תוכן העניינים:

פרק 9

גיאומטריה אוקלידית – משולשים

משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

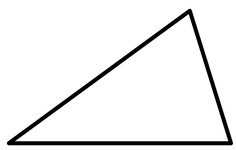
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

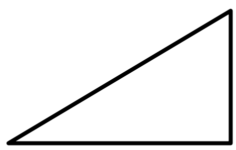
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

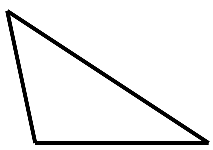
1. משולש חד זווית:



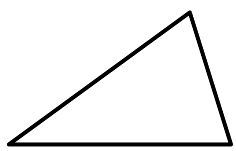
2. משולש ישר זווית:



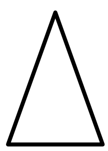
3. משולש קהה זווית:



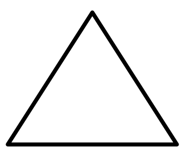
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



6. משולש שווה צלעות:

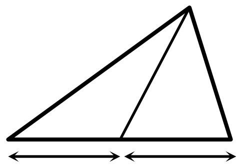


קטעים מיוחדים במשולשים:

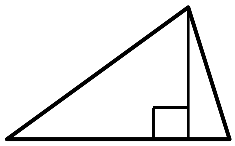
1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

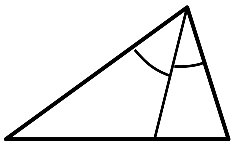
1.



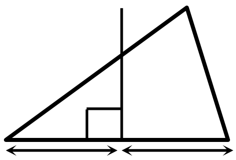
2.



3.



4.



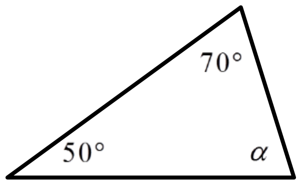
משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
  במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
  במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

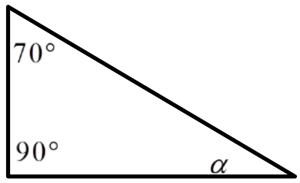
שאלות – זוויות במשולשים:

1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:

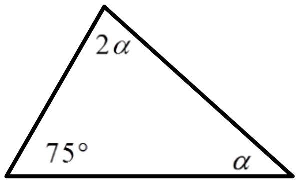
א.



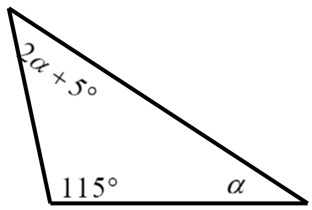
ב.



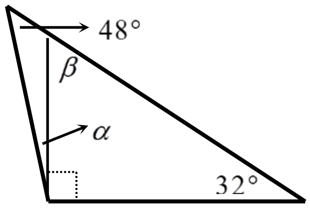
ג.



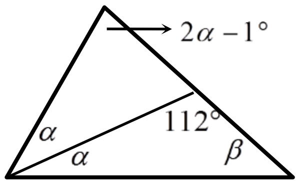
ד.



ה.



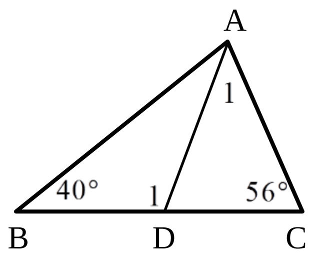
ו.



2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.

נתון: $\sphericalangle B = 40^\circ , \sphericalangle C = 56^\circ$.

חשב את הזוויות $\sphericalangle A_1 , \sphericalangle D_1$.

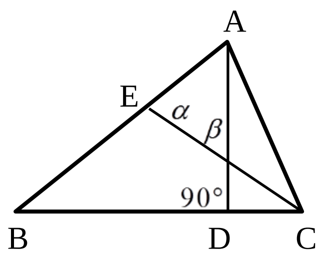


3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.

$\sphericalangle D = 90^\circ$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.

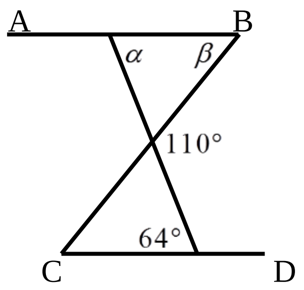
כמו כן: $\alpha = 75^\circ , \beta = 63^\circ$.

