

תוכן העניינים:

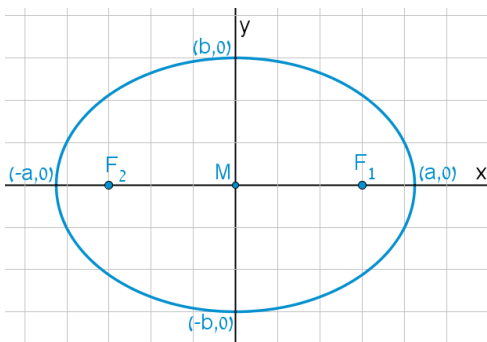
2	פרק 3
2	גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה
2	האליפסה :
2	הגדרה :
2	מושגים באליפסה :
3	משוואות וקשרים :
3	שאלות :
5	תשובות סופיות :
6	הפרבולה :
6	הגדרה :
6	מושגים בפרבולה :
6	משוואת הפרבולה :
7	משיק לפרבולה :
7	מיתר המחבר שתי נקודות השקה :
7	תיאורים גרפיים :
8	שאלות :
11	תשובות סופיות :

פרק 3

גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

האליפסה:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
- (8) מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

- (9)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10)** מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.
- (11)** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.
- (12)** נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.
- (13)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- (14)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- (15)** באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.
- (16)** באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.
- (17)** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y .
- מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.
- (18)** מצא באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.
- (19)** ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

(20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1$, $(0 < a \neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ (3)

$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1$ (2)

$2a = 12$, $2b = 6$ (1)

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ (6)

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$ (5)

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ (4)

$(4, \sqrt{24})$, $(4, -\sqrt{24})$, $(-4, \sqrt{24})$, $(-4, -\sqrt{24})$ (8)

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ (7)

$(\sqrt{6}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{6}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$ (10)

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ (9)

(12) משיק: $k = \pm 12$, חותך: $-12 < k < 12$.

$y = \sqrt{6}x$ (11)

$S = 26 \frac{2}{3}$ יח"ש (15)

$S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$ (14)

$S = 60$ יח"ש (13)

$y = -x + 2.5$ (18)

$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$ (17)

$(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ (16)

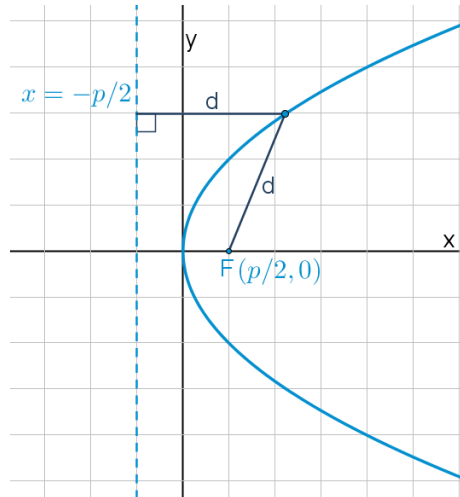
(20) א. i. $a = \sqrt{12.5}$.ii $a \neq \sqrt{12.5}$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ (19)

הפרבולה:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.



מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

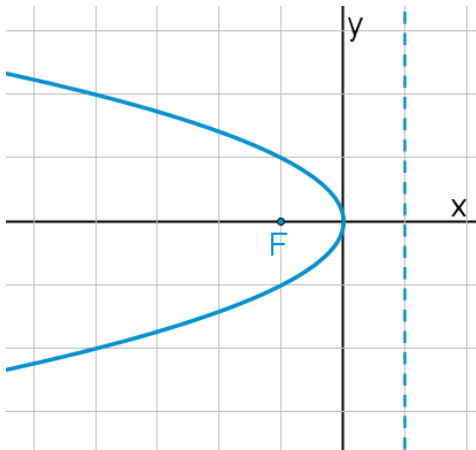
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

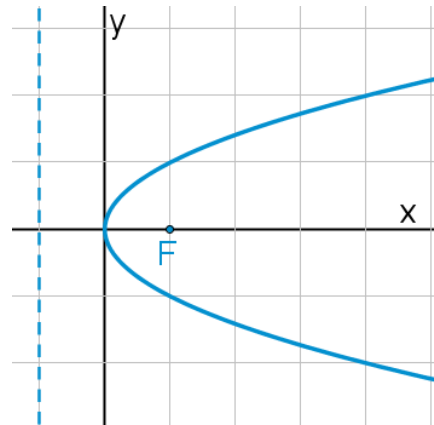
- משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0, y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$:



שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.
- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9, -6)$.
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 18$.
- (6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.
- (10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.
- (11) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

- (13)** קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.
- (14)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.
- (15)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
- (16)** נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?
- (17)** נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.
- א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1.5$.
- ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x .
- (18)** הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$.
- מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.
- (19)** נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי.
- אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$.
- מצא את משוואת הנורמל.
- (20)** מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$.
- מצא את משוואת המשיק.
- (21)** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .
- (22)** נתונות שתי פרבולות: I. $y^2 = 6x$, II. $y^2 = 12x$.
- ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

- (23)** נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.
- (24)** נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב-1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.
- (25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.
- (26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8, 0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.
- (27)** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.
- (28)** הנקודה $A(2, 3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה- y .
- (29)** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$. הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B . הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש $\triangle ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה- x .
- (30)** אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

- $$y^2 = 12x \quad (2)$$
- $$y^2 = 4x \quad (4)$$
- $$\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right) \quad (6)$$
- $$\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right) \quad (8)$$
- $$S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2 \quad (10)$$
- $$S_{ABCF} = 40\frac{5}{8} \quad (12)$$
- $$y = -2x \quad \text{או} \quad y = 2x \quad (14)$$
- $$k = \frac{1}{2} \quad (16)$$
- $$B\left(6\frac{3}{4}, -9\right) \quad (18)$$
- $$y = x + 2 \quad (20)$$
- הוכחה. (22)
- $$y = -9x + 18 \quad (24)$$
- $$(x-8)^2 + y^2 = 55 \quad (26)$$
- $$\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{16} \quad (28)$$
- $$y^2 = 1\frac{1}{2}x \quad (30)$$
- $$p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right) \quad (1)$$
- $$y^2 = 10x \quad (3)$$
- $$y^2 = 12x \quad (5)$$
- $$(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8}) \quad (7)$$
- $$S_{OAB} = 300\sqrt{3} \quad (9)$$
- $$S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2 \quad (11)$$
- $$B\left(\frac{1}{4}, 1\right) \quad \text{או} \quad B\left(\frac{1}{4}, -1\right) \quad (13)$$
- $$y = 2x - 2 \quad (15)$$
- $$y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2} \quad \text{או} \quad (17)$$
- $$y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8} \quad (19)$$
- $$A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right) \quad (21)$$
- $$7x + 3y - 7 = 0 \quad (23)$$
- $$(x-6)^2 + y^2 = 144 \quad (25)$$
- $$\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2 \quad (27)$$
- $$C(p+2, 0) \quad (29)$$