

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס סטטיסטיקה א'. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר [www.gool.co.il](http://www.gool.co.il)



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול, בשביל התירגול...**

## תוכן

- פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה ..... 3
- פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים ..... 6
- פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים ..... 14
- פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה ..... 16
- פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי ..... 19
- פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן ..... 29
- פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור- טווח בין- רבעוני ..... 34
- פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - ממוצע משוקלל ושונות מצורפת ..... 37
- פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן ..... 40
- פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות ..... 43
- פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית ..... 48
- פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות ..... 51
- פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - BOXPLOT ..... 54
- פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות ..... 57
- פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות ..... 66
- פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים ..... 71
- פרק 17 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד ..... 82
- פרק 18 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה ..... 86
- פרק 19 - תלות ואי תלות בין מאורעות ..... 92
- פרק 20 - שאלות מסכמות בהסתברות ..... 96
- פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות ..... 100
- פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן ..... 104
- פרק 23 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית ..... 108
- פרק 24 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים ..... 112
- פרק 25 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקציית ההסתברות משותפת ..... 115
- פרק 26 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים ..... 120
- פרק 27 - המשתנה המקרי הדו מימדי - קומבינציות לגאריות ..... 126

## פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה

### רקע:

בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת. הקבוצה יכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי. בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.

בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

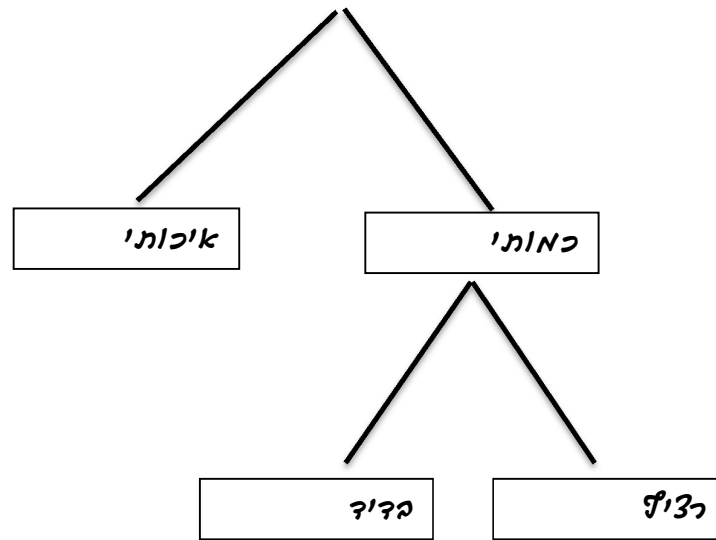
### דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

מי הקבוצה הנחקרת?

מה גודל הקבוצה?

מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין לערכים המתקבלים.

כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..)

מין האדם (זכר, נקבה)

מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)

ציון בבחינה ( מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1 )

הערה:

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים.

כמו: גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי)

משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

**תרגילים:**

1. סווג את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
- מספר הדירות בבניין.
  - גיל אדם בשנים.
  - אחוז האבטלה בעיר.
  - מקצוע לימוד מועדף.
2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".  
בחברה 200 עובדים.

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

- מהו המשתנה הנחקר כאן?
- האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
- לפניכם רשימה של משתנים כמותיים. ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.
  - שכר עובד בש"ח.
  - ציון בחינת בגרות.
  - תוצאה בהטלת קובייה.
  - מהירות ריצה בתחרות.
  - שיעור התמיכה בממשלה.

**פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים**

**רקע:**

דרכים להצגת נתונים שנאספו :

**א. רשימה של תצפיות:**

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות :

3 4 3 5 4

**ב. טבלת שכיחויות בדידה:**

שם המשתנה X	שכיחות $f(X)$	שכיחות יחסית באחוזים
$X_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N} \times 100$
$X_2$	$f_2$	$\frac{f_2}{N} \times 100$
$X_3$	$f_3$	$\frac{f_3}{N} \times 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_k$	$f_k$	$\frac{f_k}{N} \times 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

$\frac{f_i}{n}$	$F_i$	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון X-
$0.08=2/25$	2	2	5
$0.16=4/25$	6	4	6
$0.32=8/25$	14	8	7
$0.2=5/25$	19	5	8
$0.16=4/25$	23	4	9
$0.08=2/25$	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות:  $F_i$  - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:  $\frac{f_i}{n}$  - איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

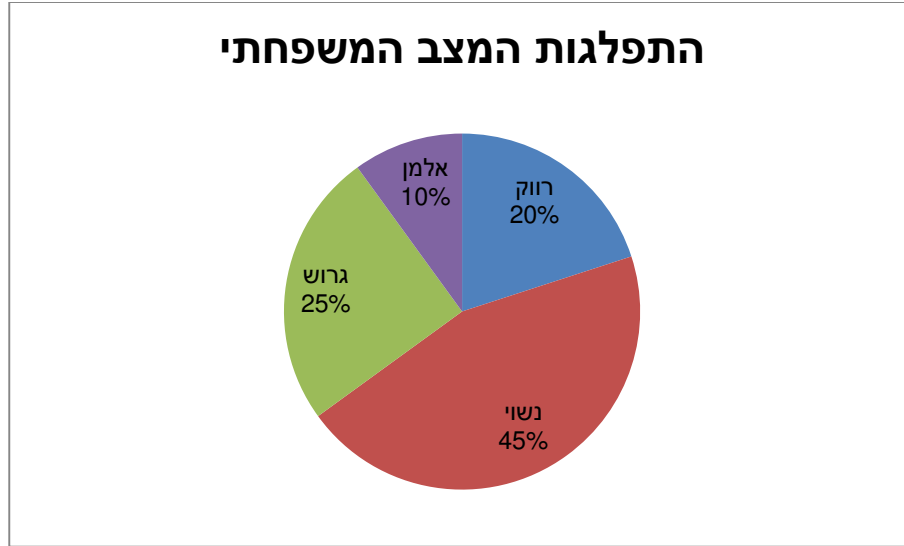
### ג. טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.  
למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות.  
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

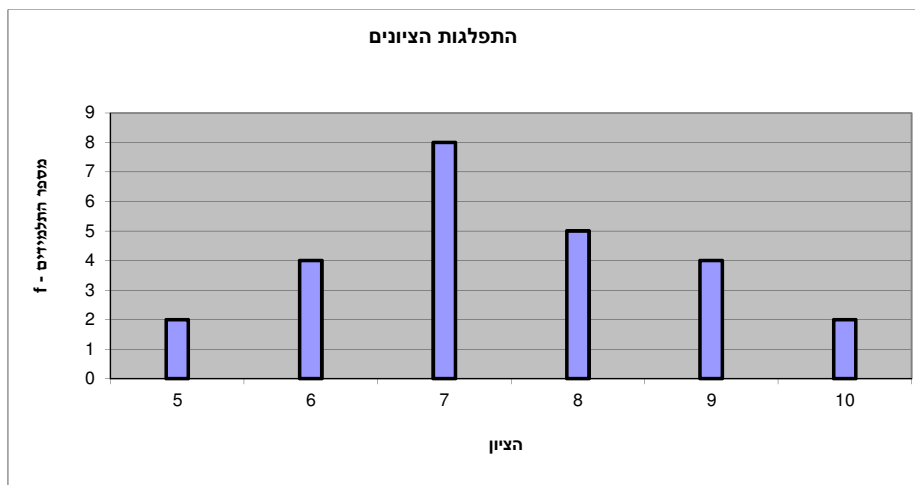
ד. דיאגרמת עוגה :

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. דיאגרמת מקלות :

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הציר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות .  
 רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף .  
 כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.





1. **היסטוגרמה :**

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות.

רלבנטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.

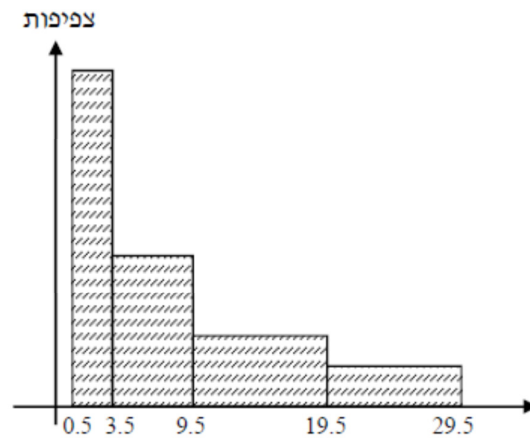
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת

את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה.

אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך

בצפיפות.

			X		
צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5

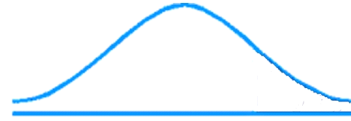


**פוליגון- מצולעון :** אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של

התפלגות המשתנה.

