

## תוכן העניינים:

2	מערכות ספרתיות
2	טכניקות מתקדמות בלוגיקה צירופית
2	חלוקה ומימוש של פונקציות בעזרת מפות קרנו :
2	סיכום כללי :
5	שאלות :
6	תשובות סופיות :
7	הרחבה ומימוש של פונקציות בעזרת פונקציות :
7	סיכום כללי :
9	שאלות :
10	תשובות סופיות :
11	שאלות משולבות שונות בלוגיקה צירופית :
11	שאלות :
14	תשובות סופיות :

# מערכות ספרתיות

## טכניקות מתקדמות בלוגיקה צירופית

### חלוקה ומימוש של פונקציות בעזרת מפות קרנו:

**סיכום כללי:**

**מטרה:**

בנושא זה נעסוק במימוש של פונקציות בעלות מספר משתנים בעזרת יחידת בורר (MUX) בגודל קטן יותר כך שע"י חלוקת הפונקציה לקבוצות, נוכל למצוא מימוש הדורש מינימום שערים לוגים ושימוש מינימלי בקבועים 1 ו-0.

**מימוש פונקציה של 3 משתנים:**

בהינתן פונקציה של 3 משתנים:

- קיימות 3 אפשרויות חלוקה למימוש בעזרת MUX  $2 \times 1$ .
- קיימות 3 אפשרויות חלוקה למימוש בעזרת MUX  $4 \times 1$ .

**חלוקות במפות קרנו עבור פונקציה של 3 משתנים:**

חלוקות עבור מימוש בעזרת MUX  $2 \times 1$ :

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

חלוקות עבור מימוש בעזרת MUX  $4 \times 1$ :

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

**הערה כללית:**

לכל חלוקה ייתכן שימוש באלמנטים נוספים :

- במימוש לפי  $2 \times 1$  MUX ייתכנו מצבים בהם נצטרך עד 2 שערים לוגיים למימוש הקבוצות בחלוקה מסוימת, זאת בנוסף לשימוש אפשרי בקבועים 1 ו-0.
- במימוש לפי  $4 \times 1$  MUX ייתכן שימוש בשער NOT והקבועים 1 ו-0.

**מימוש פונקציה של 4 משתנים:**

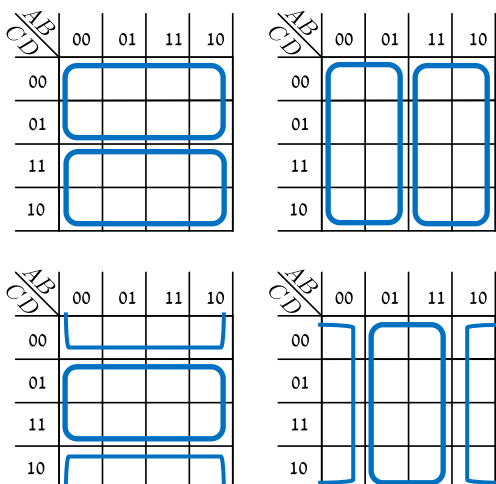
בחלוקות הכוללות 4 מינטרמים ייתכנו מקרים בהם מספר ה-1ים יהיה אי-זוגי. מקרים כאלו מחייבים שימוש בשער לוגי אחד לפחות (שאינו שער NOT) ישנן שאלות שבהן שימוש בשערים לוגיים הוא אסור ולכן יהיה צורך למצוא חלוקה שבה מספר ה-1ים אינו אי-זוגי בכל הקבוצות בחלוקה זו.

אם יש הנחיה בשאלה שלא להשתמש שערים לוגיים נוספים (למעט שער NOT) אז נמנע מחלוקות שבהן קבוצות עם מספר אי-זוגי של 1ים ונחפש חלוקה מתאימה שבה מספר זוגי של 1ים בכל הקבוצות הניתנים למימוש ע"י אחד המשתנים בצורתו הרגילה או המשלימה.

