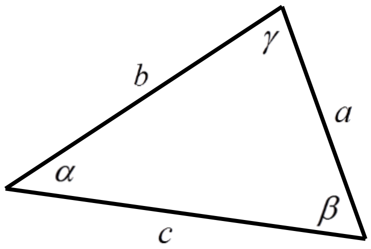
תוכן העניינים:

פרק 17

טריגונומטריה במישור

סיכום עיקרי הדברים הנלמדים בפרק:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

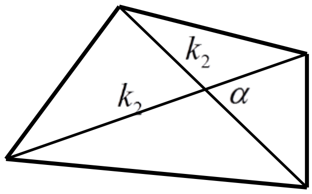
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטחים של משולשים ומרובעים:

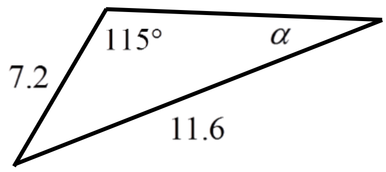
- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.



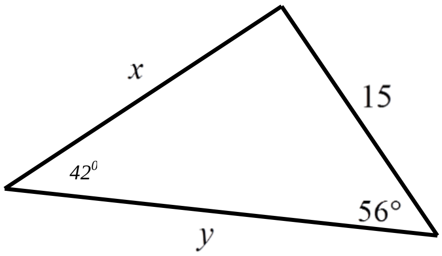
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

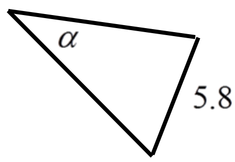
א.



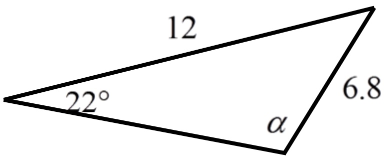
ב.



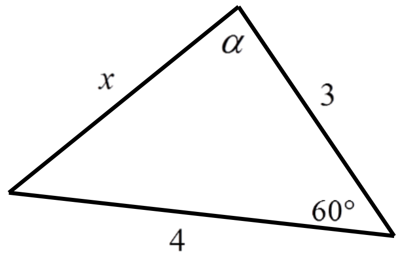
ג. רדיוס המעגל: $R=7$.



ד.

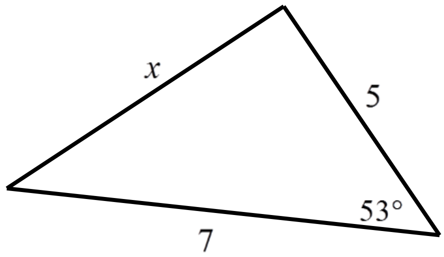


ה.

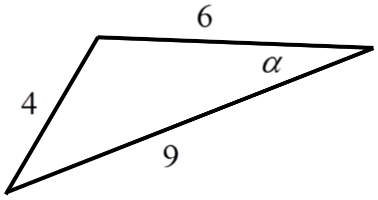


2) מצא את ערכו של x / α במשולשים הבאים:

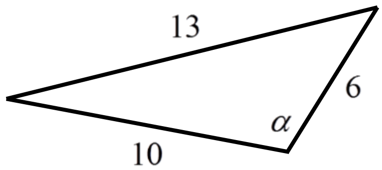
א.



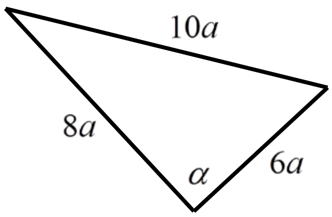
ב.



ג.



ד.



3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס״מ

וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70°.

CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.

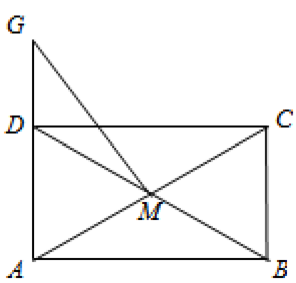
מצא את אורכו של הקטע AD.