חשב את זוויות המשולש ABC .



4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.

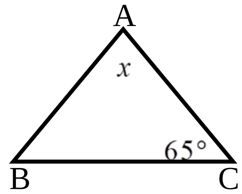
מצא את הזוויות α ו-β .



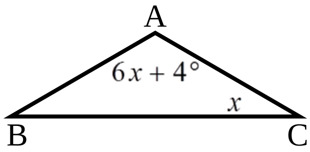
5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו : $1:2:6$.
חשב את זוויות המשולש.

6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB=AC)$
שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

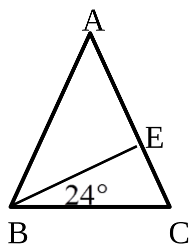
א.



ב.

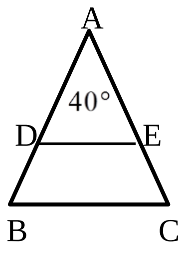


7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC , $(AB=AC)$
יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס BC.
מצא את זוויות המשולש ABC.

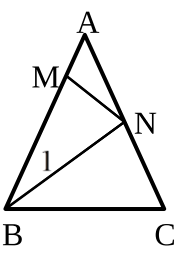


8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים :
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.
ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-$12°$ מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

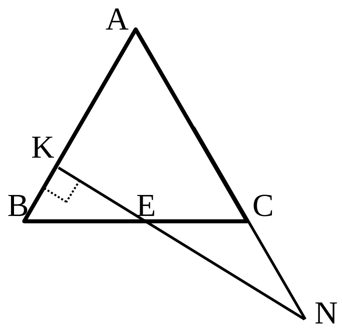
9) באיור שלפניך נתון : $AB=AC$,
$AD=AE$, $\sphericalangle A=40°$.
א. חשב את הזוויות : $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$.
ב. הוכח : $DE \parallel BC$.



10) באיור שלפניך נתון : $AB=AC$. מעבירים את הקטעים BN
ו- MN כך שמתקיים : $BM=BN=BC$.
נתון בנוסף : $\sphericalangle A=32°$.
חשב את זוויות : $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle B_1$.



11) משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.
בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל-AB
$(\sphericalangle K=90°)$. אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת
המשך AC בנקודה N. מתקיים: $CE=CN$.
חשב את זוויות המשולש ABC.



משפטים במשולש שווה שוקיים:

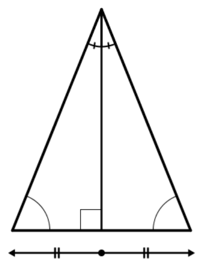
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

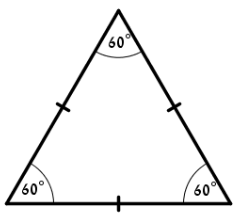
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.
(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

משפט במשולש שווה שוקיים

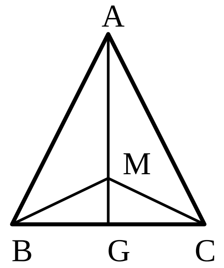


משפט במשולש שווה צלעות

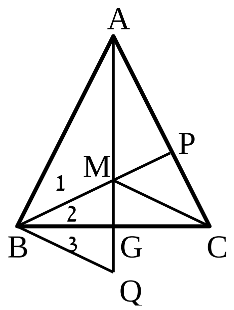


שאלות – משולש שווה שוקיים:

12) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG חוצה את זווית $\measuredangle A$. M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: $BM = CM$.



13) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG ו- BP חוצים את הזוויות $\measuredangle A$ ו-$\measuredangle ABC$ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG .
נתון: $GM = GQ$. הוכח: $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_3$



חפיפת משולשים:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\begin{cases} AB = DE \text{ , } AC = DF \text{ , } BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \text{ , } \sphericalangle B = \sphericalangle E \text{ , } \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$.

