  $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ .

4. חקור את הפונקציה  $f(x) = xe^{-2x^2}$ .

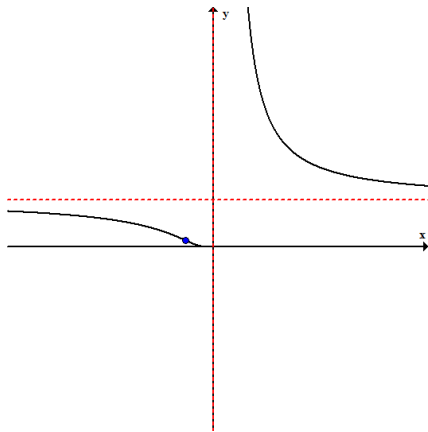
### פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -1)$ , אסימפטוטות:  $y = x$ , נקודת קיצון:  $\max(0, -1)$ , תחום עליה:  $x < 0$ , תחום ירידה:  $x > 0$ , אין נקודות פיתול, תחום קעירות: כל  $x$ .

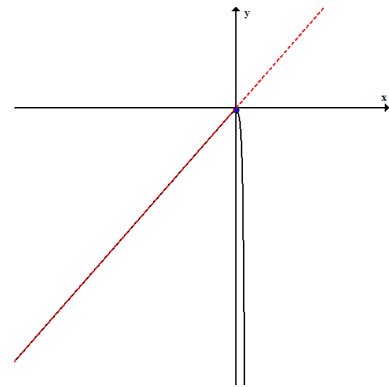
(2) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: אין, אסימפטוטות:  $x = 0$ ,  $y = 1$ , נקודת קיצון: אין, תחום ירידה: כל  $x$ , נקודת פיתול:  $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$ , תחום קמירות:  $-0.5 < x < 0$  או  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .

(3) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x \neq 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-2, 0)$ , אסימפטוטות:  $x = 0$ ,  $y = x + 3$ , נקודת קיצון:  $\min(2, 4e^{1/2}), \max(-1, e^{-1})$ , תחום עליה:  $x < -1$  או  $x > 2$ , תחום ירידה:  $-1 < x < 0$  או  $0 < x < 2$ , נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .

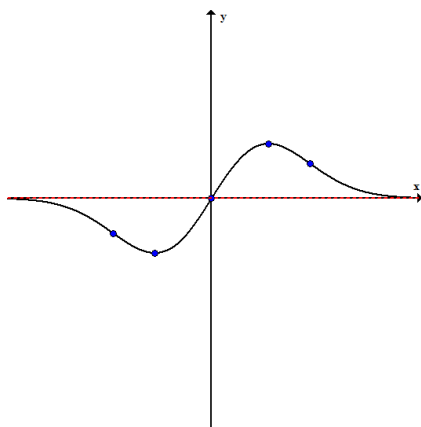
תחום קמירות:  $-0.4 < x < 0$  או  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .  
 (4) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  
 אסימפטוטות:  $y=0$ , נקודת קיצון:  $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$   
 תחום עליה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , תחום ירידה:  $x < -\frac{1}{2}$  או  $x > \frac{1}{2}$   
 נקודת פיתול:  $(0,0), (-\sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}e^{-3/2}), (\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}e^{-3/2})$   
 תחום קמירות:  $-\sqrt{3/4} < x < 0$  או  $x > \sqrt{3/4}$ , תחום קעירות:  $0 < x < \sqrt{3/4}$  או  $x < -\sqrt{3/4}$ .



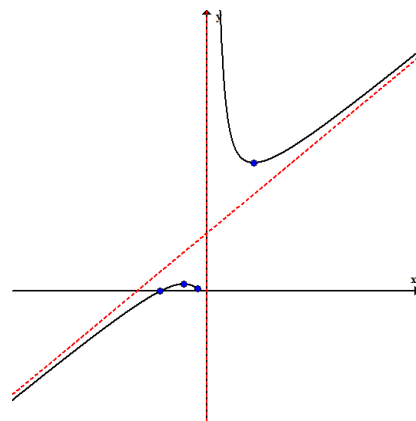
(2)



(1)



(4)



(3)

### חקירת פונקציה לוגריתמית

1. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

2. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

3. חקור את הפונקציה  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ .

4. חקור את הפונקציה  $f(x) = x \ln x$ .

5. חקור את הפונקציה  $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$ .