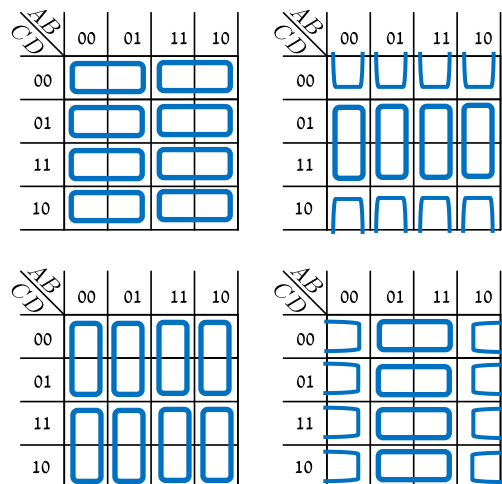
בהינתן פונקציה של 4 משתנים :

- קיימות 4 אפשרויות חלוקה למימוש בעזרת  $2 \times 1$  MUX.
- קיימות 6 אפשרויות חלוקה למימוש בעזרת  $4 \times 1$  MUX.
- קיימות 4 אפשרויות חלוקה למימוש בעזרת  $8 \times 1$  MUX.

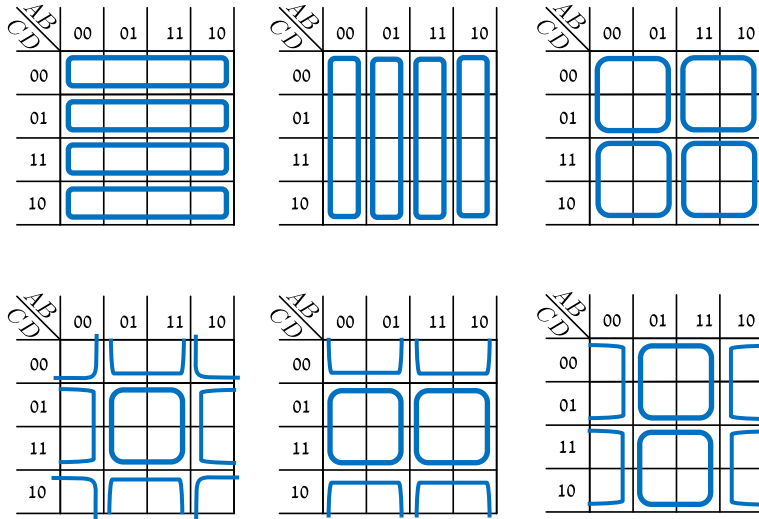
בעזרת MUX בגודל  $2 \times 1$  :



בעזרת MUX בגודל  $8 \times 1$  :



בעזרת MUX בגודל  $4 \times 1$  :



איך נדע איזו חלוקה לבחור בשאלה?

- אם אסור שימוש בשערים לוגיים נכוון לחלוקות שבהן יש מספר זוגי של 1-ים בקבוצות המתקבלות.
  - קבוצה בחלוקה מסוימת שבה כל ערכי המינטרמים 1, ניתן לממש ע"י שימוש בקבוע 1.
  - קבוצה בחלוקה מסוימת שבה כל ערכי המינטרמים 0, ניתן לממש ע"י שימוש בקבוע 0.
  - קבוצה בחלוקה מסוימת עם מספר זוגי של 1-ים המתאימים לאחד מערכי המשתנים (שאינם ה-selection bits) ניתן לממש ע"י הכנסת משתנה זה בצורתו הרגילה או המשלימה (אם מותר שימוש בשער NOT).
- אם מבקשים שימוש בשער/ים לוגיים ספציפיים נבחר חלוקה שבהן הקבוצות המתקבלות נעזרות בשערים אלו (כמובן בתוספת או אי-תוספת הקבועים, לפי הנחיית השאלה).

**שאלות:**

(1) נתונה פונקציה  $f(a,b,c,d)$ . יש למצוא בכל סעיף מימוש באמצעות MUX מסוג  $1 \rightarrow 4$  בודד ומינימום שערים לוגים. האם יש צורך בקבועים 1 ו-0 בכל מקרה? ציירו את המימוש המתאים.