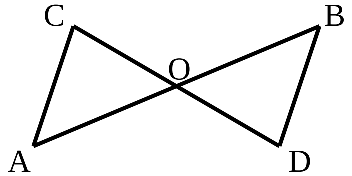
משפטי החפיפה:

- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

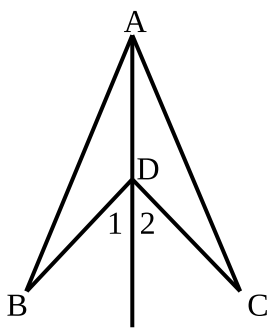
שאלות – חפיפת משולשים:

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:

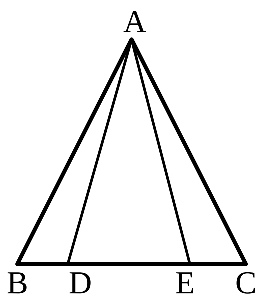
14) באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.



15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

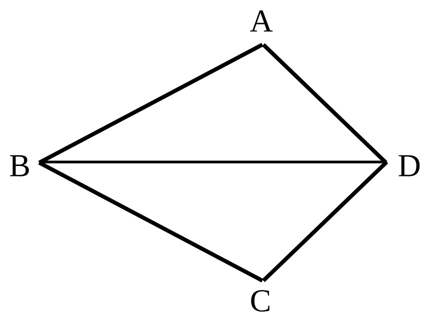


16) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $BE = CD$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

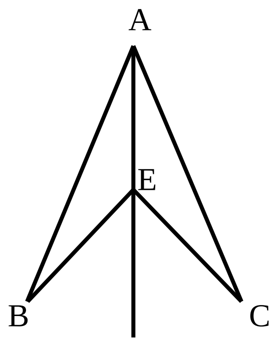


שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:

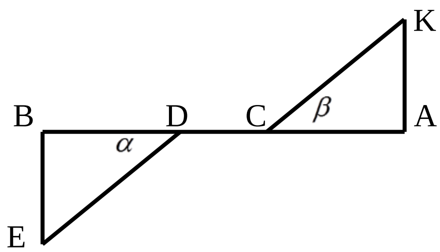
17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



18) בסרטוט שלפניך נתון:
AE חוצה את הזוויות $\measuredangle BAC$ ו-$\measuredangle BEC$.
הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

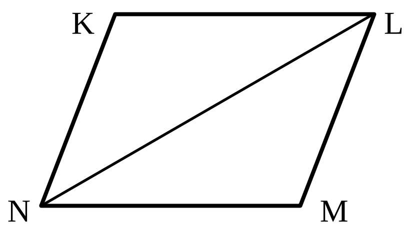


19) בציור שלפניך נתון:
$AC = BD \ , \ \alpha = \beta$
$AB \perp BE \ , AB \perp AK$.
הוכח: $\Delta AKD \cong \Delta BEC$.



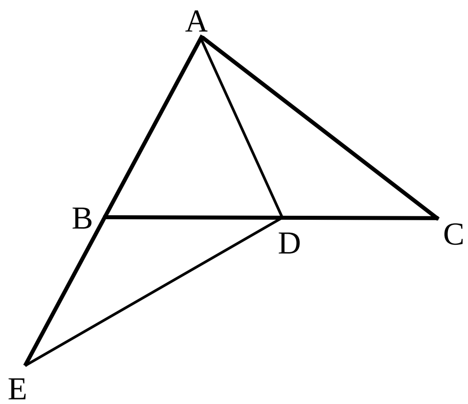
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

20) באיור שלפניך נתון:
$KL = MN \ , \ KN = LM$.
הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.



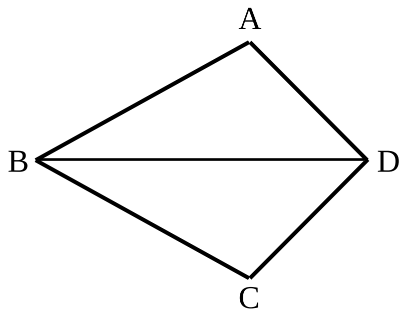
שאלות העוסקות במשפט חפיפה: צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

21) בציור שלפניך נתון:
$AC = DE \ , \ AB = BE = AD$
הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

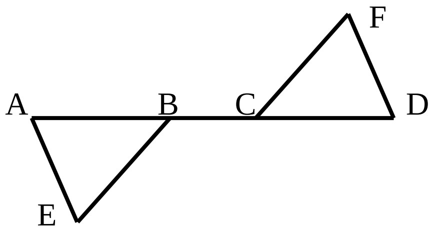


שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

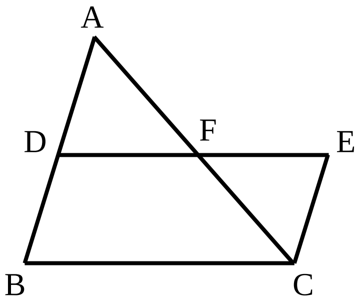
22) במרובע ABCD נתון:
$AB = BC \; , \; AD = CD$.
הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.