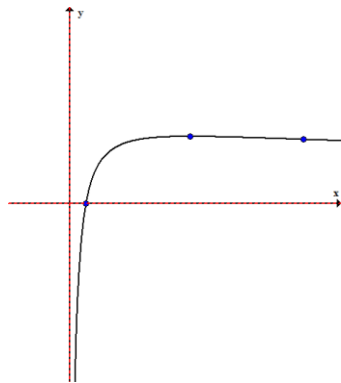
6. חקור את הפונקציה  $f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3$ .

### פתרונות

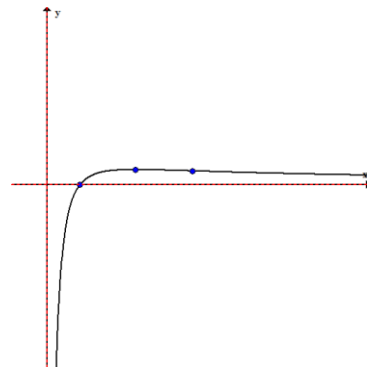
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x > 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$ , אסימפטוטות:  $x=0$ ,  $y=0$ , נקודת קיצון:  $\max(e, 1/e)$ , תחום עליה:  $0 < x < e$ , תחום ירידה:  $x > e$ , נקודת פיתול:  $(e^{3/2}, (3/2)/e^{3/2})$ , תחום קעירות:  $0 < x < e^{3/2}$ , תחום קמירות:  $x > e^{3/2}$  (2) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x > 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$ , אסימפטוטות:  $x=0$ ,  $y=0$ , נקודת קיצון:  $\max(e^2, 2/e)$ , תחום עליה:  $0 < x < e^2$ , תחום ירידה:  $x > e^2$ , נקודת פיתול:  $(e^{8/3}, \frac{8/3}{\sqrt{e^{8/3}}})$ , תחום קמירות:  $x > e^{8/3}$ , תחום קעירות:  $0 < x < e^{8/3}$  (3) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x < 2$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$ ,  $(0, -\frac{1}{2} \ln 2)$ , אסימפטוטות:  $x=2$ , אין נקודות קיצון, תחום עליה: כל  $x$ , אין נקודות פיתול. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x > 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$ , אסימפטוטות: חור בנקודה  $(0,0)$ , נקודת קיצון:  $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ , תחום עליה:  $x > \frac{1}{e}$ , תחום ירידה:  $0 < x < \frac{1}{e}$ , אין נקודות פיתול, תחום קמירות: כל  $x$ . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x > 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(e,0)$ ,  $(e^{-3},0)$ , אסימפטוטות:  $x=0$ , נקודת קיצון:  $\min(e^{-1}, -4)$ , תחום עליה:  $x > e^{-1}$ , תחום ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ , נקודת פיתול:  $(1,-3)$ , תחום קעירות:  $x > 1$ , תחום קמירות:  $0 < x < 1$

(6) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x > 0$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(e^{1.5}, 0), (e^{-0.5}, 0)$ , אסימפטוטות:  $x = 0$ , נקודת קיצון:  $\min(e^{1/2}, -4)$ , תחום עליה:  $x > e^{1/2}$ , תחום ירידה:  $0 < x < e^{1/2}$ , נקודת פיתול:  $(e^{3/2}, 0)$ , תחום קעירות:  $x > 3/2$ , תחום קמירות:  $0 < x < 3/2$

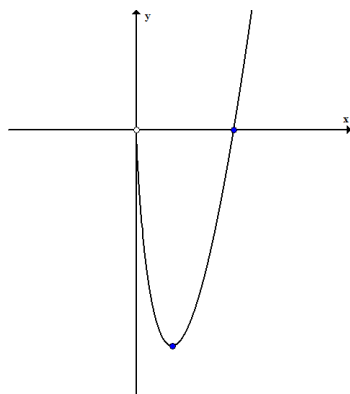
(2)



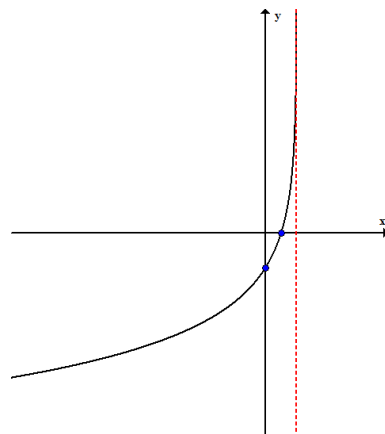
(1)