4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.

הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.

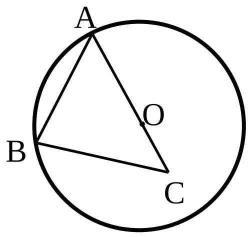
נתון: $AD = 3$ ס״מ , $AB = 4$ ס״מ , $DG = 1.2$ ס״מ.

מצא את גודלו של הקטע GM.



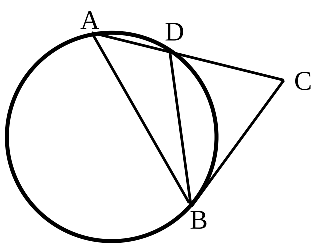
5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס״מ ו-11 ס״מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס״מ. חשב את זוויות המרובע.

6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: $BC = 9$ ס״מ, $OC = 3$ ס״מ, $\sphericalangle BAC = 38^\circ$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.



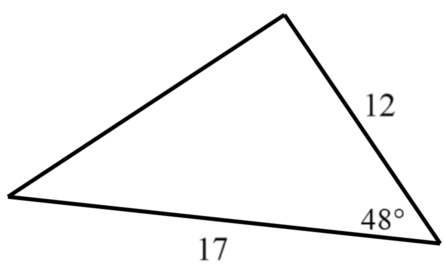
7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס״מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.

8) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C.
נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R, α ו- β את אורך הקטע BC.

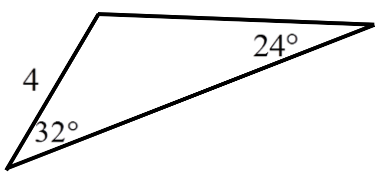


9) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



10) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

11) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90^\circ)$, BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.

נתון: $AB = m$, $\sphericalangle A = \alpha$.

הבע באמצעות α ו-m את שטח המשולש BCD.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. $y =$ 22.199 ס"מ , $x =$ 18.585 ס"מ
ג. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$ ד. $\alpha = 41.382^\circ$ או $\alpha = 138.618^\circ$
ה. $x =$ 3.606 ס"מ , $\alpha = 73.898^\circ$.

2) א. $x =$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$
ד. $\alpha = 90^\circ$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) 138.190° , 41.810° , 113.556° , 66.444°

6) AB = 14.56 ס"מ , $R =$ 9.242 ס"מ

7) $P =$ 22 ס"מ

8) $$\text{BC} = \frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$$

9) א. $S =$ 75.801 סמ"ר ב. $S =$ 8.641 סמ"ר

10) $S =$ 16 סמ"ר

11) $$S_{\Delta BCD} = \frac{m^2\tan^2\alpha\sin 45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}.$$

תרגול מבגרויות:

1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R. נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R , β , α.

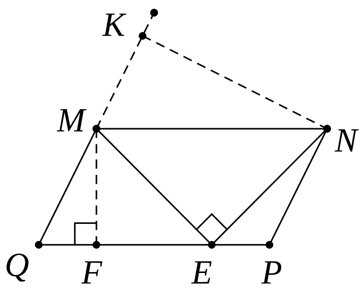
ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60°$. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.

2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90°$ (ראה ציור).

נתון: MQ = 12 ס"מ, $\sphericalangle MQP=70°$,

$\sphericalangle MNE=40°$.

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



3) במשולש ישר-זווית MNP,

$(\sphericalangle P=90°)$ PA הוא גובה ליתר

ו- NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.

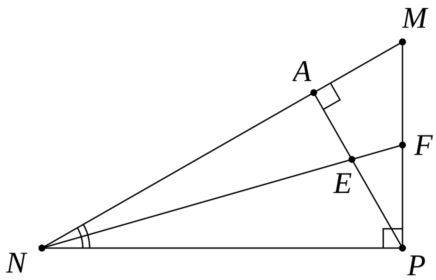
PA ו- NF נחתכים בנקודה E

(ראה ציור).