ג.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	0	1	1	0

ב.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

א.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	1	0	0	0

ו.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

ה.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	1

ד.

$\begin{matrix} ab \\ cd \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

(2) נתונה מפת קרנו של הפונקציה  $F(A,B,C,D)$ .

ממשו את הפונקציה  $F(A,B,C,D)$  בעזרת מרבב  $4 \times 1$ , שער NOT בודד והקבועים 1 ו-0.

$\begin{matrix} AB \\ C \end{matrix}$	00	01	11	10
0	$\bar{D}$	$\bar{D}$	1	0
1	1	1	1	0

3) נתונה מפת קרנו של הפונקציה  $F(A, B, C, D)$ .

ממשו את הפונקציה  $F(A, B, C, D)$  בעזרת מרבב  $4 \times 1$ , שער NOT בודד והקבועים 1 ו-0.

$\begin{matrix} AB \\ \hline C \end{matrix}$	00	01	11	10
0	1	1	$D$	$D$
1	$D$	$D$	$\bar{D}$	$\bar{D}$

4) נתונה מפת קרנו של הפונקציה  $F(A, B, C, D)$ .

ממשו את הפונקציה  $F(A, B, C, D)$  בעזרת מרבב  $4 \times 1$ , הקבועים 1 ו-0 בלבד.

$\begin{matrix} AB \\ \hline C \end{matrix}$	00	01	11	10
0	0	$\bar{D}$	$\bar{D}$	$\bar{D}$
1	$D$	$\bar{D}$	$\bar{D}$	1

### תשובות סופיות:

- 1) ראו מימושים מתאימים בסרטוני הוידאו.
- 2) ראו מימוש מתאים בסרטון הוידאו.
- 3) ראו מימוש מתאים בסרטון הוידאו.
- 4) ראו מימוש מתאים בסרטון הוידאו.

## הרחבה ומימוש של פונקציות בעזרת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### הרחבת פונקציות:

כאשר נתונה פונקציה עם מספר משתנים מסוים, ונרצה לכתוב אותה במפת קרנו הכוללת יותר משתנים, יש להכפיל כל מינטרם (או מקסטרם) בפונקציה המקורית לפי תוספת המשתנה הנוסף.

לדוגמה:

אם נרצה לכתוב פונקציה  $f(a,b,c)$  במפת קרנו של 4 משתנים  $a, b, c, d$  אז כל מינטרם ב- $f$  יכסה 2 משבצות סמוכות במפה לפי ערכו של  $d$  והמשלים שלו.

נניח ו- $f(a,b,c) = \bar{a}bc$  אז במפת קרנו יהיה לסמן 1 במשבצות המתאימות לערכי המינטרמים  $\bar{a}bc$  ו- $\bar{a}b\bar{c}$ .

אותו העיקרון נשמר גם עבור כתיבת 0 במבצעות המתאימות למקסטרמים וגם עבור כתיבת ערך אדיש (X) במשבצות המיועדות לכך.

#### דרך פעולה:

- כשנרצה להרחיב פונקציה  $f$  הנתונה עם מספר משתנים חלקי בסדר מסוים:
- 1 נכתוב את ערכי המינטרמים (בייצוג SOP) או המקסטרמים (בייצוג POS) ואת הערכים האדישים עבור המשתנים בהן הפונקציה נתונה.
  - 2 נכפיל כל ערך שכתבנו ונוסיף 0 ו-1 בערך המשתנה החדש.
  - 3 נמלא מפת קרנו של כל המשתנים בערכים האדישים וערכי המינטרמים (בייצוג SOP) או בערכי המקסטרמים (בייצוג POS).
  - 4 נכתוב את הפונקציה בייצוג המבוקש (SOP או POS) ממפת הקרנו המלאה.

