

תוכן העניינים:

2	פרק 18
2	נגזרות ומשיקים
2	סיכום כללי:
2	פונקציות נפוצות:
2	הנגזרת:
3	כללי הגזירה:
3	שיפוע של פונקציה:
4	שאלות:
8	תשובות סופיות

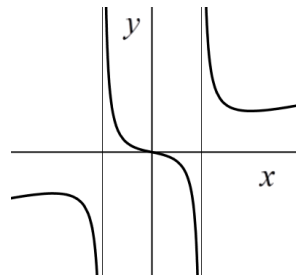
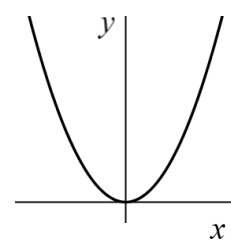
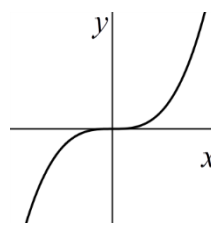
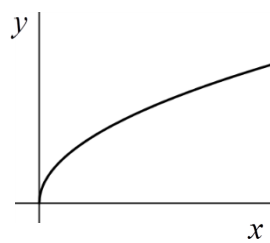
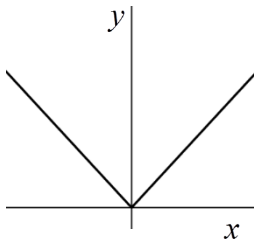
פרק 18

חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$	ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$	ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$
ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$	ה. $f(x) = \frac{(2x+1)^4}{3}$	

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = -\frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$

ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$ ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$ ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = ax^4 - bx$ ב. $f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$ ג. $f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$

11) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

12) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x = -2$.

- (13) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.
- (14) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.
- (15) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.
- (16) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.
- (17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.
- (18) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.
- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.
- ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
- (19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- (20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.
- (21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.
- (22) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .
- (23) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ (פרמטר a) בנקודה בה $x=3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(24) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ (פרמטר a) בנקודה בה $y = 2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(25) נתונה הפונקציה $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a .

(26) נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A .

(27) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ (a, b פרמטרים) בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b ואת משוואת המשיק.

(28) ענה על הסעיפים הבאים:
א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$
בנקודה בה $x = t$.
ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

(29) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

תשובות סופיות

(1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$

ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

(2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

(3) א. 0 ב. 0

(4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$

(5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(2x+1)^3}{3}$

(6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$

ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$

(7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$

(8) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$

(9) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

(10) א. $4ax^3 - b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$

$$. m = 17 \quad \text{(11)}$$

$$. m = 4 \quad \text{(12)}$$

$$. m = 2 \quad \text{(13)}$$

$$. y = 24x + 22 \quad \text{(14)}$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad \text{(16)}$$

$$. y = 22x - 56 \quad \text{(17)}$$

$$. y = 3x - 1 \quad \text{ג.}$$

$$y = 3x - 1 \quad \text{נ.} \quad \text{(18)}$$

$$. y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad \text{(19)}$$

$$. y = 2x - 3 \quad \text{(20)}$$

$$. y = -2x + 8 \quad \text{(21)}$$

$$. y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad \text{(22)}$$

$$. a = 2, y = 8x - 18 \quad \text{(23)}$$

$$. a = 2, y = -4x - 2 \quad \text{(24)}$$

$$. a = 4 \quad \text{(25)}$$

$$. a = 1 \quad \text{(26)}$$

$$. b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad \text{(27)}$$

$$. t = 0, t = -2 \quad \text{ג.}$$

$$y = 2tx - t^2 + 1 \quad \text{נ.} \quad \text{(28)}$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \quad \text{(29)}$$