### צורות התפלגות נפוצות

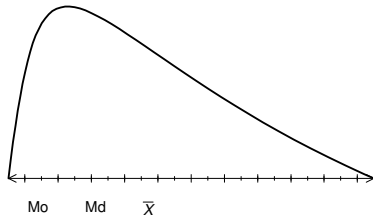
התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות:

התפלגות אסימטרית ימנית ( חיובית ) – רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

#### התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית ( שלילית ) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל, אורך חיים.

#### התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



**תרגילים:**

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו - 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.  
 א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.  
 ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

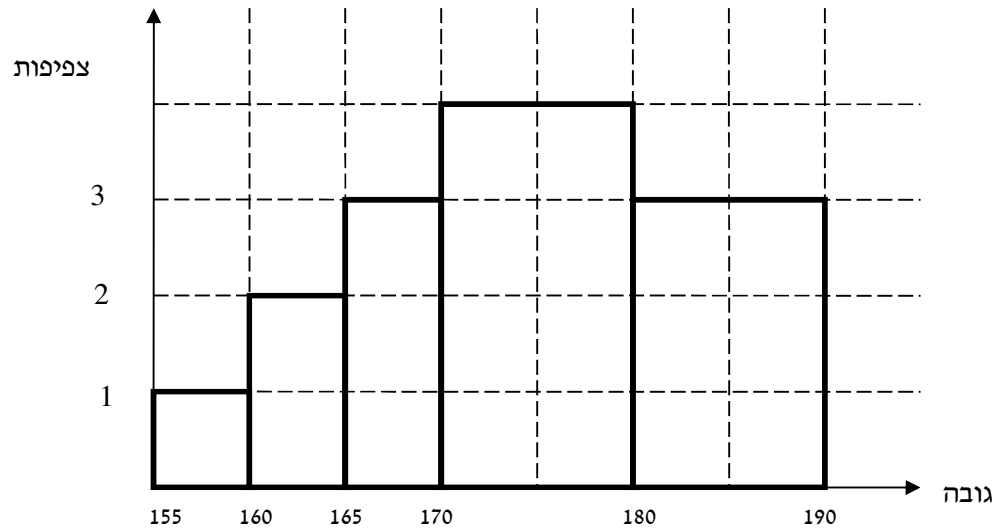
- א. מהו המשתנה הנחקר?  
 ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?  
 3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?  
 ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.  
 4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6

- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?  
 ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחויות.  
 ג. הוסף שכיחויות יחסיות לטבלה.  
 ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

5. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?  
 ב. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.  
 ג. הוסף שכיחות יחסית לטבלה.  
 ד. הוסף את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.  
 ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

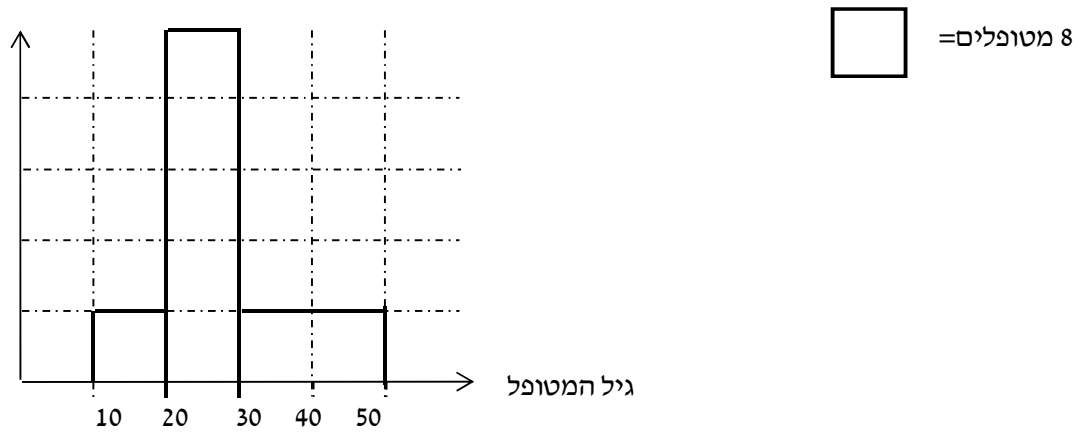
6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

- א. תאר את ההתפלגות באופן גרפי.  
 ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7. להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :

קנה מידה :



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהי הקבוצה הנחקרת?

ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.

ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

### פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים

#### רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות. הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת. לדוגמא משקל של בני אדם או משקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה. **גבולות מדומים:** כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק. **רמת הדיוק חייבת להיות קבועה** אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמתיים. כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמתיים? לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2 את התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמתיים נשאר אותם כמו שהם.

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח'. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

f(x)	X
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

**תרגילים:**

1. להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

f(x)	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2. להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת. יש לרשום את הנתונים בגבולות אמתיים.

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

**פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה**

**רקע:**

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת כדי לרשום סכום של תצפיות:

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	$X_i$
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2



**תרגילים:**

1. בבניין 5 דירות, לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X) ומספר הנפשות החיות בדירה (Y).

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

חשבו:

$$\sum_{i=1}^3 X_i$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$$

$$\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i$$

$$\sum (X_i) \sum (Y_i)$$

2. נתון לוח ערכי המשתנים  $x_i$  ו  $y_i$  כאשר :  $i=1,2,\dots,6$

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	3	2	4	-2	1	4
$y_i$	2	0	0	1	-5	2

ונתונים הקבועים :  $b=5$   $a=2$  חשבו את הנוסחאות הבאות :

$$\text{א. } \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^6 a$$

$$\text{ג. } \sum_{i=1}^6 x_i y_i$$

$$\text{ד. } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$$

$$\text{ה. } \sum_{i=1}^6 x_i + a$$

3. קבע לכל זהות אם היא נכונה :

$$\text{א. } \sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^n a = a \cdot n$$

$$\text{ג. } \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

4. נתון :

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$$

חשב :  $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$  (פתרון : 1160)

## פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

### רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

### השכיח – MODE

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

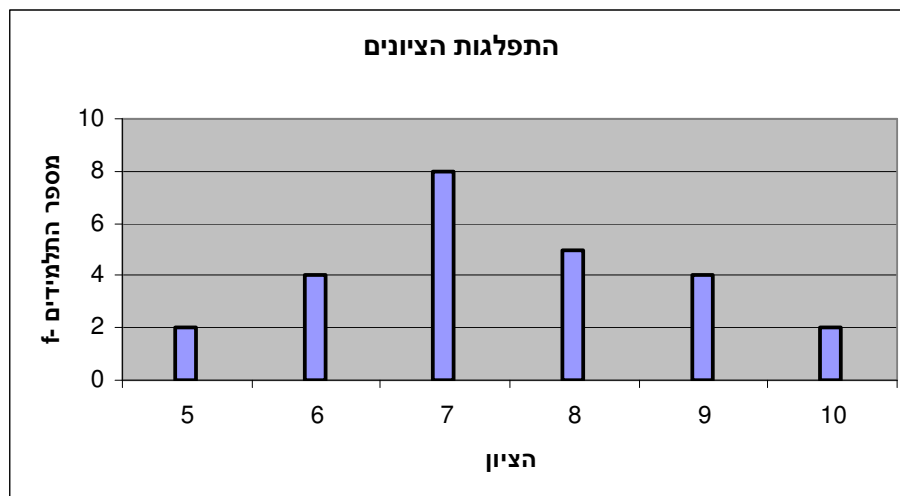
ברשימה : הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים .

7 9 4 8 4 10 6

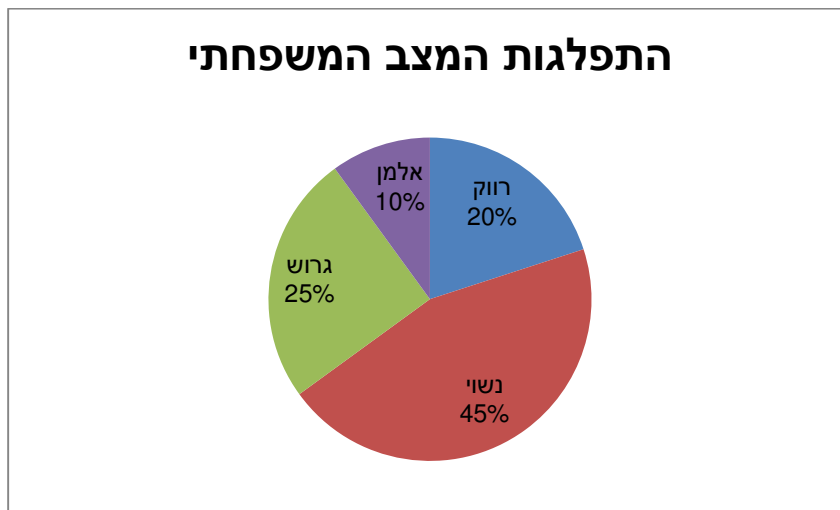
בטבלת שכיחויות בדידה : הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תכניות החיסכון	f(x)
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות : שיעור ה-X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה: הערך של הפלח הגדול ביותר.