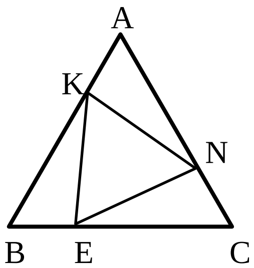
23) הקטע AD הוא קו ישר.
נתון: $AE = DF \; , \; AC = BD$.
כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



24) באיור שלפניך נתון:
הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
הקטעים BD ו- CE שווים.
הוכח את הטענות הבאות:
א. F היא אמצע הקטע DE.
ב. D היא אמצע הקטע AB.



25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי ΔKEN הוא גם משולש שווה צלעות.



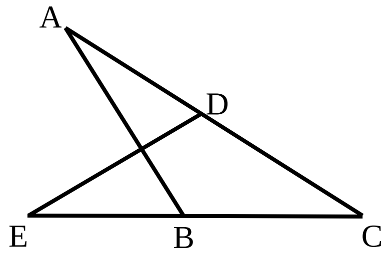
שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE$, $DC = BC$.

הוכח:

א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.

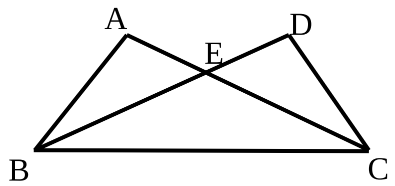
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.



27) באיור שלפניך נתון:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.

הוכח: $AB = CD$.

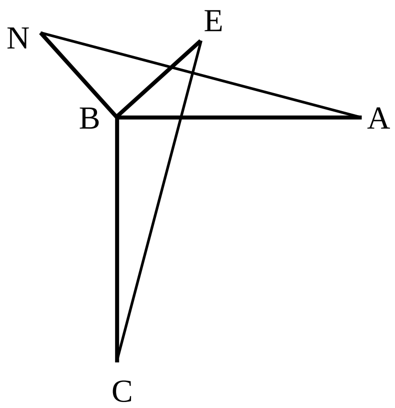


28) בציור שלפניך נתון:

$AB = BC$, $BE = BN$

$AB \perp BC$, $BE \perp BN$

הוכח: $AN = CE$.



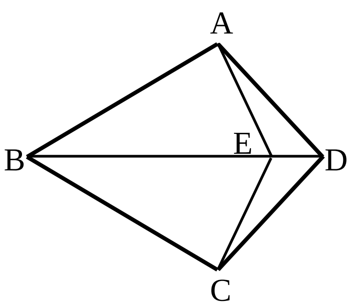
שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

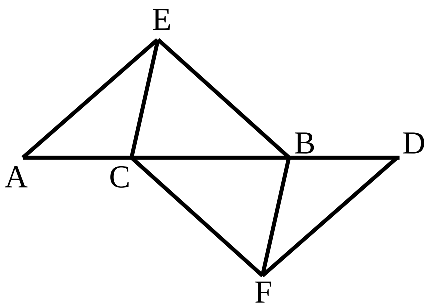
מתקיים: $AB = BC$, $AD = CD$.

הנקודה E נמצאת על BD.

הוכח כי: $AE = CE$.

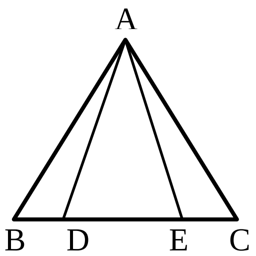


30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר.
מתקיים: $\angle A = \angle D$, $\angle AEC = \angle DFB$
וכן $AE = DF$. הוכח:
א. $CE = BF$.
ב. $BE = CF$.