לדוגמה:

נניח פונקציה  $f(c,a,b)$  שנרצה להרחיב ל- $f(a,b,c,d)$ . נכתוב כל ערך מינטרם

פעמיים ונוסיף לו 0 ו-1 במשתנה  $d$ . אם:  $f(c,a,b) = \sum(1,6) + \Phi(3)$  אז:

$$m_1 : cab = 001 \rightarrow \begin{array}{c} \overline{abcd} \\ \left\{ \begin{array}{l} 010\overline{0} \\ 010\overline{1} \end{array} \right. \quad m_6 : cab = 110 \rightarrow \begin{array}{c} \overline{abcd} \\ \left\{ \begin{array}{l} 101\overline{0} \\ 101\overline{1} \end{array} \right. \quad m_3 : cab = 011 \rightarrow \begin{array}{c} \overline{abcd} \\ \left\{ \begin{array}{l} 101\overline{0} \\ 101\overline{1} \end{array} \right.$$

**פעולות בין פונקציות ובמפות קרנו:**

כשנרצה לבצע פעולה בין שתי פונקציות כגון:  $f_3 = f_1 * f_2$  (כאשר  $*$  מייצג פעולה כלשהי) ושתי הפונקציות  $f_1$  ו- $f_2$  מסודרות לפי אותם המשתנים ובאותו הסדר, נעשה בדיקה:

• אם הפעולה  $*$  היא חילופית (למשל:  $f_3 = f_1 \oplus f_2$ ,  $f_3 = f_1 \cdot f_2$ ,  $f_3 = f_1 + f_2$ )

$$0 * 0 = 0 * \phi =$$

$$0 * 1 = 1 * \phi = \quad \text{אז נחשב את 6 התוצאות האפשריות הבאות:}$$

$$1 * 1 = \phi * \phi =$$

ואז ניגש למלא מפת קרנו של פונקצית היעד  $f_3$ .

• אם הפעולה  $*$  היא אינה חילופית (למשל:  $f_3 = f_1 + \bar{f}_2$ ,  $f_3 = \bar{f}_1 \cdot f_2$ )

$$0 * 0 = 0 * \phi =$$

$$0 * 1 = \phi * 0 =$$

$$0 * 1 = 1 * \phi = \quad \text{אז נחשב את 9 התוצאות האפשריות הבאות:}$$

$$1 * 0 = \phi * 1 =$$

$$1 * 1 = \phi * \phi =$$

ואז ניגש למלא מפת קרנו של פונקצית היעד  $f_3$ .



שאלות:

(1) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f_1(w, x, y) = \sum(1, 2) + \Phi(0, 3, 7)$

$f_2(w, y, z) = \prod(1, 6) \cdot \prod_{\phi}(4, 7)$

תהי:  $f_3 = f_1 \cdot f_2$

א. רשמו ביטוי SOP קנוני לפונקציה  $f_3(w, x, y, z)$  (שימו לב לסדר המשתנים).

ב. מה הוא מספר האימפליקנטים הראשיים (PI) בפונקציה  $f_3$ ?  
כמה מתוכם הם הכרחיים (EPI)?

ג. כתבו את הפונקציה  $f_3$  בצורה המינימלית.

ד. האם  $f_3$  היא אופרטור אוניברסלי? (מערכת פעולות שלמה)?  
אם כן - הוכיחו זאת.

אם לא, קבעו האם אחד מהסטים:  $\{f_3, 1, 0\}$ ,  $\{f_3, 1\}$ ,  $\{f_3, 0\}$   
יכול להיות מערכת פעולות שלמה. נמקו.

(2) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f_1(B, C, D) = \prod(0, 2, 3, 4) \cdot \prod_{\phi}(1, 6, 7)$

$f_2(C, A, D) = \sum(2, 3, 5) + \Phi(1, 4, 6)$

תהי:  $f_3 = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2$

א. רשמו ביטוי SOP מינימלי לפונקציה  $f_3(A, B, C, D)$  (שימו לב לסדר המשתנים).

ב. מצאו מימוש לפונקציה בעזרת MUX בגודל  $2 \times 1$  בודד ושער NOT יחיד בלבד.  
אסור השימוש בקבועים 0 ו-1.

ג. (1) כתבו את הפונקציה הדואלית של  $f_3$  בצורת SOP מינימלי.

