

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר [www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).

**GOOL**  
**בשביל התירגול**

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול זה בול. בשבילך!**

## תרגילי מבוא בקומבינטוריקה בסיסית סעיפים יותר קשים מסומנים ב-\*

- a. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון? רשום את כל התוצאות.
- b. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשום את כל התוצאות.
- c. מהאותיות ב,ג,ד,ה יוצרים מילה בת שתי אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. רשום את כל המילים האפשריות ואשר עם עיקרן הכפל.
- d. מהאותיות א,ב,ג,ד,ה יוצרים מילה בת שלוש אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א' וגם א' מופיעה פעם אחת בדיוק? (רמז סעיף קודם)
- e. בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א' 1 יש 20 בנים וכיתה א' 2 יש 15 בנות?
- f. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. הארוחה מורכבת ממנה ראשונה, מנה עיקרית, ושתייה. מנה ראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. מנה עיקרית יכולה להיות סטייק אנטריקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.
- א. כמה ארוחות אפשריות יש?
- ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?
- ג. כמה ארוחות אפשריות יש למסעדה להציע לסועד טבעוני?
- g. כמה תת קבוצות יש לקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ?
- א. בנות שלושה איברים? רשם את כולן.
- ב. בנות ארבעה איברים? השווה לסעיף א'
- h. בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק תוך הקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ . כמה אפשרויות יש?
- i. בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש-
- א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס)
- ב. כל ספרותיו שונות.
- ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה? (למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
- ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד כלומר ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
- ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה כלומר ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.
- j. כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש כך ש-
- א. באורך 7?
- ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
- ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?
- k. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענה גם לגבי שולחן עגול) כך ש-
- א. ללא הגבלה.
- ב. כל אשה תשב לצד בעלה.
- ג. גבר ישב רק ליד אשה.
- ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו.

1. כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1,2,3,4,5,6,7 כך ש-

- א. ללא הגבלה.
- ב. המספר מתחיל בספרה 2.
- ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
- ד. כל הספרות שונות.
- ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
- ו. \* בדיוק 1 מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
- ז. \*\* ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
- ח. חזור על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
- ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
- י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
- יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
- יב. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
- יג. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

m. בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות 0,1,2,3,...,9 כך ש-

- א. ללא הגבלה?
- ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?
- ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
- ד. אין בקוד ספרות זהות?
- ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
- ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
- ז. אין בקוד את הספרה 5?
- ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
- ט. \* יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?
- י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
- יא. \*\* אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5? (רשום שני מספרים המקיימים את התנאי ושני שאינם מקיימים את התנאי וכתוב מהו המשלים של סעיף זה? נסח זאת על דרך החיוב כלומר בלי להשתמש במילים "אין" ו-"לא")

n. נתונה הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$  כמה תת קבוצות יש ל-A כך ש-

- א. ללא הגבלה? (צפה בשיעור על חישוב מספר האיברים בקבוצת חזקה).
- ב. בנות 3 איברים?
- ג. בעלות 3 איברים לפחות?
- ד. מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים? מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
- ה. \* מכילות אי זוגי אחד לפחות? מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
- ו. \*\* אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2? (זה סעיף קשה אם הינך מתקשה נסה בעזרת משלים).
- ז. מכילות ממש את  $\{1, 2, 3\}$

o. בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים כך ש-:

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?

ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?

ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?

ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?

ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

p. נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים. (נניח שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול)

בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:

א. סדר הכדורים בשורה משנה?

ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה? (כלומר ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשב אותו דבר לא

משנה היכן הלבן ממוקם.)

### ספירת כפילויות

מצא את הטעות בכל אחת מהשאלות הבאות.

q. שני גברים ושתי נשים רוצים להתחלק לזוגות מעורבים.

יוסי טוען שהתשובה היא 4 כהסבר הוא מציע שתחילה יש לבחור גבר לכך יש 2 אפשרויות. בשלב שני יש

לבחור לו אשה ולכך גם יש שתי אפשרויות ובשלב שלישי הזוג הנותר נבחר באופן יחיד. ולסיכום לפי

עיקרון הכפל יש  $2 \cdot 2 = 4$  אפשרויות. היכן יוסי טועה?

r. 4 אנשים רוצים להתחלק לזוגות ללא הגבלה.