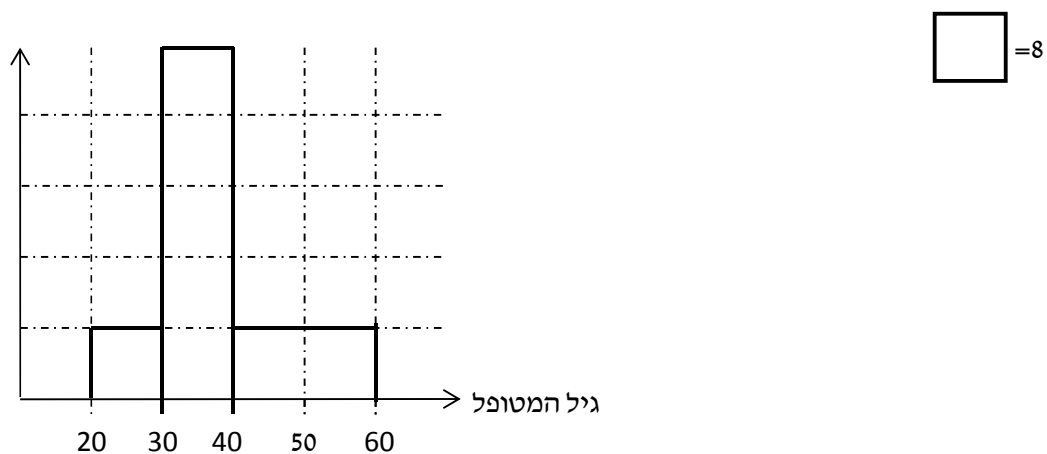


בטבלת שכיחויות במחלקות: אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר. התפלגות הציונים בכיתה.

$f(x)$	$X$
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה: שיעור ה- $X$  של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

להלן גיל המטופלים של דייר שוורץ בשנים:



כללי: יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד. השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

**MIDRANGE – (טווח)**

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר.

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

**MEDIAN - החציון**

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו. ברשימה: נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה:  $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$  והאיבר ה- $\frac{n}{2}+1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ושיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בטבלת שכיחויות בדידה: נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות: נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות:

שלב א: נימצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה  $\frac{n}{2}$ .

$$Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

$F(x_{m-1})$  - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$  - השכיחות של המחלקה החציונית.

$L_0$  - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$  - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה: החציון הוא הערך על ציר ה-X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים

בשטח.

כללי: החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

**הממוצע**

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

ברשימה:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$$

בטבלת שכיחויות:

במחלקות: נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה-X. הממוצע הזה יהיה

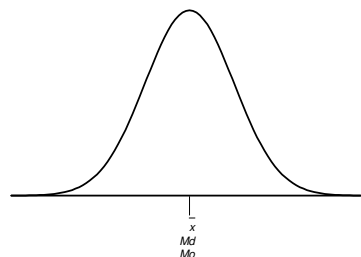
ממוצע מקורב.

כללי: הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

### מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

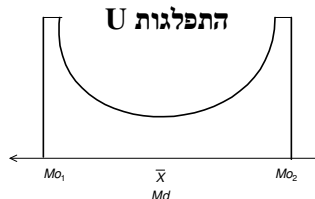
בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

#### התפלגות סימטרית



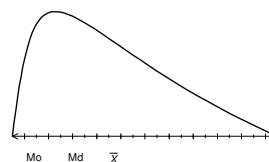
בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

#### התפלגות U

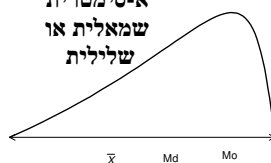


בהתפלגות אסימטרית

#### התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



#### התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



**תרגילים:**

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6  
חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8  
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.  
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?  
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

א. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.  
ב. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?

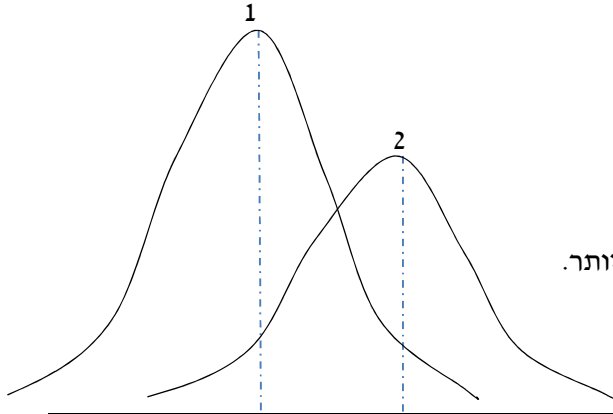
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5. מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחר בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6. ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר משפחות	מספר טלוויזיות
28	0
62	1
	2
	3

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם, כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה) הסבירו ללא חישוב.

7. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

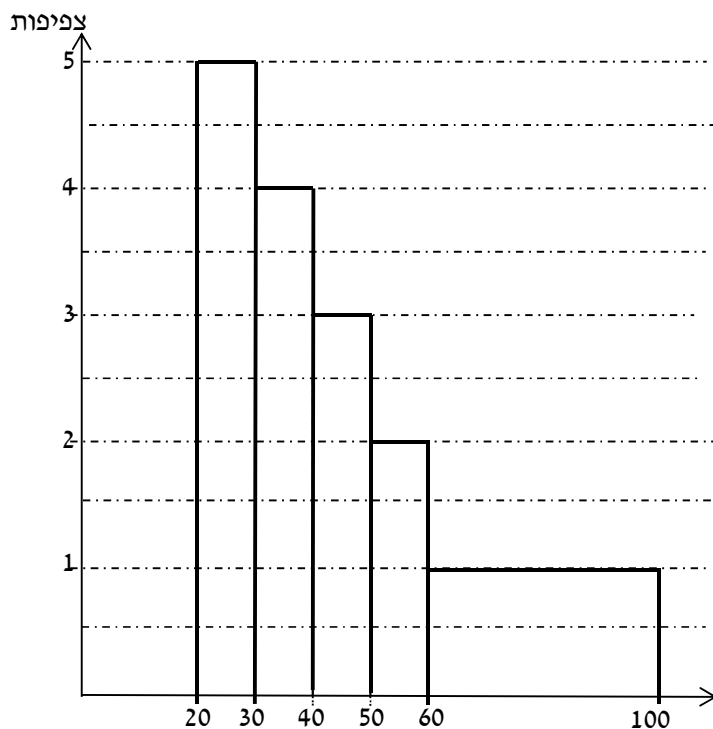
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

8. להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

חשב את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

9. בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



א. מצא את השכיח בהתפלגות.

ב. מצא את החציון בהתפלגות.

ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.

ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

**פתרונות:****שאלה 1:**

החציון: 7

השכיח: 6

הממוצע: 6.9

**שאלה 2:**

א. 3

ב. שכיח: 3,4 חציון: 4

**שאלה 3:**

א. הממוצע: 1.7

החציון: 1.5

השכיח: 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

**שאלה 4:**

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון: 3

ממוצע: 2.952

**שאלה 5:**

תשובה ב:

**שאלה 6:**

ב חציון: 2 שכיח: 2 אמצע טווח: 1.5

**שאלה 7:**

חציון וממוצע: 55

## פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן

### רקע:

**המטרה :** למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

### הטווחותחום RANGE:

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר :  $R = X_{\max} - X_{\min}$

### שונות וסטיית תקן:

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים:}$$

דוגמה : נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה : 5,4,9

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות:}$$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44

הציון X-	השכיחות-f	x <sup>2</sup> · f
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		1430

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

**תרגילים:**

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6  
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני

עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4. נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:

1, 2, 3, 2, 1. חשב את השונות של חמש התצפיות.

