

תרגילים בנושא האלגוריתם של אוקלידס

(1) חשב $\gcd(a, b)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס ורשום את סידרת אוקלידס המתקבלת עבור:

א. $a = 78$ $b = 45$ ב. $a = 57$ $b = 36$ ג. $a = 132$ $b = 44$ ד. $a = 187$ $b = 121$

(2) רשום את סדרת אוקלידס ורשום את $\gcd(a, b)$ ללא ביצוע רישום מפורש של האלגוריתם עבור:

א. $a = 90$ $b = 56$ ב. $a = 1458$ $b = 1536$ ג. $a = 741$ $b = 132$

(3) יהיו $a, b, c \in \mathbb{Z}$

א. הוכח כי אם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|b+c$

ב. הוכח כי אם $a|b$ וגם $a|b+c$ אז $a|c$

ג. הסק מהסעיפים הקודמים כי כל שני מספרים טבעיים עוקבים הם זרים.

(4) הוכח כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ המספרים a, b הם זרים.

א. $a = 9n + 5, b = 2n + 1$ ב. $a = 10n + 11, b = 6n + 7$

(5) הוכח כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ מספרים $a = 3n + 7, b = n + 3$ הם זרים אם ורק אם n הוא זוגי.

(6) מצא מספר טבעי $n < 50$ כך שהמספרים $a = 3n + 1, b = 5n - 2$ אינם זרים.

(7) א. מצא שלושה מספרים טבעיים $n < 170$ כך שהמספרים $a = 7n + 8, b = 5n + 3$ אינם זרים.

ב. רשום במפורש את אברי הקבוצה הבאה: $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \gcd(7n + 8, 5n + 3) \neq 1\}$

(8) א. מצא לאלו ערכי $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\gcd(3x, 2) = 1$.

ב. לאלו ערכי $x, y \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\gcd(2x + y, 3) = 1$

ג. עבור $n \in \mathbb{Z}, 7 \leq n$ מצא $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\gcd(2x + 3y, n - 1) \neq 1$

ד. עבור $n \in \mathbb{Z}, 7 \leq n$ מצא $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\gcd(2x + 3y, n) = 1$