(2) האם  $f_3$  היא דואלית עצמית? נמקו.

ד. (1) כתבו את הפונקציה המשלימה של  $f_3$ , כלומר את  $\bar{f}_3$  בצורת SOP מינימלי.

(2) ממשו את  $\bar{f}_3$  בעזרת מינימום שערי NOR.

3 נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f_2(w, z, y) = \prod(0, 2, 7) \cdot \prod_{\Phi}(1, 3)$

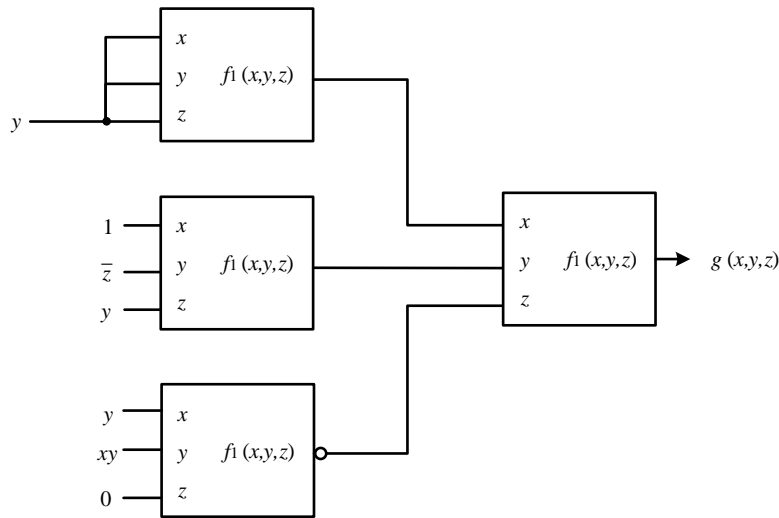
$$f_3(w, x, y, z) = \sum(4, 8, 10, 13, 14) + \Phi(1, 2, 3, 6, 7, 9)$$

תהי:  $f_3 = f_1 \oplus \bar{f}_2$  כאשר  $f_1(x, y, z)$ .

א. מצאו את  $f_1(x, y, z)$  וכתבו אותה בייצוג SOP סטנדרטי.

ב. ממשו את הפונקציה  $f_1(x, y, z)$  בעזרת מספר מינימלי של שערי NAND בלבד.

ג. מצאו את הפונקציה  $g(x, y, z)$  במעגל הבא:



### תשובות סופיות:

1 א.  $f_3(w, x, y, z) = \sum(2, 3, 4) + \Phi(0, 6, 7, 15)$  ב. PI : 2, EPI : 2.

ד.  $\{f_3\}$  הוא אופרטור אוניברסלי.

ג.  $f_3(w, x, y, z) = \bar{w}y + \bar{w}\bar{z}$

ב. ראו מימוש בסרטון הוידאו.

2 א.  $f_3(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{D} + AC$

ג. (2) לא.

ג.  $f_{3d}(A, B, C, D) = \bar{A}C + \bar{A}\bar{D} + C\bar{D}$  (1)

ד. (2) ראו מימוש בסרטון הוידאו.

ד.  $\bar{f}_3(A, B, C, D) = A\bar{C} + \bar{A}D + \bar{C}D$  (1)

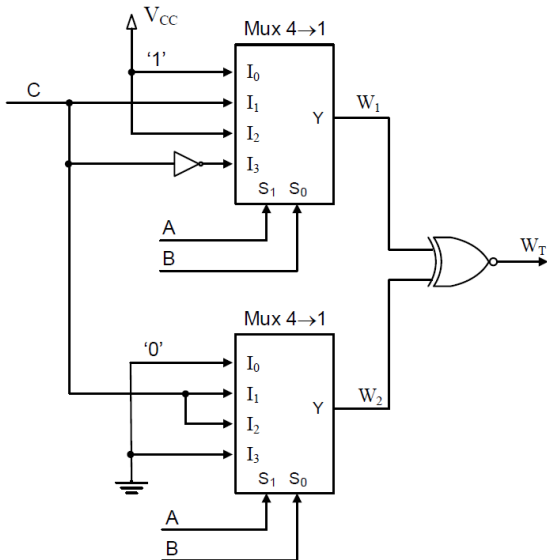
ב. ראו מימוש בסרטון הוידאו.

