סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תרגילים בנושא גרפים

הערה: השאלות באדום אינן מיועדות ללומדים במכללת אפקה.

(1) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים. הוכח כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$ אז G קשיר.

(2) יהי G גרף פשוט בעל $n=100$ קודקודים הוכח כי אם לכל קודקוד $x\in V$ מתקיים $d(x)\geq 50$ אז יש ב- G מעגל באורך 4.

(3) הוכח כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים שבו כל הדרגות הן לפחות 10 יש מעגל באורך ≤ 4.

(4) יהי G גרף דו צדדי $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$ נתון כי G הוא d רגולרי. $d\geq 1$, הוכח כי $|V_1|=|V_2|$.

(5) יהי G גרף פשוט הוכח כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ הוא קשיר. ובניסוח שקול: הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

(6) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים. הוכח כי אם $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(\bigstar)$ אז G קשיר. כאשר $|E|$ זה מספר הקשתות.

הראה כי חסם זה הדוק. כלומר הראה גרף פשוט G עבורו $|E|=\binom{n-1}{2}$ כך ש- G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(\bigstar)$.

(7) יהי T עץ בעל n קודקודים. נתון כי דרגותיו הן $1,3,5$ בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו- 10 מדרגה 5. כמה עלים יש בעץ?

(8) יהי $T=(V,E)$ עץ שבו: $|V|=n$. דרגות צמתי T הן: $1,3,5$ בלבד. מס' הצמתים שלהם דרגה 3 הוא 10 ומס' הצמתים שלהם דרגה 5 הוא 12. כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

(9) יהיו $T_1=(V,E_1),T_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים. נגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים וקשתותיו $E=E_1\cup E_2$ הוכח כי קיים $x\in V$ כך ש- $d(x)\leq 3$. (דרגתו של x ב- G)

(10) צובעים ב- $n\geq 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת הוכח כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

(11) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

(12) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט הוכח כי אם $|V|=|E|$ אז ב- G יש מעגל ואם G קשיר אז המעגל יחיד.

(13) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו $x,y\in V$ שני קודקודים <u>לא שכנים</u> הוכח כי אם $d(x)+d(y)\geq n$ אז יש ל- x ול- y לפחות שני שכנים משותפים.

(14) הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.

הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

(15) יהי $G=(V,E)$, $|V|=n,$ גרף פשוט וחסר מעגלים שבו k רכיבי קשירות, הוכיחו כי: $|E|=n-k$.

(16) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ <u>שאף</u> שניים מהם אינם איזומורפיים?

17) יהי G גרף פשוט על $n \ge 2$ צמתים ויהיו $u,v \in V$ קודקודים שאינם שכנים. הוכח כי אם $d(u),d(v) \ge \frac{n+1}{2}$ אז יש ל- u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

18) בכמה עצים על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

19) יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם. הוכח כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

20) יהיו $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$ $V_2 \cap V_2=\varnothing$, $E_1 \cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1 \cup E_2$, $V=V_1 \cup V_2$ ומלכדים צומת $u_1 \in V_1$ עם צומת $u_2 \in V_2$. האם G אוילרי? ואם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם האם כעת ם G אוילרי?

21) יהיו G_1,G_2 שני גרפים איזומורפיים. הוכח כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow G_2$ חסר מעגלים. הסק כי G_1 עץ $\Leftrightarrow G_2$ עץ.

22) הוכח כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב- t צבעים נקבל מעגל חד צבעי.

23) יהי $T=(V,E)$ עץ. הוכיחו שאם <u>כל</u> דרגותיו אי-זוגיות אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

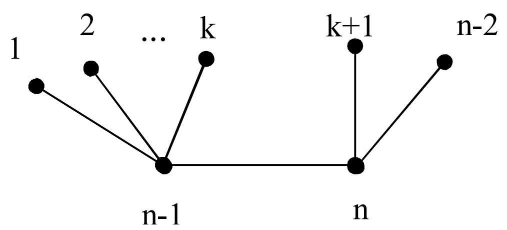
24) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט. $|V|=n$. הוכיחו כי: $|E| \le \frac{n^2}{4}$.

25) יהי $G=(V,E)$ גרף כך ש-: $V=P_2(\{1,2,..,n\}),(n \ge 2)$

$$e \in E \quad \Leftrightarrow \quad A \bigcap B=\phi, \qquad A,B \in V$$

(i) חשבו את $|V|$.
(ii) מהי דרגת כל צומת ?
(iii) הוכיחו כי אם $n \ge 5$ אזי G קשיר (<u>רמז</u>: דרך השלילה).

26) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים $2 \le k \le n-3$ הפרידו בין המקרים $n=2k+2$, $n \ne 2k+2$.

27) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1}? נמקו.

28) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו-$G_3=(V,E_3)$. נגדיר:

$G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-V דרגתו ב-G היא לפחות 6. הוכיחו כי לפחות אחד

מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.

29) יהי T עץ על $n\geq 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב-T מדרגה 2. יה י k מספר רכיבי הקשירות של $T-v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל

ממחיקת v (והקשתות ש- v קצה שלהן). מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו טענתכם

30) יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות. הוכיחו: (i) יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9. (ii) G קשיר.

31) כמה מעגלים פשוטים באורך $3\leq k\leq n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקדוים $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$? שני מעגלים המתקבלים

אחד מין השני ע"י סיבוב נחשבים זהים. למשל עבור $n=5$ שני המעגלים הבאים $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים

ואילו המעגלים $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

32) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל התת קבוצות של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים

הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

a. הוכח כי לכל $n\geq 2$ G_n קשיר.

b. הוכח כי אם v תת קבוצה בת k אברים של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ אז דרגתה כקודקוד ב-G_n היא $2^n-2^{n-k}-2^k+1$.

c. הוכח כי לכל $n\geq 3$ קיים מעגל המילטון ב-G_n. מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k\leq 2^{n-1}+2$

33) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

34) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה: $((1,1,3,4,3,6,10,1)$?

35) יהיו $T_1=\langle V_1,E_1\rangle,\quad T_2=\langle V_2,E_2\rangle$ עצים.

נגדיר גרף G באופן הבא: $G=\langle V_1\cup V_2,\ E_1\cup E_2\rangle$

d. נתון כי: $V_1\cap V_2=\{v\}$. האם G בהכרח עץ ? נמקו.

e. נתון כי: $E_1\cap E_2=\{e\}$. האם G בהכרח עץ ? נמקו.

f. יהי $T=(V,E)$ עץ שדרגות <u>כל</u> צמתיו אי-זוגיות. הוכיחו כי $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

36) יהי T עץ על $n \ge 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר). מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות). יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n \ge 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, עליכם להוכיח ש-n זוגי!).

37) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2, שכל אחד מהם עץ. מוסיפים שתי קשתות חדשות ל-G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ומתקבל גרף חדש $\widetilde{G}$.

(i) הוכיחו שב- $\widetilde{G}$ בהכרח יש מעגל

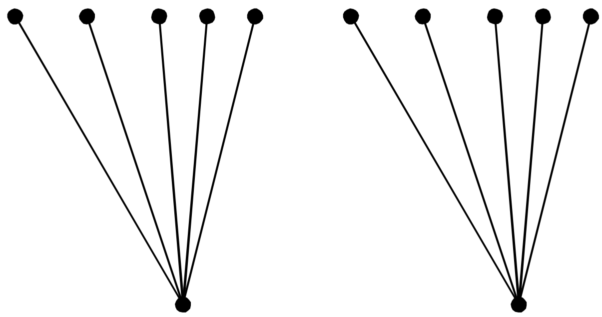
(ii) בנו דוגמה שבה ב - $\widetilde{G}$ יש מעגל המילטון

39) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצויירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה, ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים). הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצויירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל 5.
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

40) יהי G גרף פשוט על $n \ge 3$ קודקודים. <u>נתון</u>: (i) n מספר זוגי. (ii) כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי). (iii) גם G וגם $\overline{G}$ קשירים. הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- $\overline{G}$ יש מעגל המילטון.

41) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ $(n \ge 1)$ והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים שדרגתם אפס). הוכיחו ש-G הוא עץ.

42) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{v_1, v_2, ..., v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



43) יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V. מגדירים את הגרף $G=(V,E_1\oplus E_2)$ כאשר $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות. (כל הקשתות שנמצאות ב- E_1 או ב- E_2 אבל לא בשתיהן) הוכח כי אם ב- G_1, G_2 יש מעגל אוילר ואם G קשיר אז גם בו יש מעגל אוילר.

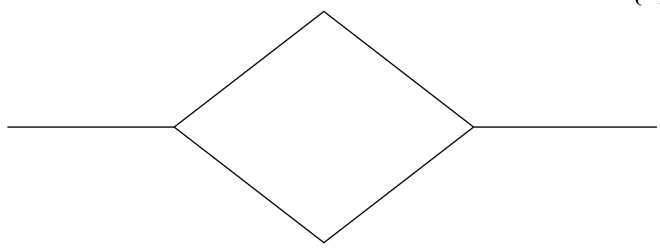
44) יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1,2,3,\cdots,8\}$ כאשר שני קודקוים הם מחוברים אם ורק אם בחיתוך שתי הקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?

45) הוכיחי, או תני דוגמה נגדית והסבירי מדוע היא דוגמה נגדית: אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

46) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו איזוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, וקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G. הוכיחי שב H יש מעגל אוילר.

47) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחי שיש בגרף 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר.

48) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן,
אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים {a,b,c,d,e,f}?



49) כמה עצים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$ שלהם בדיוק שני עלים?

50) הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי.

51) הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

52) יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה {1,2,…,n} (n גדול מ 6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים בדיוק. לדוגמה, הקודקוד {1,2,3,4} שכן של {1,2,7,8} אך לא של {1,2,3,7}.
כמה קודקודים בגרף סה"כ הם שכנים של {1,2,3,4}, {1,2,3,5} או {1,2,4,5}?

53) יהי T עץ. נוסיף ל T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ v לחלק מקודקודי T. מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד? הוכיחי שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

54) הוכיחי את הטענה הבאה, או תני דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

55) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים. כמה רכיבי קשירות בגרף?

56) יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1. כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

57) יהי T עץ על $n \geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים. מהן דרגות קודקודי T ? רשמו אותן, לכל $n \geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

58) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ. האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן מהו מספר הקשתות?

59) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים סדרת דרגותיו של G_1 היא: 2,2,3,4,5,5,6

וסדרת דרגותיו של G_2 היא: 1,2,3,4,4 לגבי כל אחד משני הגרפים קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה אבל הוא לא פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

60) עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n באופן הבא: צמתיו הם 2^n הסדרות הבניאריות באורך n. ושני קודקודים מחוברים בינהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקורדינטה אחת. מה מספר הקשתות של G_5? של G_n?

61) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים. לאלו ערכים של n מתקיים ש-C_n איזומורפי ל-$\overline{C}_n$? כאשר $\overline{C}_n$ הוא הגרף המשלים.

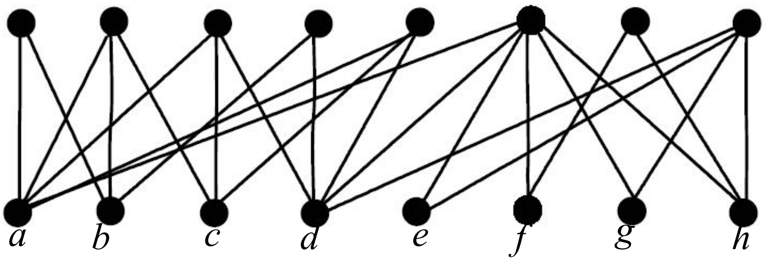
62) נגדיר גרף G באופן הבא: $V=\left\{A\in P\left(\{1,2,3,4,5,6,7\}\right) \middle| |A|=3\right\}$ למשל $v=\{2,5,6\}$ היא צומת של G שכן זו תת קבוצה של $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ בת שלושה איברים. כמו כן נגדיר את קבוצת קשתות G באופן הבא:

$$|A\cap B|=1 \Leftrightarrow \{A,B\}\in E$$

א. הוכח כי G קשיר וחשב את מספר קודקודיו.

ב. חשב את דרגת כל צומת ואת מספר קשתותיו.

ג. האם G אוילרי? המילטוני?



63) א. הוכח כי בגרף הבא אין זווג מושלם?.

ב. מצא זווג מקסימום.

ג. מהו המספר המינמלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג מושלם

64) יהי G גרף מישורי על 11 קודקודים. הוכח כי $\bar{G}$ אינו מישורי.

65) יהי G גרף מישורי על n קודקודים. הוכח כי אם $n \geq 11$ אז $\bar{G}$ אינו מישורי.

66) יהי $G=(V,E)$ גרף ותהינה A,B קבוצות צבעים. נסמן את הגרף המשלים ב-$\bar{G}=(V,\bar{E})$.

תהינה $f:V \to A$, $g:V \to B$ שתי צביעות חוקיות של G ושל $\bar{G}$ בהתאמה.

<u>הערה:</u> כזכור צביעת קודקודים היא פונקציה המתאימה לכל קודקוד צבע.

נגדיר $h:V \to A \times B$ באופן הבא: $h(v)=\langle f(v),g(v)\rangle$ כלומר h מתאימה לכל $v \in V$ זוג סדור של צבעים.

הימני בזוג הוא הצבע של v לפי הצביעה החוקית של G והשמאלי בזוג הוא הצבע של v לפי הצביעה החוקית של $\bar{G}$. הוכח כי אין שני קודקודים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים והסק כי h היא פונקצייה חח"ע. כמו כן הסק כי $\chi(G)\cdot\chi(\bar{G}) \geq n$.

67) עבור $A=\{1,2,3\}$ נגדיר $G=(V,E)$ כאשר $V=A\times A$ (9 צמתים) ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא:

$$\{(a,b),(c,d)\} \in E \text{ אם ורק אם } a+b \neq c+d$$

א. הוכח כי G קשיר.

ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב-G?

ג. הוכח כי באין ב-G מסלול אוילר.