נתון: NP = 24 ס"מ, $\sphericalangle MNP=40°$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



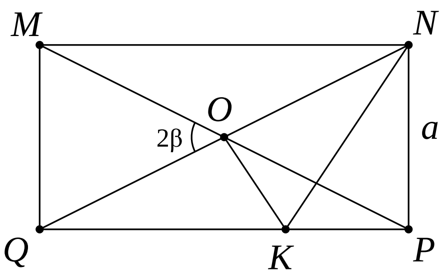
4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.

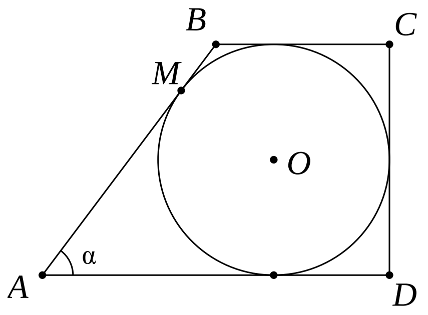
מנקודה O מעלים אנך ל- QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a.

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a.

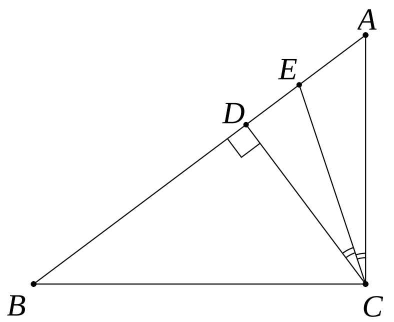




5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: AM = 12 ס״מ , $\sphericalangle BAD=\alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α.

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α.



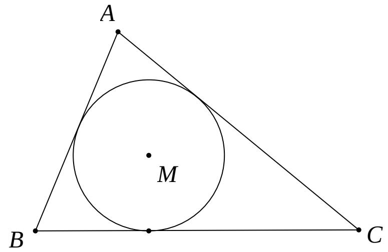
6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור)
נתון:
BC = 8 ס״מ, $\sphericalangle ACB=90^\circ$, $\sphericalangle ABC=\beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β.

7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה. מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה. חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס״מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC, ו- CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC=\alpha$ $(\alpha<45^\circ)$.

א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α.

ב. הראה כי עבור $\alpha=60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א׳ מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

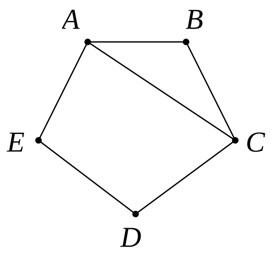


9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C=46^\circ$, $\sphericalangle B=62^\circ$.

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

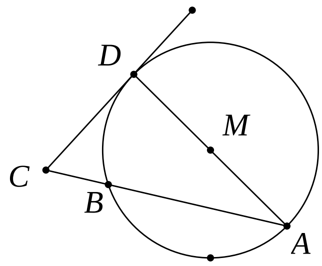
ב. נתון: BC = 16 ס״מ. מצא את r.

10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



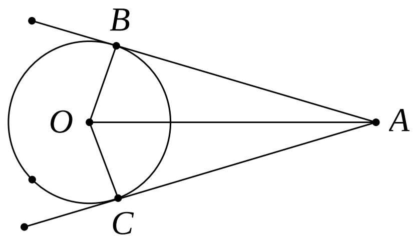
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M
ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA
למעגל (ראה ציור). נתון: $CD=\frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש CAD.
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.

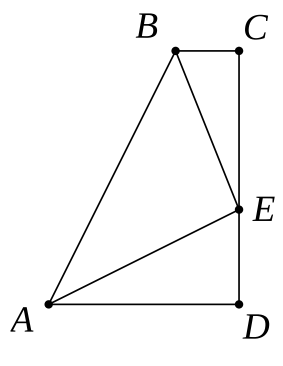


12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל
שמרכזו O, יוצאים שני משיקים
למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC=2\alpha$, 10 = AO ס"מ.