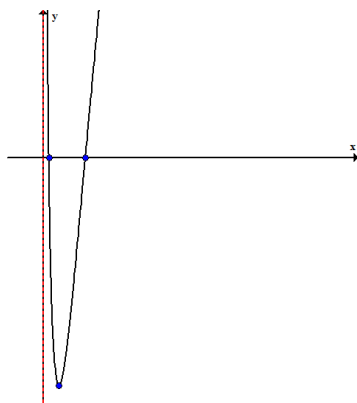
(4)



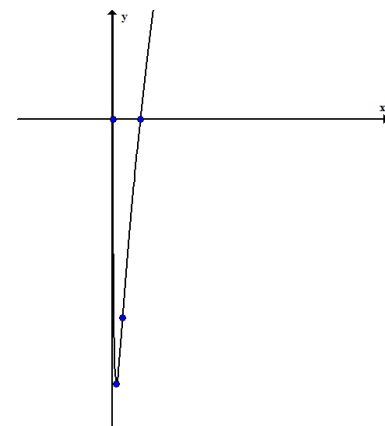
(3)



(6)



(5)



### חקירת פונקציה עם שורשים

1. חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

2. חקור את הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$ .

3. חקור את הפונקציה  $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$ .

4. חקור את הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ .

### פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,1)$ , אסימפטוטות:  $y=0$ , נקודת קיצון:  $\max(0,1)$ , תחום עליה:  $x < 0$ , תחום ירידה:  $x > 0$ , נקודת פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$ , תחום קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , תחום קמירות:  $x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

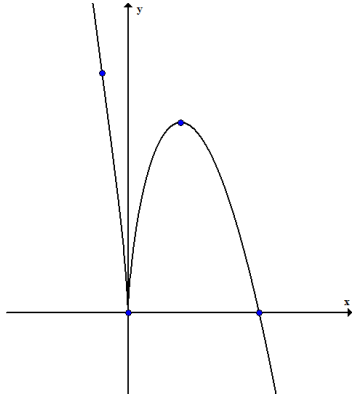
(2) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0), (1,0)$ , אין אסימפטוטות, נקודת קיצון:  $\max(2/5, 0.326), \min(0,0)$ , תחום עליה:  $0 < x < 2/5$ , תחום ירידה:  $x < 0$  או  $x > 2/5$ , נקודת פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ , תחום קמירות:  $x < -0.2$ , תחום קעירות:  $-0.2 < x < 0$

או  $x > 0$ . (3) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,1), (-1,0), (1,0)$ , אין אסימפטוטות, נקודות קיצון:  $\max(0), \min(-1, 0)$ , תחום עליה:  $-1 < x < 0$

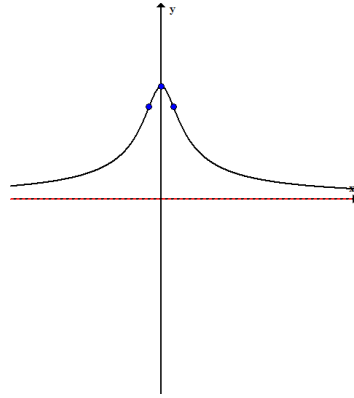
או  $x > 1$ , תחום ירידה:  $x < -1$  או  $0 < x < 1$ , אין נקודות פיתול, תחום קמירות: לכל  $x$ .

(4) תחום הגדרה ורציפות: כל  $x$ , זוגיות: זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,-1), (1,0), (-1,0)$ , אין אסימפטוטות, נקודת קיצון:  $\min(0,-1)$ , תחום עליה:  $0 < x < 1$  או  $x > 1$ , תחום ירידה:  $x < -1$  או  $-1 < x < 0$ , נקודות פיתול:  $(1,0), (-1,0)$ , תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , תחום קעירות:  $x > 1$  או  $x < -1$ .

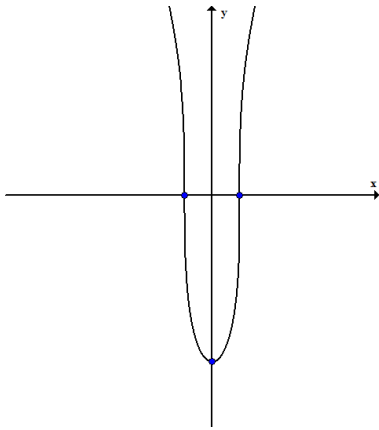
(2)



(1)



(4)



(3)