יוסי טוען שהתשובה היא 12 כהסבר הוא מציע שתחילה יש לבחור אדם לכך יש 4 אפשרויות. בשלב שני

יש לבחור לו בן זוג ולכך יש שלוש אפשרויות ובשלב שלישי הזוג הנותר נבחר באופן יחיד. ולסיכום לפי

עיקרון הכפל יש  $4 \cdot 3 = 12$  אפשרויות. היכן יוסי טועה?

s. רוצים לבדוק בכמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1,2,3,4,5,6,7,8

כך שהספרה 1 מופיעה ו-2 לא מופיעה. יוסי טוען שהתשובה היא  $5 \cdot 7^4 = 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

ה-5 השמאלי הוא לכבוד בחירת מקום ל-1 ואחרי שבחרנו יש 7 אפשרויות לכל אחת מיתר הספרות

1,3,4,5,6,7,8 (שהרי הספרה 2 לא מופיעה) ולכן יש לכפול את התשובה ב-  $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$  ובס"ה

$5 \cdot 7^4 = 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$  היכן יוסי טועה?

## נתחיל להעלות את רמת הקושי.

(1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש-

- ללא הגבלה.
- אבי ובני סמוכים.
- אבי, בני וגדי סמוכים.
- אבי ובני לא סמוכים.
- אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
- אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

(2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

(3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח  $8 \times 8$  בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש-

- כל הצריחים הם לבנים.
- שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
- הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

(4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה

- 0 פעם אחת בדיוק.
- 0 פעם אחת לפחות.
- 7 פעם אחת לפחות.
- 7 פעם אחת בדיוק. יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

(5) א. יהי  $n$  טבעי בכמה תת קבוצות של  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  יש אי זוגי אחד לפחות?

ב. בכמה תת קבוצות של  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  יש לפחות  $n+1$  איברים.

(6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינלי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד

מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתמידים שונים?

(7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש-

- יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
- בכל תא מספר זוגי של כדורים.
- בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

(8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש-

- המעלית תעצור בקומה החמישית? ( יתכן ותמשיך הלאה משם )
- המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
- המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
- המעלית תעצור בקומה החמישית. ( ולא תמשיך משם הלאה )

9) בכמה דרכים ניתן לחלק  $n$  כדורים לבנים זהים ו- $n$  כדורים צבעוניים ( שונים ) ל- $2n$  כך שבכל תא יהיה

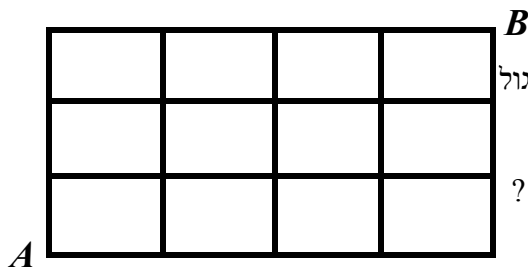
- לכל היותר כדור אחד.
- לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
- לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
- מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן  $k$  שורות ו- $m$  עמודות יש לסמן  $\times$  או  $\circ$  בכל משבצת.

א. הראו כי יש  $(2^m - 1)^k$  דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע  $\times$  אחד לפחות.

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע  $\circ$  אחד לפחות בכל עמודה.

ג. הסיקו כי  $2^{mk} \leq (2^m - 1)^k + (2^k - 1)^m$

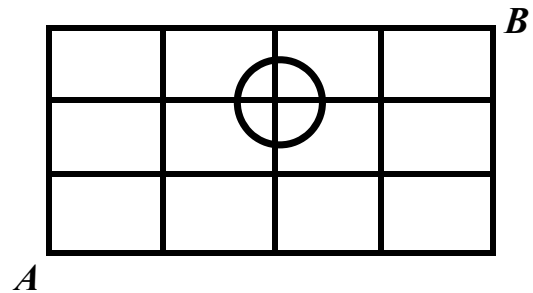


11) חרגול נמצא בנקודה  $A$  בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה  $A$  לנקודה  $B$ ?

ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך

נקודה המסומנת להלן?



12) א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?

ב. כמו א. אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א.  $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 20$

ב.  $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג.  $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת  $n$  אנשים מתוך  $n$  זוגות נשואים כך ש-

א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות  $f : \{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$  מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל  $2n$  לקבוצה בגודל  $n$  ולזוגות. (ניתן להניח כי  $n$  זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-50 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר  $n$  גברים ו- $n$  נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א-1 ו-א-2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א-1 ושלושה מ-א-2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א-1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א-2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של  $n$  כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 1$ ) מקיימות את התנאי  $f(k) \neq f(k+1)$  לכל  $1 \leq k \leq n-1$ ?

24) כמה פונקציות  $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  חח"ע ועל יש המקיימות  $f(k) - k$  זוגי לכל  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

25) כמה סדרות בינריות באורך  $n$  יש המורכבות מ- $k$  אחדים ו- $n-k$  אפסים שאין בהם שני אחדים רצופים?

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

27) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בנות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

28) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k \geq 0$  כדורים לבנים זהים ו- $m \geq 0$  כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?