א. הבע באמצעות α את S_1,
שטח המרובע ABOC.
ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.
ג. הראה שאם $\alpha=30^\circ$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.



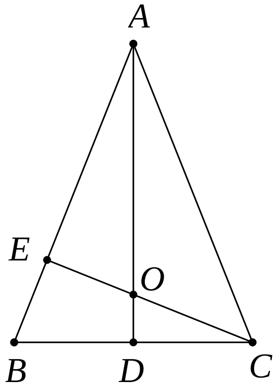
13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle C=\sphericalangle D=90^\circ)$.
נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AEB=90^\circ$, $AE=BE=k$ ו- $\sphericalangle CBE=\beta$.
הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.



14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה.
נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו- CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

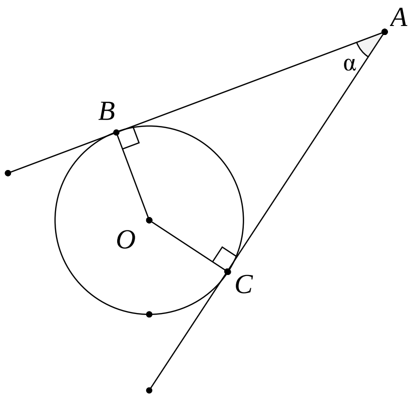


א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60°$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m
(כלומר: $AB = AC = m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC = \alpha$
(ראה ציור).



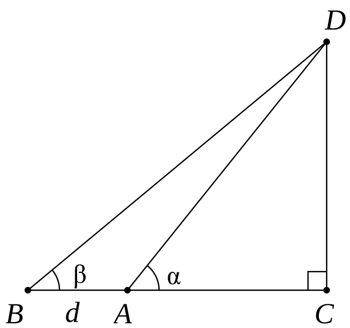
א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.

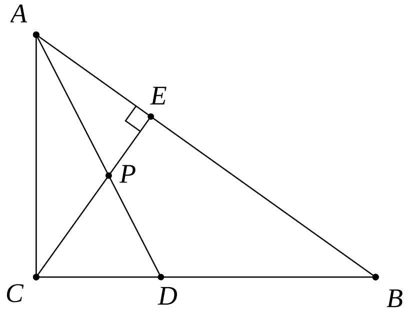
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90°$.

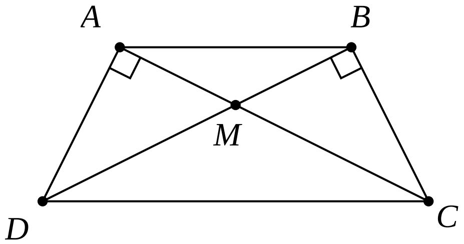
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC = \alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA = \beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC = x$.
הבע את x באמצעות d, α ו- β.



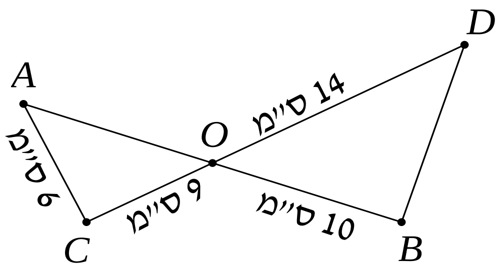
18) נתון משולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$.
CE הוא הגובה ליתר.
AD הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle CAB$.
CE ו- AD נחתכים בנקודה P (ראה ציור).
נתון: $AC = m$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α את:
א. אורך הקטע AE.
ב. אורך הקטע PD.



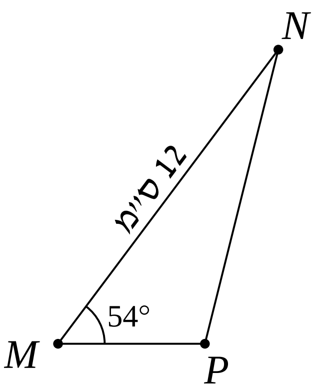
19) בטרפז שווה-שוקיים ABCD
(AD = BC) , האלכסונים נפגשים
בנקודה M (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = 90°$,
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 65°$,
11 ס"מ = DC.
חשב את שטח המשולש AMD.