5. בשכונה בדרו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

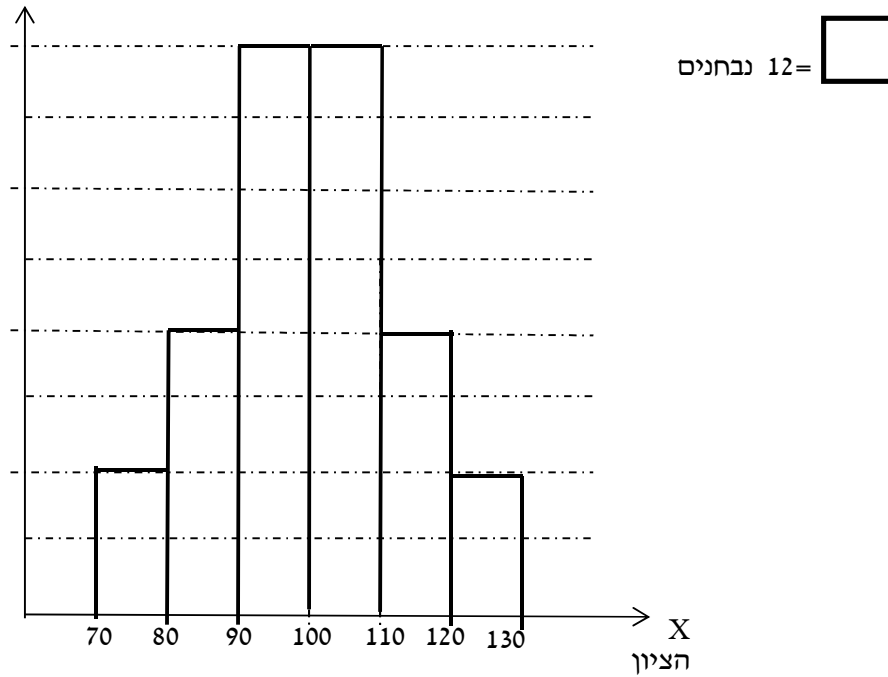
- א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?  
 ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.  
 ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

7. להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?  
 ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.  
 ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?



**פתרונות :****שאלה 1:**

השונוות : 2.19

סטיית תקן : 1.48

טווח : 6

**שאלה 2:**

א. סטיית תקן: 1.106

ב. טווח 4

**שאלה 3:**

א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

**שאלה 4:**

10.8

**שאלה 5:**

א. 3.05

ב. 1.16

**שאלה 6:**

7.73

**שאלה 7:**

א. 100

ב. 12.96

**פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין-רבעוני**

**רקע:**

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

**שלב 1: במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:**

F	f מספר עובדים (שכירות)	$L_1 - L_0$ רוחב	מספר שנות ותק
56	56	4	0.5 – 4.5
106	50	5	4.5 – 9.5
154	48	2	9.5 – 11.5
190	36	3	11.5 – 14.5
200	10	5	14.5 – 19.5

**שלב 2:** נימצא את הרבעון התחתון ( האחוזון ה-25 ) והרבעון העליון ( האחוזון ה-75 ).

מיקום הרבעון התחתון יהיה:  $\frac{n}{4}$

מיקום הרבעון העליון יהיה:  $\frac{3n}{4}$

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0) \quad ; \quad Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

**שלב 3:** נחסר את הרבעונים:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

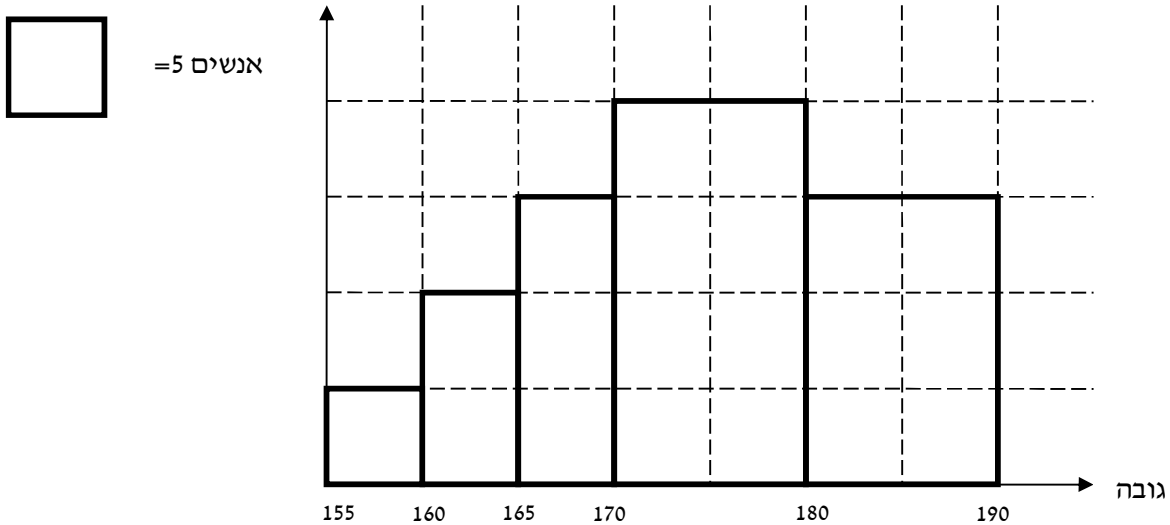
תרגילים:

1. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מצא את הטווח הבין-רבעוני.

2. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצא  
את הטווח  
הבין-  
רבעוני.

**פתרונות:**

**שאלה 1:**

13.75

**שאלה 2:**

13.33

## פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - ממוצע משוקלל ושונויות מצורפת

### רקע:

מדובר על מצב שבו ישנן כמה קבוצות שרוצים לאחד אותן לקבוצה אחת גדולה.

מתעניינים בממוצע והשונויות של הקבוצה הגדולה המתקבלת מאיחוד הקבוצות הקטנות.

$$n_j = \text{מס' התצפיות בקבוצת ה-} j$$

= j אינדקס של הקבוצה.

$$N = \text{מס' התצפיות בכל הקבוצות יחד (סכום כל ה-} n_j)$$

$$\bar{x}_j = \text{הממוצע בקבוצה ה-} j$$

$$S_j^2 = \text{השונויות בקבוצה ה-} j$$

הנוסחאות לממוצע משוקלל ושונויות מצורפת:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j n_j}{N} ; \quad N = \sum_{j=1}^k n_j ; \quad s_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^k n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{N}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בחברה שני אגפים, אגף א' מונה עשרים עובדים, השכר הממוצע שם הוא 6,000 ₪ וסטיית התקן היא 2,000 ₪. באגף ב' עשרה עובדים השכר הממוצע הוא 12,000 ₪ וסטיית התקן היא 3,000 ₪.

מהו השכר הממוצע ומהי סטיית התקן של שכר העובדים בחברה?

**תרגילים:**

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשב את הממוצע המשוקלל בשכבה.

ב. חשב את השונות המצורפת בשכבה.

2. נתונות שתי קבוצות:

בקבוצה I פי שתיים תצפיות מאשר בקבוצה II.

הממוצע בשתי הקבוצות הוא 70.

השונות בקבוצה I היא 100.

השונות בקבוצה II היא 400.

א. מצא את הממוצע של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

ב. מצא את סטיית התקן של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

**פתרונות:****שאלה 2**

א. 70

ב. 14.14

**שאלה 1**

א. 76.22

ב. 173.5

## פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

### רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

### ציון תקן:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} : \text{הנוסחה לציון תקן של תצפית היא}$$

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

### דוגמה: ( פתרון בהקלטה )

במקום עבודה מסוים ממוצע המשכורות 8 אלפי ₪ עם סטית תקן של 2 אלפי ₪ באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר באופן יחסי משכיל או משתכר ?



## תרגילים

1. תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.  
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

- עודד קיבל: 68 בלשון ו70 במתמטיקה.  
א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?  
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית ( מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.  
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	
15	48	ממוצע
2	10	סטיית תקן

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.  
מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?  
בחר בתשובה הנכונה.  
א. התפוקה.  
ב. כמות הפועלים.  
ג. חריגים באותה מידה.  
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3. הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן 10 סנטימטר. המשקל הממוצע 66 ק"ג עם סטיית תקן 8 ק"ג. ערך התגייס, גובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.  
א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים- גובהו או משקלו?  
ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

**פתרונות:**

**שאלה 1:**

א. לשון

ב. 72

**שאלה 2:**

תשובה ב

**שאלה 3:**

א. משקל

ב. 70

**פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות**

**רקע:**

האחוזון (המאון) ה- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש  $p\%$

מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$  ב- $X_p$ .

למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון: ערך ש-רבע מהתצפיות קטנות

ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן:  $X_{0.25}$

**מציאת מאון במחלקות:**

**שלב א:** נימצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה  $\frac{np}{100}$ .

$$\text{שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: } (L_1 - L_0) \cdot \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} + L_0 = x_p$$

$F(x_{m-1})$  - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$  - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

$L_0$  - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$  - גבול העליון של המחלקה.