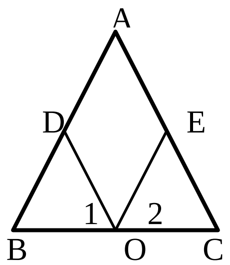


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

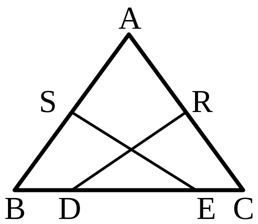
31) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
מתקיים: $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



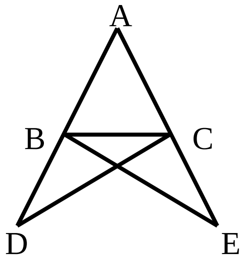
32) בסרטוט שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$. הנקודה O היא אמצע BC.
מתקיים: $\angle O_1 = \angle O_2$.
הוכח: $AD = AE$.



33) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.
ידוע כי $BD = CE$.
הוכח כי: $SE = RD$.



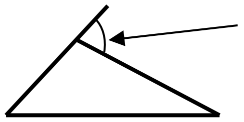
34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים
ונתון בנוסף כי: $BD = CE$, $DC = BE$.
הוכח: $AB = AC$.



זווית חיצונית במשולש:

זווית חיצונית למשולש:

הגדרה:



זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

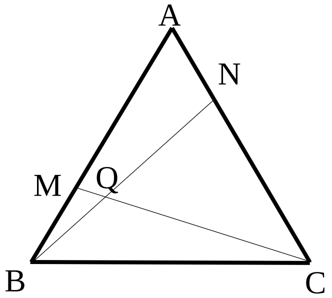
משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות – זווית חיצונית במשולש:

35) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

36) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.
נתון: $AN = BM$.
הוכח: $\sphericalangle NQC = 60^\circ$.



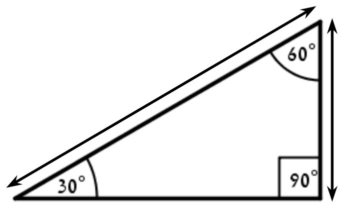
משולש ישר זווית:

משפטים במשולש ישר זווית:

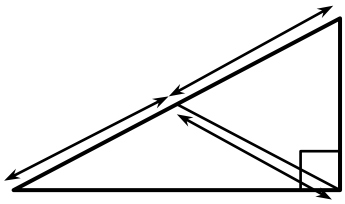
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$, $60°$, $30°$, הניצב שמול הזווית של ה-$30°$ שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

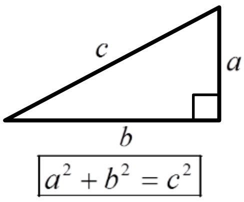
משולש $90°, 60°, 30°$



תיכון ליתר

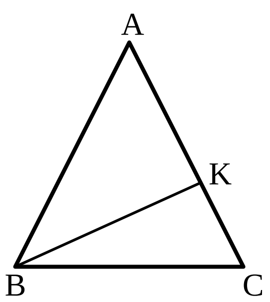


משפט פיתגורס

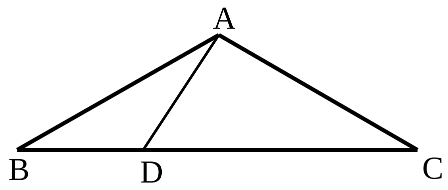


שאלות – משולש ישר זווית:

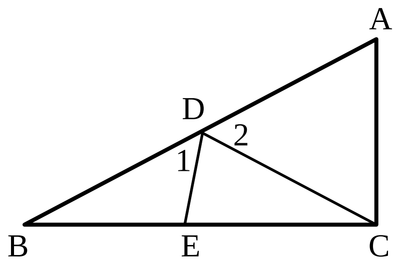
37) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$. זווית הבסיס: $\sphericalangle C = 75°$
וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.
מצא את אורך הגובה BK.



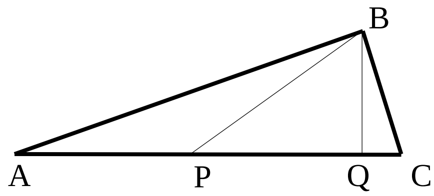
38) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.
נתון: $\sphericalangle DAC = 90°$, $\sphericalangle ABD = 30°$,
18 ס"מ = BC.
חשב את אורכו של הקטע BD.