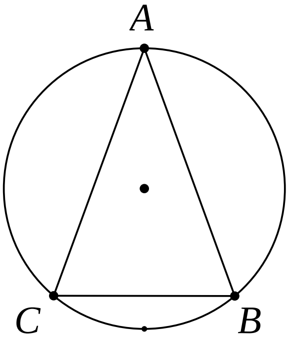
20) הקטעים AB ו- CD נחתכים
בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC = 60°$,
9 ס"מ = CO , 6 ס"מ = AC ,
14 ס"מ = OD , 10 ס"מ = OB.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



21) במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ
מהצלע MP.
א. חשב את אורך הצלע NP.
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

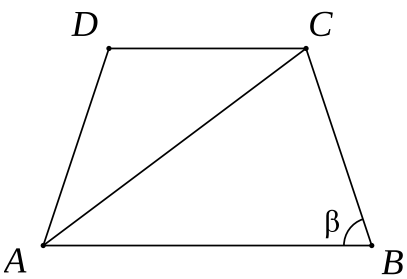


22) המשולש השווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45°$.

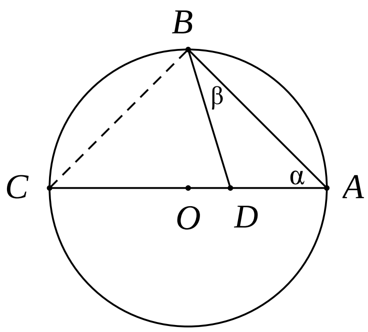


23) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.

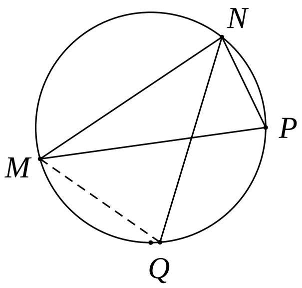
24) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AD = BC)$ אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא β $(\beta > 60°)$, ראה ציור.
הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



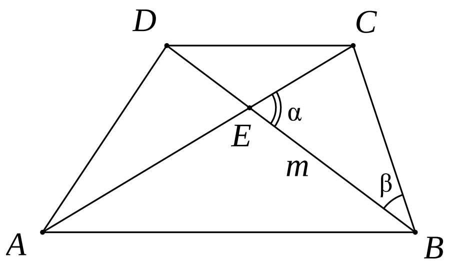
25) הקדקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקדקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.
א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.
ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



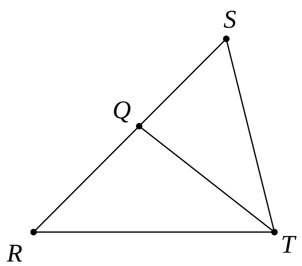
26) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
$NP = 12$ ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.



27) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של
אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m , α ו- β.



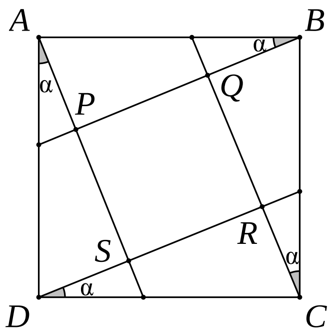
28) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית
$\sphericalangle RTS$ (ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,
$\sphericalangle RST = \alpha$, $\sphericalangle TRQ = 45°$.
א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m.
ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
חשב את זוויות המשולש RST.



29) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

30) נתון משולש שצלעותיו kt , $2t$, t.
א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?
ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.

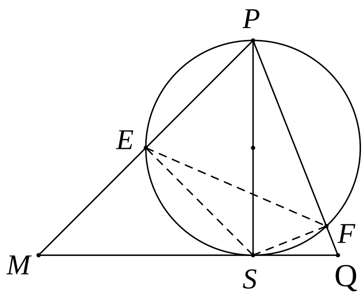
31) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.



