סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

GOOL
בשביל התירגול

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תרגילים בנושא קבוצות

תרגילי מבוא (מסומנים באותיות אנגליות קטנות.)

a. לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$ תיתכן יותר מתשובה אחת.

במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$ ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$ ג. $\{8,\varnothing\}\square\{1,2,8\}$ ד. $\varnothing\square\{1,2\}$ ה $\varnothing\square\{\varnothing,1,2\}$

ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$ ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$ ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$

י. $\{\{2\},\varnothing\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ יא. $\varnothing\square\{1,\{\varnothing\}\}$ יב. $\{\varnothing\}\square\{1,\{\varnothing\}\}$ יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$

יד. $1\square\mathbb{N}$ טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$ טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$ יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$

b. עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות.

א. $(A\cup C)\setminus B$ ב. $(A\cap B)\cup C$ ג. $A\cap(B\cup C)$ ד. $P(A)$ ד. $C\setminus A$ ה. $P(C\setminus A)$

c. עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות.

א. האם $B\subseteq C$ ב. האם $\{1\}\subseteq B$? ג. האם $\{1\}\subseteq A$ ד. האם $\{1\}\in P(A)$? ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$ ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$

d. עבור $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$ $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$ $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות.

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$

e. $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$

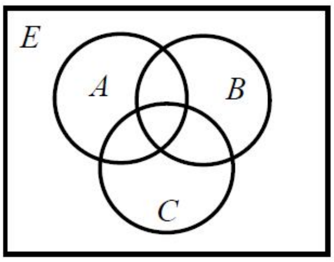
ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$

f. רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$

g. עבור $B=\{4,\varnothing\}$, $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $A-B$ ד. $B-A$ ה. $A\oplus B$



h. באיור שלפניך דיאגרמת וון . קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות.

א. $(A-B)-C$ ב. $A-(B-C)$ ג. $A\cap B^c$ ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$ ו. $A\cap(B\cap C)$ ז. $(A\cup B)\cup C$ ח. $A\cup(B\cup C)$

i. הוכח או הפרך את השוויונות הבאים בעזרת טבלאות אמת

א. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ ב. חוק הפילוג $A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

j. נגדיר 5 קבוצות A_i $i=1,2,3,4,5$ באופן הבא: $A_n=\{x\in\mathbb{N}\,|\,n<x\le 2n\}$

חשב את הקבוצות הבאות. א. $\bigcup_{k=1}^{5}A_k$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5}A_k$ ג. $\bigoplus_{k=1}^{5}A_k$

k. חזור על שאלה 6 עבור $A_n=\{x\in\mathbb{R}\,|\,n<x\le 2n\}$

l. נגדיר $A_k=\{x\in\mathbb{R}\,|\,5\le x\le 2k+3\}$ ונגדיר $B_k=A_{k+1}-A_k$

א. חשב את A_i ואת B_i עבור $i=1,2,3,4$

ב. חשב את $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ ואת $\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$

תרגילים תיאורטיים

1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.)

את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

א) אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.

ב) אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$

ג) אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.

ד) אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$

ה) אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$

ו) אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$

ז) אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.

ח) אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$

ט) $A\subseteq B\cap C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B\wedge A\subseteq C)$

י) $A\subseteq B\cup C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B\vee A\subseteq C)$

יא) אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$

יב) אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$

יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$

יז) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cap B$

יח) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cap B$

יט) $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

כ) $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

כא) השלם $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ________________

2) יהיו A, B, C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) אם $A = A - B$ אז $B = \varnothing$.

ב) אם $A = A - B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

ג) אם $A = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ד) אם $B = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ה) אם $A \cap B = A$ אז $A = A \cup B$.

ו) אם $A \cap B = B$ אז $A = A \cup B$.

ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.

ח) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

ט) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

י) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

יא) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

יב) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

יג) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

יד) א. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

ב. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. **במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.**

<u>ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.</u>

א) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ב) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$

ג) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$

ד) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$

ה) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.

ו) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C\subseteq B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד) $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה) $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו) אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

ז) אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$

ח) אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

א) $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב) $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד) אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז $(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$

ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ כך ש-$S=C\times D$

7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $\overline{A\oplus B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$

8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A,B,C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו כך ש-$A\cup(B-C)\subseteq A\cap(B-C)$

9) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(A)-P(B)=P(B)-\{\varnothing\}$ הוכח כי $B-A=B$

10) הוכח כי אם $A\Delta C\subseteq A\Delta B$ אז $A\cap C\subseteq B$

11) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$

12) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $A\cap B=\varnothing$ הוכח כי $(A\Delta C)\cup(B\Delta C)=A\cup B\cup C$

13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$

15) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$