3 א.  $f_1(x, y, z) = \sum(0, 2, 3, 5, 6, 7) + \Phi(1)$

ג.  $g(x, y, z) = y + \bar{z}$

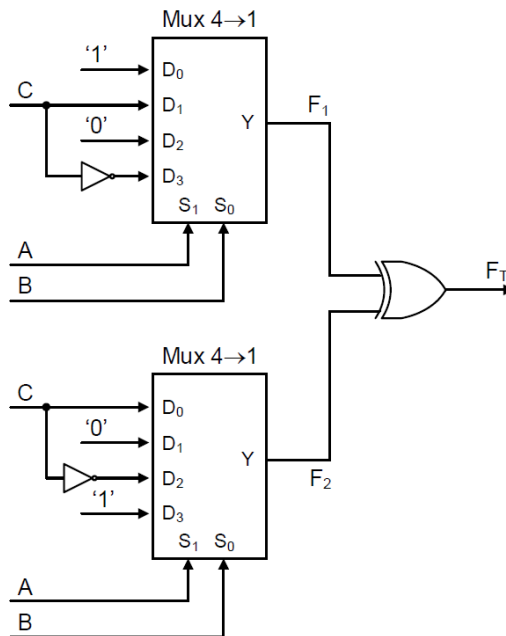
## שאלות משולבות שונות בלוגיקה צירופית:

### שאלות:



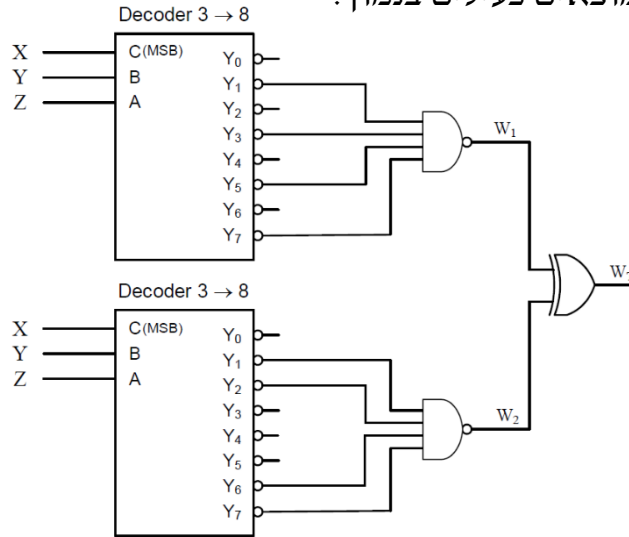
- (1) באיור לשאלה נתון מעגל לוגי. כניסות המעגל הן ABC (A-MSB), יציאות המעגל הן  $W_T$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ . השער הלוגי במעגל הוא מסוג XNOR.
- רשום טבלת אמת מלאה למערכת.
  - ממש בעזרת שערי NAND בלבד את הפונקציה  $W_1$ .
  - פשט את הפונקציה  $W_T$  וממש אותה במינימום שערים לוגיים.

- (2) באיור לשאלה נתון מעגל לוגי כניסות המעגל הן ABC (A-MSB), יציאות המעגל הן:  $F_T$ ,  $F_2$ ,  $F_1$ .



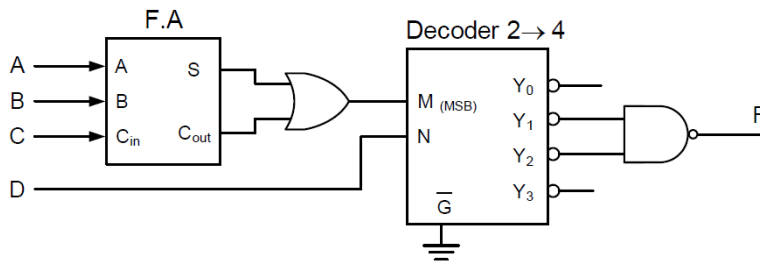
- רשום טבלת אמת מלאה למערכת.
- ממש בעזרת שערי NOR בלבד את הפונקציה  $F_1$ .
- פשט את הפונקציה  $F_T$  וממש אותה במינימום שערים לוגיים.