א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?

32) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$, $\sphericalangle MPS = \alpha$, $PS = h$.



א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות h , α ו- β.

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ESF$.

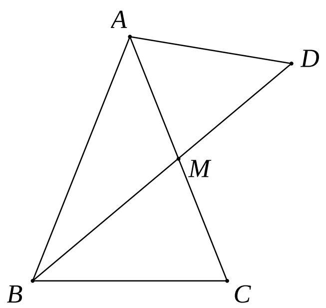
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ESP לשטח המשולש PMQ.

33) במשולש ABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α.

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.

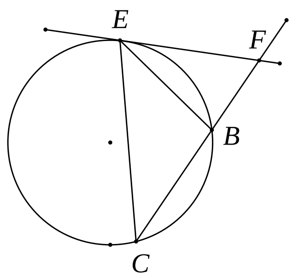
34) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50°$.



א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D, כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

35) משולש שווה שוקיים BCE (BC = BE)
חסום במעגל שרדיוסו R.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא α.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את
המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

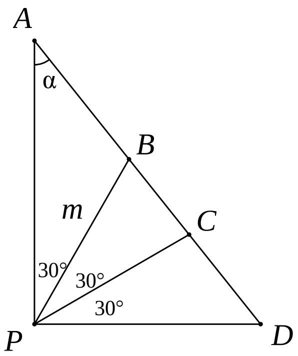


א. בטא את שטח המשולש BEF
באמצעות R ו- α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

36) בטרפז BCDE $(BC \parallel ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

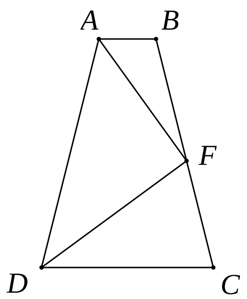
37) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית
הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות.
כלומר: $(\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°)$
(ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.



א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את AB ,
AC , BD ו- CD באמצעות m ו- α.

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.

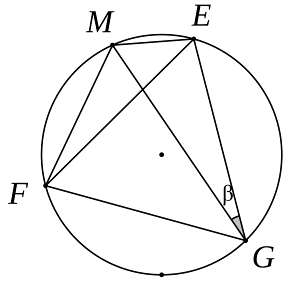
38) בטרפז שווה שוקיים ABCD
$(AD = BC\ ,\ AB \parallel DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש- DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו- AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$
(ראה ציור).
נתון: $AB = \beta$, $\sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



39) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R . M היא נקודה על המעגל.
נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.

ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?

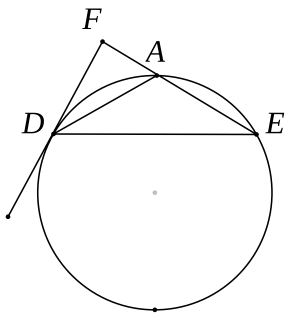


40) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE).
חסום במעגל שרדיוסו R . ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $\left(60° < \alpha < 180°\right)$.

א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α .

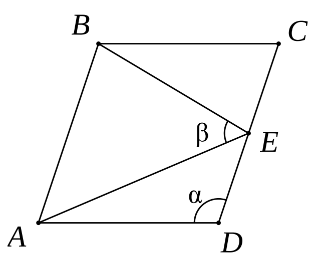
ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.

ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



41) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha$, $\sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25-16\cos^2\alpha}}$.

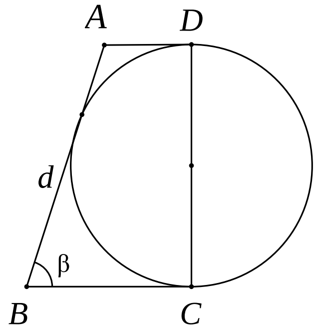


42) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל.
השוק DC הוא קוטר המעגל. השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta$, $AB = d$.