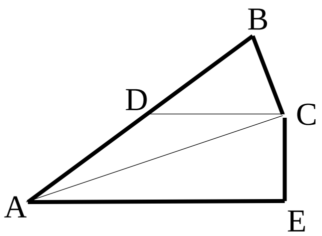
39) המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
ידוע כי: $\sphericalangle CED = 80°$.
מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_2$, $\sphericalangle D_1$



40) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.
נתון: $BQ = \frac{1}{2}BP$.
חשב את גודלה של הזווית C.



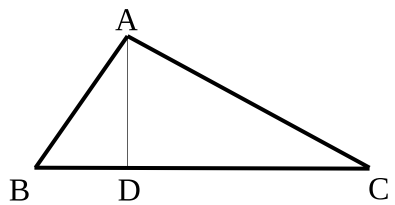
41) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD = DC)$. AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$.
נתון: $DC \parallel AE$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.



42) AD הוא גובה במשולש ABC.
נתון: 15 ס"מ = AB, 20 ס"מ = AC,
25 ס"מ = BC .

א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC .

ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.



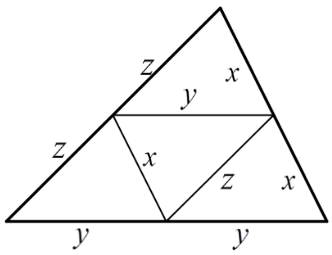
קטעים מיוחדים במשולש:

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

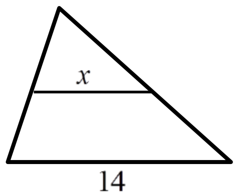
איור – קטע אמצעים במשולש:



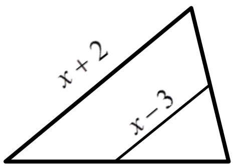
שאלות – קטע אמצעים במשולש:

43) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את x בכל אחד מהמקרים:

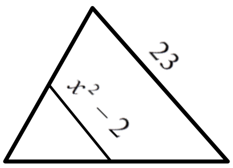
א.



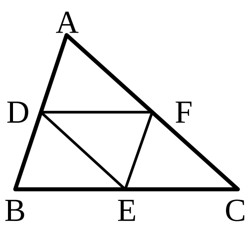
ב.



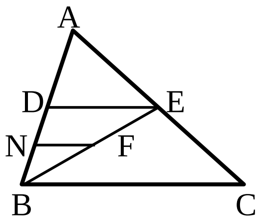
ג.



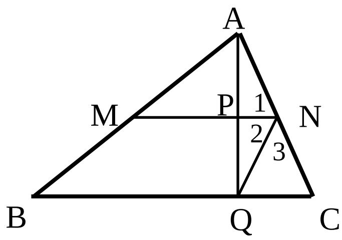
44) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: DE= 9 ס"מ, EF= 12 ס"מ, DF = 10 ס"מ.
חשב את היקף המשולש ΔABC.



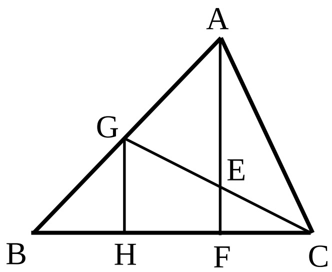
45) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE .
נתון : 3 ס״מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.



46) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



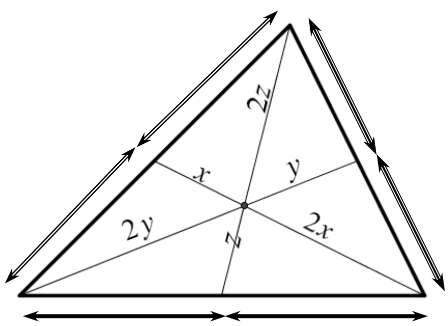
47) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון לצלע AB במשולש ΔABC . הקטע GH מאונך לצלע BC.
א. הוכח: HF =BH.
ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס״מ.
חשב את אורך הקטע EF.



