האינטגרל המסוים

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$ ב. $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$ ג. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

ד. $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$ ה. $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+1}dx$ ו. $\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx$

ז. $\int_0^4 f(x)dx$ כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$ ח. $\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ב. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$

3) נתונה פונקציה רציפה f. הוכח:

א. אם f זוגית אזי $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם f אי-זוגית אזי $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3+x^5}dx$ ב. $\int_{-4}^4 \frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

5) הוכח את אי-השיוויונים הבאים:

א. $\frac{2}{41} \le \int_{-1}^{3} \frac{dx}{1+x^4} \le 4$

ב. $6 \le \int_{-4}^{2} \sqrt{1+x^2}\,dx \le 6\sqrt{17}$

ג. $2 \le \int_{0}^{2} e^{x^2} dx \le 2e^4$

ד. $\frac{1}{2}e^{-10} < \int_{0}^{10} \frac{e^{-x}}{x+10}dx < 1$

ה. $0.9 \le \int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \le 1$

ו. $\frac{\pi}{14} \le \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx \le \frac{\pi}{6}$

ז. $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$

ח. $-\frac{1}{2} \le \int_{0}^{1} x\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right)dx \le \frac{1}{2}$

ט. $\int_{0}^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

6) חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4}{n^3}$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

ג. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

ד. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right\}$

ה. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

ו. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן):

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

א. $\int_{0}^{1} x\,dx$

ב. $\int_{0}^{1} x^2 dx$

ג. $\int_{0}^{1} x^3 dx$

ד. $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

תשובות סופיות:

1) א. -6 ב. $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$ ג. $-2e^{-1}+1$ ד. $\frac{1}{5}$

ה. $\arctan 6-\arctan 3$ ו. $\frac{\pi}{2}$ ז. $\frac{17}{12}$

ח. $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

2) א. $\frac{\pi^2}{2}$ ב. $\frac{\pi}{4}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. 0 ב. $2\arctan 4$

5) שאלת הוכחה.

6) א. $\frac{1}{5}$ ב. $1-\cos 1$ ג. $\ln 2$ ד. $\frac{\pi}{4}$

ה. $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ו. $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) א. $\frac{1}{2}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 2