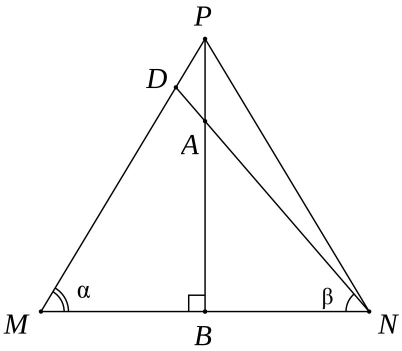
א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

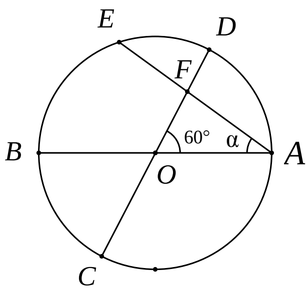
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר. חשב את הזווית החדה β .



43) במשולש שווה שוקיים PMN ‏(PM = PN),
A היא נקודה על הגובה PB,
כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D
(ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$, $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.
א. חשב את היחס $\tan\beta : \tan\alpha$.
ב. חשב את היחס PM:DM .



44) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים
AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.
מיתר AE , היוצר זווית α עם הקוטר AB,
חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).
א. הבע את שטח המשולש ACF
באמצעות R ו- α .
ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF
הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.



תשובות סופיות:

1) א. $4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) $\text{MF} =$ 11.28 ס"מ , $\text{KN} =$ 21.52 ס"מ

3) א. $\text{NA} =$ 18.385 ס"מ ב. $\text{EF} =$ 5.975 ס"מ

4) א. $\text{OK} = \frac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\frac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\frac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $\text{AE} = 8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right] = 8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha - 1$

ב. מתקיים: $\text{AO} = 2\cdot\text{DO}$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $\text{BC} = r\cdot(\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02\cdot r$ ב. $r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98$

10) $S =$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\measuredangle A = 16.7^\circ$, $\measuredangle D = 90^\circ$, $\measuredangle C = 73.3^\circ$ ב. $S \approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1 = 100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2 = 50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ - 2\alpha) = 50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S = \frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה) ב. 27 יח"ש.

14) א. $r \approx$ 5.548 ס"מ ב. $S \approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $\text{CO} = \frac{a}{\sin\beta}$, $\text{CE} = 2a\cdot\sin\beta$ ב. $\frac{\text{CO}}{\text{CE}} = \frac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$ ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $(\tan^2 45°=1)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) א. $AE=m\cdot\cos\alpha$ ב. $PD=\frac{m(1-\cos\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2m\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2m\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\alpha}{2}$

19) $S\approx$ 9.07 סמ"ר

20) $\sphericalangle ODB\approx 44.7°$

21) א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

22) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

23) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

24) יחס השטחים הוא: $1-4\cos^2\beta=\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)$ או כל תשובה שקולה.

25) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

26) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

27) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

28) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. $15°$, $120°$, $45°$ או $75°$, $60°$, $45°$

29) $\alpha\approx 20.7$

30) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

31) $\alpha=15°$

32) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180°-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

33) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

34) א. $\sphericalangle BMC=79.5^\circ$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

35) א. $S_{\Delta BEF}=\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin2\alpha}{\sin3\alpha}$ ב. $\alpha=45^\circ$

36) $P_{BCDE}=51.09$

37) א. $AC=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha}$, $AB=\frac{m}{2\cdot\sin\alpha}$, $BD=\frac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$,

$CD=\frac{m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha}$

38) $DC=\frac{-b\cdot\tan\beta}{\tan3\beta}$

39) ב. MG הוא קוטר במעגל.

40) א. $S_{\Delta ADF}=\frac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$ ג. $\alpha=90^\circ$

42) א. $AD+BC=d$ ב. $P=2d+d\sin\beta$, $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$ ג. $\beta=30^\circ$

43) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

44) א. $S=\frac{3R^2\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{4\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}$