- 3) באיור לשאלה נתון מעגל לוגי. כניסות המעגל הן XYZ (X-MSB), יציאות המעגל הן:  $W_T$ ,  $W_2$ ,  $W_1$ . למפענחים מוצאים פעילים בנמוך.



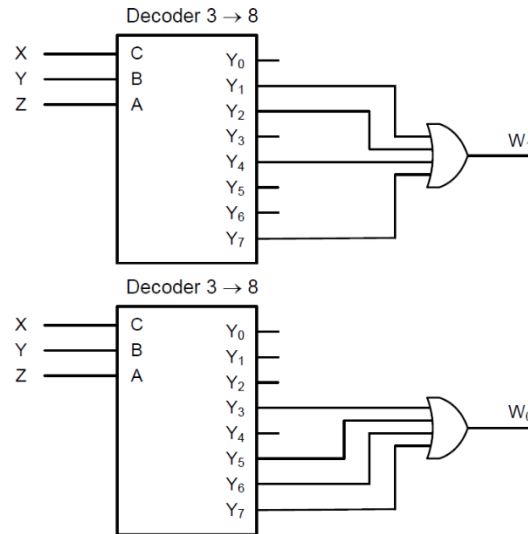
- א. רשום טבלת אמת מלאה למערכת.  
 ב. ממש בעזרת שערי NAND בלבד את הפונקציה  $W_2$ .  
 ג. פשט את הפונקציה  $W_T$  וממש אותה במינימום של שערים לוגיים.

- 4) באיור לשאלה 7 נתון מעגל לוגי המכיל מסכם מלא, מפענח 2 → 4 (בעל מוצאים פעילים בנמוך) ושערים לוגיים, כניסות המעגל ABCD כאשר A הוא MSB, יציאת המעגל F.



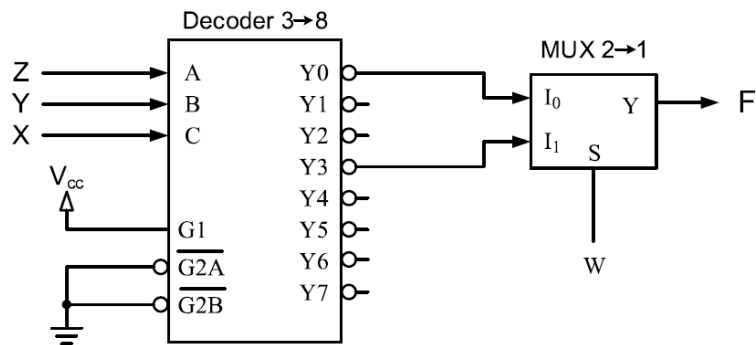
- א. רשום טבלת אמת לפונקציה.  
 ב. ממש את הפונקציה על ידי מינימום שערי NAND בלבד.  
 ג. ממש את הפונקציה על ידי מפענח 4 → 16 בעל מספר כניסות כרצונך.

- 5) באיור לשאלה 7 נתון מעגל לוגי: כניסות המעגל הן XYZ (X-MSB). יציאות המעגל הן  $W_0$ ,  $W_1$ . למפענח מוצאים פעילים בגובה (1 לוגי).