אם רוצים לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה:

$$P_x = \left[ \frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר בש"ח	f(x)
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

**תרגילים:**

1. להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

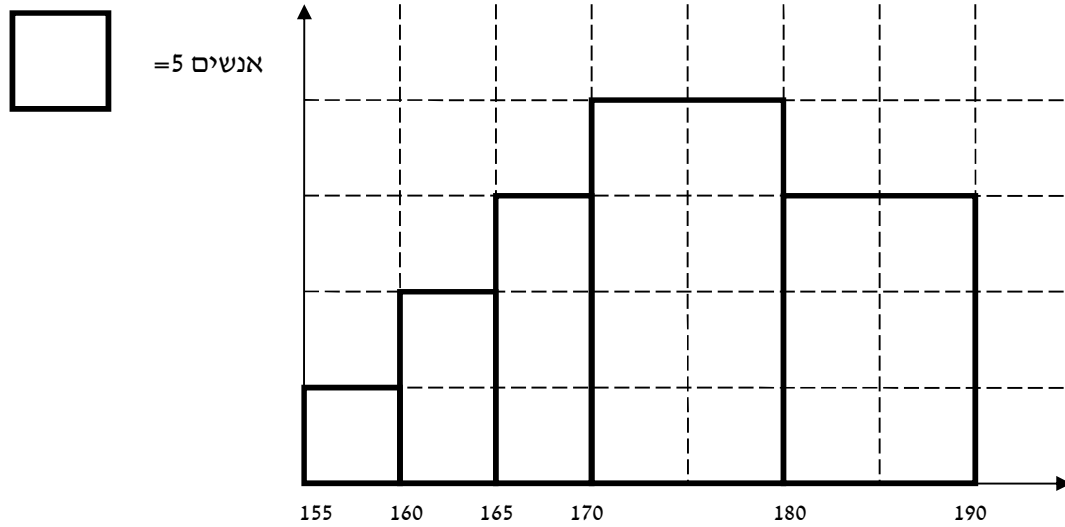
שכר X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

- א. חשבו את המאון ה-60.
- ב. מהו העשירון העליון?
- ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?
- ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7000 ₪?
- ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?
- ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7000 ל-25,000 ₪?

2. למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחות החסרות.

ציון - X	$f(X)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- א. העשירון התחתון.  
 ב. האחוזון ה-30.  
 ג. הגובה ש-20%

- מהתצפית גדולות ממנו.  
 ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.  
 ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.  
 ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

**פתרונות:****שאלה 1 :**

- א. 13.23
- ב. 22
- ג. 17.2
- ד. 8.82%
- ה. 7.36%
- ו. 83.82%

**שאלה 3:**

- א. 162.5
- ב. 170
- ג. 183.33
- ד. 3%
- ה. 15%
- ו. 55%

## פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

### רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה של קבוע ( או החסרה ) והכפלה של קבוע ( או חילוק ) לכל

$$y = a \cdot x + b \quad \text{התצפיות:}$$

וכך יושפעו המדדים השונים:

### מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR_x + b$$

$$Mo_y = a \cdot Mo_x + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

### מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$

$$s_y = |a| s_x$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

### מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע של עובדים הנו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪ חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב100 ₪.



**תרגילים:**

1. עבור סדרת נתונים התקבל:

$$\bar{X} = 80$$

$$S = 15$$

$$MO = 70$$

הוחלט להכפיל את כל התצפיות פי-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשב את המדדים הללו לאחר השינוי.

2. בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3. במבחן הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות. והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4. דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. קבלו שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא. עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקנים בקופסא?

5. חברת בזק הציעה את החבילה הבאה:

שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים. ובנוסף 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת, אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע בחודש יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6. הוכח שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית:

$$Y_i = a \cdot X_i + b$$

אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

**פתרונות :****שאלה 2 :**

הממוצע: 46  
השונות: 30.25

**שאלה 4 :**

ממוצע: 37  
סטיית תקן: 1.5

**שאלה 1 :**

הממוצע: 315  
סטיית התקן: 60  
השכיח: 275

**שאלה 3 :**

טווח: 40  
חציון: 77  
עשירון עליון: 91

**שאלה 5 :**

ממוצע: 90  
שונות: 25  
ציון תקן: 2

## פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות

### רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל). על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע

הנתונים נחשב את **מקדם ההשתנות - Coefficient of Variation** :

$$CV = \frac{S(X)}{\bar{X}}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע וככל שמקדם ההשתנות גבוהה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

**תרגילים:**

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2. נתונות שתי קבוצות:

הממוצע בקבוצה א 100 והשונות 100.

הממוצע בקבוצה ב 500 והשונות 400.

באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

3. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית ( מספר מצברים

במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	ממוצע
15	48	
2	10	סטיית תקן

לפי קריטריון CV. בחר את התשובה הנכונה.

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

**פתרונות:**

**שאלה 2:**

קבוצה 2

**שאלה 1:**

ב. כתה ב

**שאלה 3:**

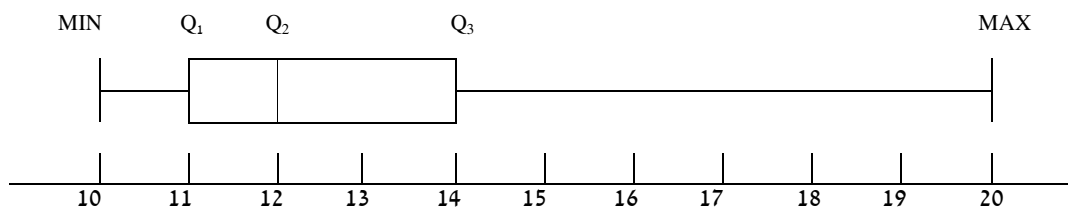
תשובה ב

## פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - boxplot

### רקע:

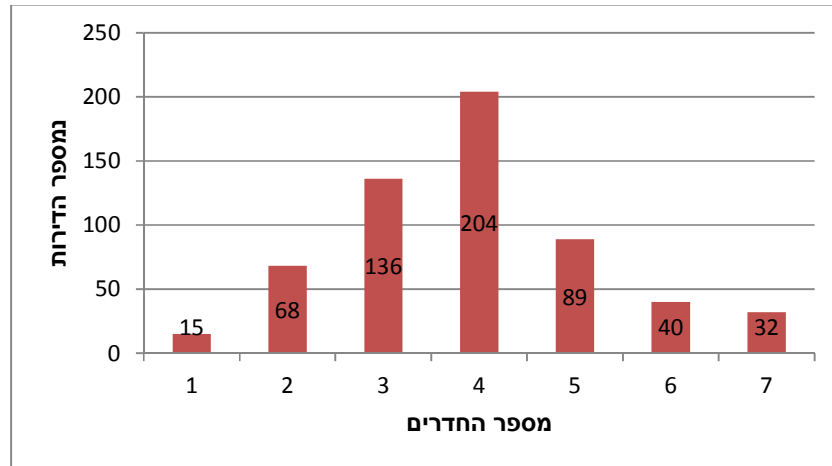
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

1. את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון ( $Q_2$ )
2. את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני)
3. את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית)



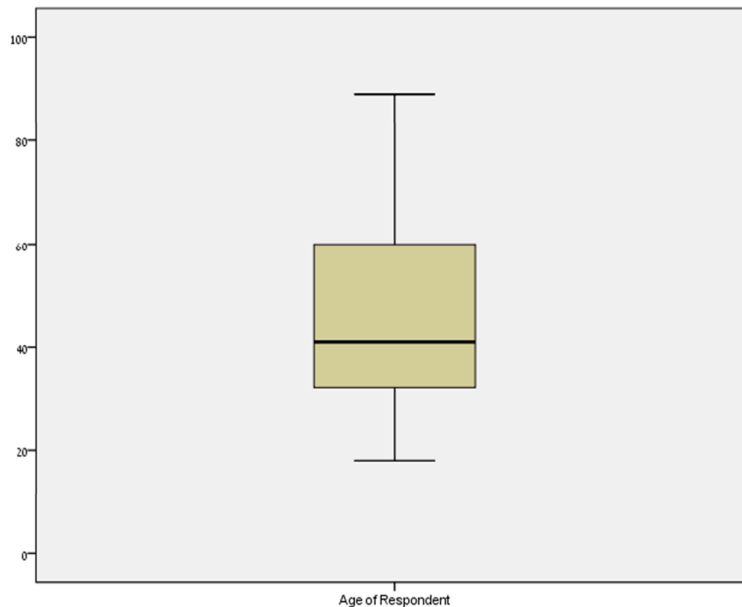
### תרגילים:

1. להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד.