מפגש התיכונים במשולש:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2 :1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2 :1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

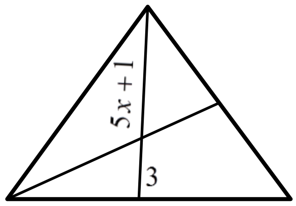
איור – מפגש תיכונים במשולש :



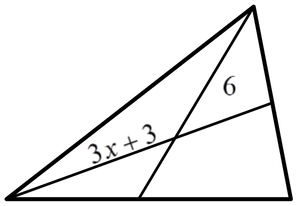
שאלות – מפגש תיכונים במשולש:

48) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

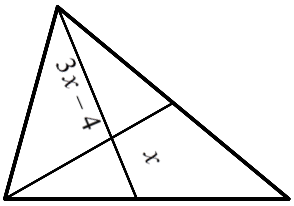
א.



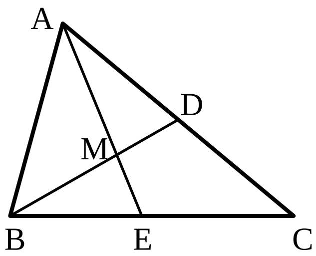
ב.



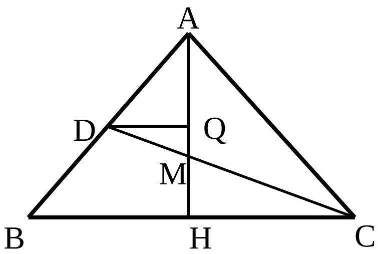
ג.



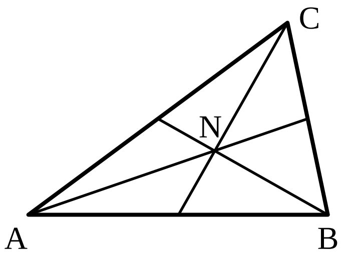
49) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: 30 = AC ס"מ.
חשב את AE.



50) המשולש ΔABC שבציור הוא משו"ש $(AB = AC)$ שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.
CD, התיכון לשוק AB, יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC. נתון: $12\sqrt{3}$ = BC ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשב את אורך הקטע MQ.



51) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.
נתון: $\measuredangle CNB = 90°$.
הוכח: $BC = AN$.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$
ה. $\alpha = 10°$, $\beta = 58°$ ו. $\beta = 30\frac{1}{3}°$, $\alpha = 75\frac{1}{3}°$.

2) $\sphericalangle A_1 = 42°$, $\sphericalangle D_1 = 98°$

3) $\sphericalangle A = 78°$, $\sphericalangle B = 48°$, $\sphericalangle C = 54°$.

4) $\alpha = 64°$, $\beta = 46°$.

5) $20°$, $40°$, $120°$.

6) א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$. ב. שאלת הוכחה

7) $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

8) א. $20°$, $80°$, $80°$ ב. $52°$, $64°$, $64°$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

10) א. $\sphericalangle B_1 = 42°$, $\sphericalangle ANM = 37°$. ב. שאלת הוכחה

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

12) שאלת הוכחה
13) שאלת הוכחה
14) שאלת הוכחה
15) שאלת הוכחה
16) שאלת הוכחה
17) שאלת הוכחה
18) שאלת הוכחה
19) שאלת הוכחה
20) שאלת הוכחה
21) שאלת הוכחה
22) שאלת הוכחה
23) שאלת הוכחה
24) שאלת הוכחה
25) שאלת הוכחה
26) שאלת הוכחה
27) שאלת הוכחה
28) שאלת הוכחה
29) שאלת הוכחה
30) שאלת הוכחה
31) שאלת הוכחה
32) שאלת הוכחה
33) שאלת הוכחה
34) שאלת הוכחה
35) שאלת הוכחה
36) שאלת הוכחה
37) 8 ס"מ
38) 6 ס"מ
39) $\sphericalangle D_1 = 60°$, $\sphericalangle D_2 = 40°$
40) $75°$
41) $90°$
42) א. AD = 12 ס"מ, $S_{ABC} =$ 150 סמ"ר. ב. כן.

43) א. $x=7$ ב. $x=8$ ג. $x=\sqrt{13.5}$.

44) 62 ס"מ.

45) 12 ס"מ.

46) שאלת הוכחה

47) א. שאלת הוכחה ב. 3 ס"מ.

48) א. $x=1$ ב. $x=3$ ג. $x=4$

49) 22.5 ס"מ.

50) 3 ס"מ.

51) שאלת הוכחה