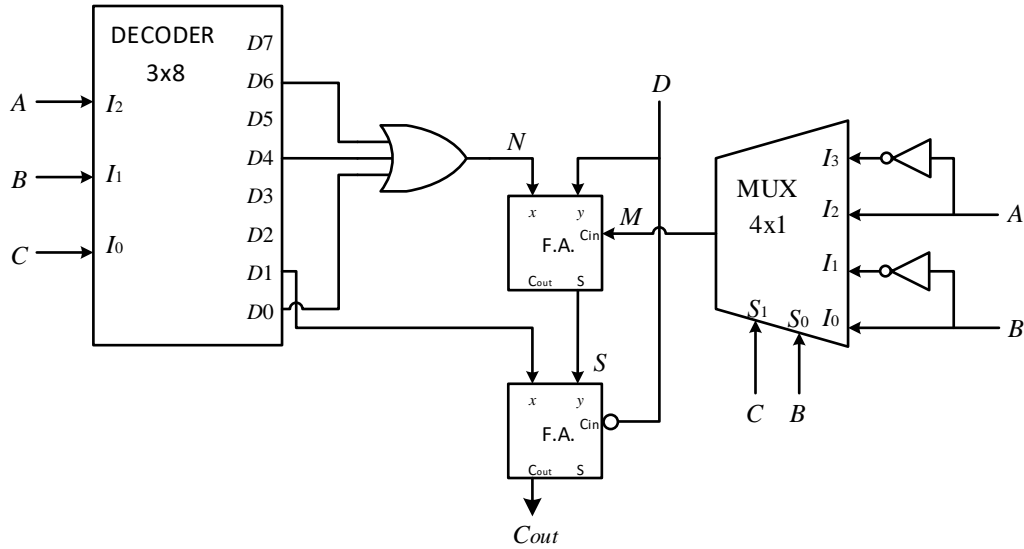
- א. רשום טבלת אמת מלאה למערכת.  
 ב. רשום במינימום ליטרלים את פונקציות המוצא  $W_0$ ,  $W_1$ .  
 ג. ממש את הפונקציות בעזרת 2 מרובבים של  $4 \rightarrow 1$  ושערי NOT בלבד.

- 6) באיור לשאלה מתואר מעגל לוגי בעל מפענח  $3 \rightarrow 8$  עם מוצאים פעילים בנמוך (0 לוגי) ומרובב  $2 \rightarrow 1$ .



- א. שרטט טבלת אמת של הפונקציה  $F(W, X, Y, Z)$ .  
 ב. פשט את הפונקציה ככל שניתן, וממש אותה ע"י שערי NOR בלבד.

7 נתון המעגל הבא עבור משתני כניסה  $A, B, C, D$  :



- א. כתבו ביטוי מינימלי בצורת SOP ל-  $M(A, B, C, D)$  ול-  $N(A, B, C, D)$ .
- ב. מצאו ייצוג קנוני (סטנדרטי) בצורת SOP ל-  $S(A, B, C, D)$ . פשטו את הייצוג וכתבו גם ייצוג מינימלי.
- ג. כתבו ייצוג קנוני ומינימלי בצורת POS ל-  $C_{out}(A, B, C, D)$ .

### תשובות סופיות:

- (1) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב. ראו מימוש בסרטון הוידאו.  
ג.  $W_T = \bar{A}B + AC$ .
- (2) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב. ראו מימוש בסרטון הוידאו.  
ג.  $F_T = \bar{B}\bar{C} + BC = B \odot C$ .
- (3) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב. ראו מימוש בסרטון הוידאו.  
ג.  $W_T(x, y, z) = \bar{y}z + \bar{x}z + xy\bar{z}$ .
- (4) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב+ג. ראו מימושים בסרטון הוידאו.
- (5) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב.  $W_0 = xy + yz + xz$ ,  $W_1 = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz$ . ג. ראו מימוש בסרטון הוידאו.
- (6) א. ראו טבלת אמת בסרטון הוידאו. ב.  $F(W, X, Y, Z) = X + Y\bar{Z} + \bar{X}Z + X\bar{Y}$ .
- (7) א.  $M(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$ ,  $N(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{C} + A\bar{C}$ .  
ב.  $S(A, B, C, D) = \sum(0, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15)$ .  
ג.  $C_{out}(A, B, C, D) = \prod(1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$ .  
 $C_{out}(A, B, C, D) = \bar{D}(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$