- מצא את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
- שרטט דיאגרמת קופסא להתפלגות.
- מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2. להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל בשנים באוכלוסייה מסוימת:



- מהו בערך הגיל החציוני באותה אוכלוסייה?
- מה בערך טווח הגילאים?
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

**פתרונות:****שאלה 1:**

- א. חציון : 4
- רבעון תחתון : 3
- רבעון עליון : 5
- ג. כמעט סימטרית

**שאלה 2:**

- א. חציון : 40
- ב. טווח : 70
- ג. התפלגות אסימטרית ימנית



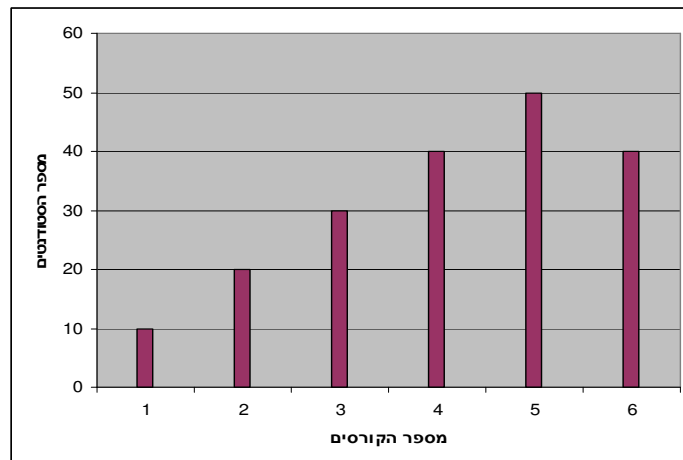
## פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

1. בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם :

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- מהו המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
- מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
- לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3 שגובהו 162 יותר חריג במשקל או בגובה?
- הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן? ( יגדיל יקטין או לא ישנה)

2. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.  
להלן התוצאות שהתקבלו :



- מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- מהי צורת ההתפלגות?
- תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.
- חשב את השכיח, החציון והטווח.

3. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'. השתתפו במחקר 150 תלמידים.

$$\text{ממוצע הציונים שהתקבל: } \bar{X} = 7\frac{1}{15}$$

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.  
 ב. חשב את הציון החציוני, השכיח.  
 ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
- ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
- ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
- i. היסטוגרמה.
- ii. דיאגרמת מקלות.
- iii. דיאגרמת עוגה.
- ד. חשבו את המדדים הבאים:
1. טווח
  2. שכיח
  3. חציון

5. להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים בחברת "סטאר".  
בחברה 200 עובדים.

שכיחות	שכיחות יחסית (פרופורציה)	מספר שעות עבודה
	15%	10-20
	20%	20-30
	30%	30-40
	20%	40-50
		50-60

- א. השלם את הטבלה.
- ב. חשב את החציון, השכיח, והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- ג. מהי סטיית התקן של מס' שעות העבודה?
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- ו. מה ציון התקן של רינה שעובדת 30 שעות בשבוע?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבר.

6. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	מספר המסרונים
40	0-50
60	50-100
50	100-150
30	150-250
20	250-ומעלה

- א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?  
 ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?  
 ג. הוחלט להעניק מתנה עבור  $\frac{1}{4}$  מהלקוחות שמשלמים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?  
 ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן חשב:
1. ממוצע
  2. שכיח
  3. חציון
  4. שונות

7. נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- א. שרטט היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.  
 ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א מהי צורת ההתפלגות?  
 ג. חשב את השכיח והחציון של ההתפלגות.  
 ד. הסבר, ללא חישובים, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8. התפלגות ציוני מבחן אינטיליגנציה היא סימטרית .

מספר הנבחנים	הציון
	50-70
	70-90
	90-100
	100-110
	110-130
	130-150

נתון שהעשירון העליון הוא 130 והרבעון התחתון הוא 90.

נתון שלמבחן נגשו 500 מועמדים.

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש 40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. אם יוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות . כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

9. להלן מספר טענות , עבור כל טענה ציין אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו .

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

**פתרונות:****שאלה 1:**

- א. המשתנה הנחקר כאן הוא משקל תלמיד בק"ג והוא משתנה כמותי רציף.  
ב.

$$\bar{X} = 52$$

$$Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$$

השכיח הוא 58

$$R = 28 \quad \text{ג.}$$

$$s = 10.12$$

- ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.  
ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן .

**שאלה 2:**

- א. מספר הקורסים. בדיד.  
ב. התפלגות אסימטרית שמאלית  
ד. השכיח: 5  
הטווח: 5

**שאלה 3:**

- א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.  
החציון: 7  
השכיח: 8  
ג. השונות: 2.533  
סטיית התקן: 1.592

**שאלה 4:**

- א. 20%  
ב. שביעות רצון (סדר)  
ג. 2  
ד. טווח: 4 שכיח: 2 חציון: 2.5  
ה. חציון: 4

**שאלה 5:**

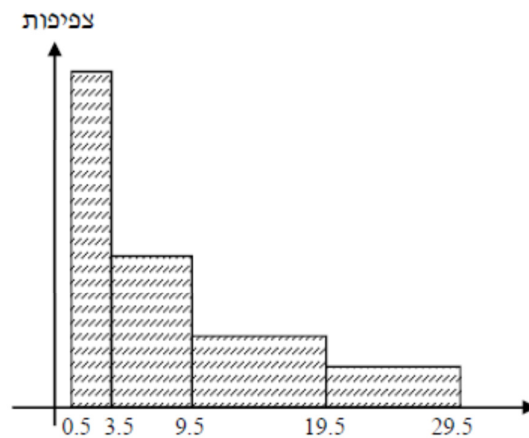
- ב. החציון : 35  
 השכיח : 35  
 הממוצע : 35  
 ג. סטיית תקן : 12.65  
 ד. 53.333  
 ה. 25%  
 ו. -0.395  
 ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל סטיית התקן תקטן.

**שאלה 6:**

- א. 38%  
 ב. 40%  
 ג. 150  
 ד. החציון : 100

**שאלה 7:**

א.



ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית .

ג. שכיח: 2 חציון: 6.83

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים  $Mo < Md < \bar{X} < MR$



**שאלה 8:**

א.

מספר הנבחנים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100

ג. 104

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות אך סטיית התקן לא תשתנה .

**שאלה 9:**

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. לא נכון

ה. לא נכון

ו. נכון

ז. לא נכון

ח. לא נכון

## פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות

### רקע :

**ניסוי מקרי :** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.  
למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם :** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה :  $\{1,2,3,4,5,6\}$ .  
מזג האוויר בעוד שבועיים : { נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך }

**מאורע :** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות :  $A, B, C, \dots$

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$   
לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

**גודל מרחב המדגם :** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה :  $|\Omega| = 6$

**גודל המאורע :** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה :  $|A| = 2$        $|B| = 3$

**מאורע משלים :** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה :  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$        $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

**מרחב מדגם אחיד ( סימטרי ) :** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד :**

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה :  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד :**

יחושב לפי השכיחות היחסית :  $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

**הסתברות למאורע משלים :**

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

**תרגילים:**

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- א. הרכב את כל המילים האפשריות.
- ב. רשום את המקרים למאורע:
- A - במילה נמצאת האות E.
- B - במילה האותיות שונות.
- ג. רשום את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .
2. מטילים זוג קוביות.
- א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
- ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
- A - סכום התוצאות 7.
- C - מכפלת התוצאות 12.
- ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
- ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
- ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
- ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
- ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

**פתרונות:****שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$

**שאלה 3**

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

**שאלה 4**

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

**פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים**

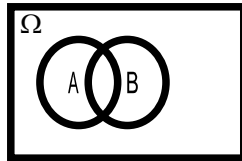
**רקע:**

**פעולת חיתוך:**

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך:

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



$A = \{5, 6\}$  : בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5

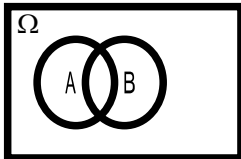
$B = \{2, 4, 6\}$  : לקבל תוצאה זוגית

$$A \cap B = \{6\}$$

**פעולת איחוד:**

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא:  $A \cup B$  נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



$A = \{5, 6\}$  : בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5

$B = \{2, 4, 6\}$  : לקבל תוצאה זוגית

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

דוגמה ( הפתרון נמצא בהקלטה )

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

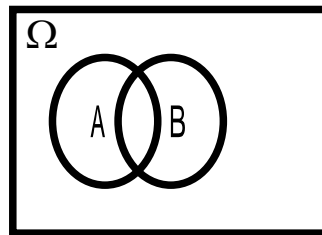
א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?

ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?

ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

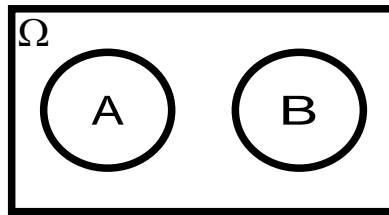


שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

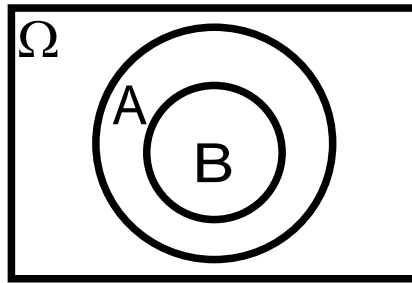
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad : \text{לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad : \text{לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

**תרגילים:**

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :
- E במילה נמצאת האות E.
- F במילה אותיות שונות.
- א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
- ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :
- A לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
- B לעבור את המבחן בכלכלה.
- העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
- ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
- ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
- ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
- ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
- ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
- $A =$
- $B =$
- $\bar{B} =$
- $A \cap B =$
- $A \cup B =$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב-  $\Omega$  את מרחב המדגם וב-  $\phi$  קבוצה ריקה.

נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים:

$A$  = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

$B$  = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים:

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה.  $\bar{A}$

6. נגדיר את המאורעות הבאים :
- A - אדם דובר עברית.
  - B - אדם דובר ערבית.
  - C - אדם דובר אנגלית.
- השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :
- א. אדם דובר את כל שלוש השפות.
  - ב. אדם דובר רק עברית.
  - ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.
  - ד. אדם אינו דובר אנגלית.
  - ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).
7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.
- א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?
  - ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?
  - ג. מה ההסתברות שרק מפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?
8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.
- א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?
  - ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?
  - ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?
9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :
- א. ששתי המניות תעלנה.
  - ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.
  - ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את  $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל-  $P(A \cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א.  $A \cap B = B \cap A$

ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש  $P(A) = 0.3$  ו-  $P(B) = 0.2$

א. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.4$  ?

ב. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.6$  ?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.
- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
- הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20. הוכח:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

21. A ו-B מאורעות במרחב המדגם האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא:  $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$



**פתרונות:****שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

**שאלה 8**

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

**שאלה 9**

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

**שאלה 10**

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

**שאלה 11**

א. כן

ב. 0.3

**שאלה 12**

התשובה הנכונה ג

**שאלה 13**

א. 0.05

ב. 0.95

**שאלה 14**

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

**שאלה 18**

א. 0.19

ב. 0.05

ג. 0.31

ד. 0.46

ה. 0.12

ו. 0.41

ז. 0.59

**פרק 17 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד**

**רקע:**

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.  
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? ( פתרון בהקלטה)

## תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה:
  - נגדיר את המאורעות הבאים: A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
    - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
    - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
    - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
    - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
    - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?
  
2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
  - ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
  - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
  - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
  - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
  - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
  
3. במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
  - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
  - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
  - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
  - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?
  
4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
  - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לתנאים.
  - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
  - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
  - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
  - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
  - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
- הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בכל שלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. אם לאדם יש ויזה , מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי , מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

**פתרונות:****שאלה 1**

- א. 0.833
- ב. 0.9375
- ג. 0.0625
- ד. 0.5
- ה. 0.789

**שאלה 2**

- א. 5%
- ב. 0.0833
- ג. 0.786
- ד. 0.6875

**שאלה 3**

- א. 0.4
- ב.  $\frac{2}{3}$
- ג. 0.25
- ד.  $\frac{6}{7}$

## פרק 18 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

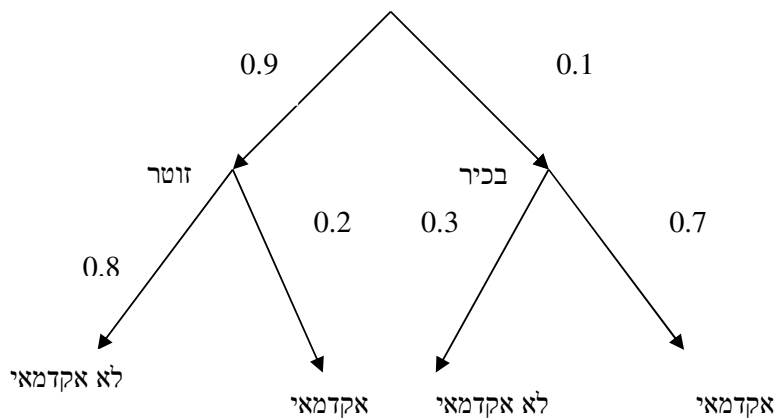
### רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.  
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.  
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף ( רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות )

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

#### נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו,  $A_1, \dots, A_n$  חלוקה ממצה של  $\Omega$ .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{אזי:}$$

#### נוסחת בייס

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

### תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון . מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת , אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
  - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון ?
  - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?
  
2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
  - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
  - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
  - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
  - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
  
3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
  - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
  - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
  
4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי :
  - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
  - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
  - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
  - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?



5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים :

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A,

סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא  $p$ , אם הוא

לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש  $k$  תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

**פתרונות:****שאלה 1**א.  $2/7$ ב.  $23/49$ **שאלה 2**א.  $6\%$ ב.  $58\%$ ג.  $0.241$ ד.  $0.2$ **שאלה 3**א.  $0.544$ ב.  $0.5$ **שאלה 4**א.  $9\%$ ב.  $0.09375$ ג.  $0.9722$ **שאלה 8**א.  $0.0886$ ב.  $0.2889$ ג.  $0.3137$ ד.  $0.8778$ **שאלה 9** $kp$  $1 + (k - 1)p$

## פרק 19 - תלות ואי תלות בין מאורעות

### רקע:

אם מתקיים ש:  $P(B|A) = p(B)$  נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך:  $P(A|B) = p(A)$  כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18 \quad \text{באופן דומה:}$$

### הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**תרגילים:**

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:  $P(A \cup B) = 0.9$ ,  
 $P(A|B) = 0.6$ ,  $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$ . האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

אז:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם  $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$  אזי המאורעות בלתי תלויים.  
 ב. מאורע A כלול במאורע B.  $P(A) > 0$ ,  $0 < p(B) < 1$ , לכן  $p(A/B) < p(A)$ .  
 ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.  
 ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו-B מאורעות זרים.  
 ה.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$  לכן A ו-B מאורעות זרים.

**פתרונות :****שאלה 1**

כן

**שאלה 2**

א. 0.28

ב. 0.18

**שאלה 3**

א. 0.0064

ב. 0.1536

**שאלה 4**

א. 0.5904

ב. 0.9984

**שאלה 8**

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

## פרק 20 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
  - א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
  - ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
  - ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
  - ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
  
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
  - א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
  - ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
  - ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
  - ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו- "יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?
  
3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
  - בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
  - בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
  - בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
  - א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
  - ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?
  - ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?
  - ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?



4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
- ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
- ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
- ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסיה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
- ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
- ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - נבחר אדם מובטל
- B - נבחר גבר
- האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב-B את ההטלה השנייה ראש.
- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
- ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
- ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?  
 ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?  
 ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?  
 2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

**פתרונות:****שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

**שאלה 2**

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

**שאלה 3**

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

**שאלה 4**

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

**שאלה 5**

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

**שאלה 6**

א. 0.65

ב. A ו-B תלויים.

ג. 0.5384

**שאלה 7**

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים.

ד. 1. 0.478

2. 0.15

## פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

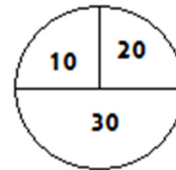
### רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד ( פתרון בהקלטה).

**תרגילים:**

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא:
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
  - 70 משפחות עם מכונית אחת.
  - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
  - 20 משפחות עם 3 מכוניות.
- בוחרים באקראי משפחה מהישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.
- בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
2. מהאותיות C, B, A יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
  - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
  - ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
- כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ- 4 פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי  
כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של A.

**פתרונות****שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

**שאלה 4**

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

**שאלה 5**

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

**שאלה 6**

10

## פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

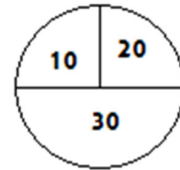
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**תוחלת** – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

**שונות** – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

**סטיית תקן** – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$



**תרגילים:**

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

$X$	-30	0	20	40
$p(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את  $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של  $X$ .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

8	6	4	2	$x$
0.2		0.3		$P(x)$

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את  $V(X)$ .

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים -5, 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

**שאלה 3**

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

**שאלה 4**

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

**שאלה 5**

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

**שאלה 6**

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

## פרק 23 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

### רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. ( כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X$$

### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונויות של הרווח במשחק ?

### פתרון ( בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

**תרגילים:**

1. סטודנט ניגש ל- 5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4.  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-  $E(X) = 4$  ו-  $V(X) = 3$ .  
 $Y$  הינו משתנה מקרי חדש עבורו  $Y = 7 - X$ .  
חשב את:  $E(Y)$  ו-  $V(Y)$ .
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.  
להלן התביעות האפשריות והסתברותן:  
בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).  
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.  
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.  
אחרת אין תביעה בכלל.  
החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.  
נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית באלפי ₪  
א. בנו את פונקצית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.  
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6. יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	$X$
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(x)$

- כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
- השלימו את פונקציית ההסתברות.
  - חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
  - הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

- מצא את ערכו של  $A$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- חשב את  $E(X^3)$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $4 - \frac{X}{2}$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

תוחלת: 14 שונות: 32

**שאלה 2:**

תוחלת: 8 שונות: 12

**שאלה 3:**

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

**שאלה 4:**

תוחלת: 3

שונות: 3

**שאלה 6:**ב.  $V(X) = 1.8275$ **שאלה 7:**א.  $10 = A$ 

$$E(X) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$V(X) = 1$$

$$E(X^3) = 35.4 \quad \text{ג.}$$

$$V(X^3) = 616.84$$

$$E(y) = -2.5 \quad \text{ד.}$$

$$V(y) = 0.25$$

## פרק 24 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

### רקע:

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?





**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת: 9

שונות: 15

**שאלה 3**

תוחלת: 22

סטיית תקן: 5

**שאלה 4**

תוחלת: 90

שונות: 275

**שאלה 5**

$$A = \frac{12}{25} = 0.48$$

א.

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת 2.92n

שונות 1.1136n

**פרק 25 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת**

**רקע:**

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים.

נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית.

בפונקציה שכזו יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית :  $X$  ו  $Y$ .

**דוגמה:**

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.

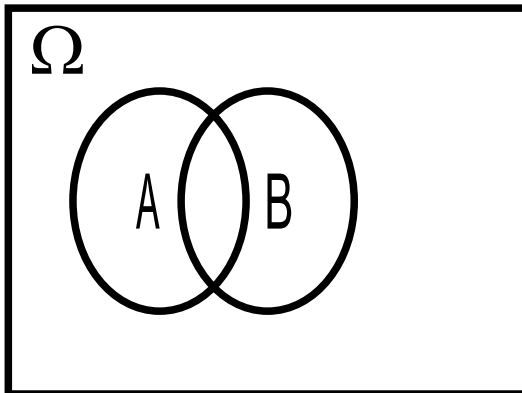
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי  $X$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו  $Y$ .



נחשב את כל ההסתברויות המשותפות :

$$p(x=0, y=0) = 0.05$$

$$p(x=0, y=1) = 0$$

$$p(x=1, y=0) = 0.15$$

$$p(x=1, y=1) = 0.05$$

$$p(x=2, y=0) = 0$$

$$p(x=2, y=1) = 0.75$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

### משתנים בלתי תלויים:

$X$  ו- $Y$  יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  אפשריים התקיים הדבר הבא:

$$p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$$

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

למשל, בדוגמה הזאת:

$$p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2) \cdot p(y=1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$$

ככלל אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים. שאז הרי התנאי לא מתקיים.

אך אם אין אפס בטבלה אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

**תרגילים :**

1. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר . הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 03 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר . אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר , אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ – 3 משחקים. נגדיר את  $X$  להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת  $Y$  מספר המשחקים שהאדם שיחק.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.
- ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?
- ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר , מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2. להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים :

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

- א. השלם את ההסתברויות החסרות בטבלה.
- ב. האם  $X$  ו- $Y$  תלויים ?
- ג. מצא את הסתברות ש- $Y=3$  , אם ידוע ש- $X=1$  .
3. מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא  $1/10$ . מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקורת איכות. יהיו:  $X$  – מספר המוצרים בחבילה,  $Y$  – מספר המוצרים הפגומים בחבילה.
- א. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו 3.
- ב. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו  $K$  כלשהו.
- ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.
- ד. בנה את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4. מתוך כד עם שלושה כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים ללא

החזרה. נגדיר:  $X$  - המספר הקטן מבין השניים;  $Y$  - המספר הגדול מבין השניים.  
א. חשבו את ההתפלגות של  $(X, Y)$ .

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימאלי 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = 4$ . מצאו  $E(X / Y = 4)$ .

5. ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב:

ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב.

ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב.

ל-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.

יהי  $X$  - מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור:

1- אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.

0- אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

**פתרונות:****שאלה 1:**

ב. 2.4

ג. התוחלת 1.348 השונות 0.575

**שאלה 2:**

ב. תלויים

ג. 0.125

**שאלה 4:**

ב. 0.5

ג. תוחלת 2

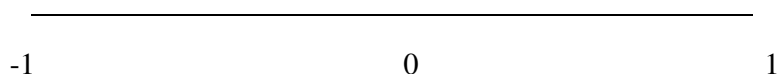
**שאלה 5:**

ג. 0.75

## פרק 26 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

### רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים .  
 על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב -  $\rho$  .  
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1 .



מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה :  $y = ax + b$  .

מתאם חיובי מלא ( מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי ( מקדם מתאם -1) .

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

### חישוב מקדם המתאם :

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} : \text{ הנוסחה של מקדם המתאם היא :}$$

השונויות המשותפת :

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונויות המשותפת :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) .1$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X) .2$$



**משתנים בלתי מתואמים :**

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין בינם התאמה לינארית. משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין בינם קשר ולכן הם גם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

**השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם**

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר בינם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75

יהי  $X$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

נחשב את מקדם המתאם :

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

y	$P_y$
0	0.2
1	0.8

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.  
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y? :

### תרגילים:

1. הסיכוי שסטודנט יעבור את מועד א בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך להיות 0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2. ואז הסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
  - נגדיר את  $X$  להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט.
  - נגדיר את  $Y$  להיות מספר הנבחנים שנכשל בהם.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.
  - ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
  - ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
  - ד. האם המתאם בין  $X$  ל- $Y$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבר ללא חישוב.
  - ה. חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ .
  - ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
  
2. מטילים מטבע שלוש פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות ואת  $Y$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  ואת פונקציית ההסתברות השולית.
  - ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים?
  - ג. מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ . האם המשתנים מתאומים?
  - ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
  - ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
  
3. מפזרים שלוש כדורים שונים בשלושה תאים.
  - נגדיר את המשתנים הבאים:
  - $X$  = מספר הכדורים בתא הראשון.
  - $Y$  = מספר הכדורים בתא השני.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
  - ב. האם המשתנים בלתי מתאומים?

4. מטילים קובייה הוגנת פעמיים.

יהי  $X =$  ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות

$Y =$  מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. חשבו את מקדם המתאם של  $X$  ו- $Y$ .

ג. מצאו את ההתפלגות של  $Y$  בהינתן ש- $X=2$ .

5. בבניין בן 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט

לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים :

$X$  - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.

$Y$  - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ ?

ד. מה יהיה מקדם המתאם :

1. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

2. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון שקלים, כל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון

שקלים. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

**פתרונות :****שאלה 1 :**

ג. 0.994

ה. 0.963

**שאלה 2 :**

ב. תלויים.

ג. מקדם המתאם : 0.5. מתואמים

ד. 0.25

ה. 0.5

**שאלה 3 :**

ב. מתואמים

**שאלה 4 :**

ב. 0.252

**שאלה 5 :**

ב. X ו-Y מתואמים.

ג.  $\frac{2}{3}$ ד. 1.  $-\frac{2}{3}$ 

ד. 2. (-1)

ה.  $-\frac{2}{3}$

## פרק 27 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות

### רקע:

#### תוחלת ושונות של סכום משתנים :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot COV(X, Y)$$

#### תוחלת ושונות של הפרש משתנים :

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot COV(X, Y)$$

#### קומבינציות לינאריות:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים :

$$W = (aX + b) + (cY + d)$$

$$COV[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

עבור שני משתנים מקריים נתון :

$$\mu_X = 80$$

$$\sigma_X = 15$$

$$\mu_Y = 70$$

$$\sigma_Y = 20$$

$$COV(X, Y) = 200$$

- מצא את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- מצא את התוחלת והשונות של  $Y - X$ .
- מצא את השונות ומה התוחלת של המשתנה  $W = 2X + 3Y$

**תרגילים:**

1. נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y\X	1	2	3	P(Y)
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
P(X)				

א. השלם את ההסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשב את השונות המשותפת.

ה. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2. מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100 עם סטיית

תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון

הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק

המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי

ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות

הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3. נתון:  $\text{Var}(X-2Y)=2$  .  $\text{Var}(X+2Y)=3$  . חשבו:  $\text{Cov}(X,Y)$ .

4. מטילים קובייה  $n$  פעמים.

נגדיר את המשתנים הבאים:

$X$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

$Y$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות  $n$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

ב. תלויים

ג. מתואמים.

ד.  $-0.1$ ה. תוחלת:  $4.4$ , שונות:  $0.84$ ו. תוחלת:  $-0.4$ , שונות:  $1.24$ **שאלה 2:**א.  $240$ ב. תוחלת:  $190$  שונות:  $1105$ ג. תוחלת:  $10$  שונות:  $145$ ד. תוחלת:  $1710$  שונות:  $2785$ **שאלה 3:** $-0.125$ **שאלה 4** $\frac{-n}{36}$