תוכן העניינים:

לתשומת לבך, יש ללמוד לפי הסרטונים באתר. ייתכנו שאלות בספר הפרק אשר אינן חלק מחומר הלימוד שלך.

משתנה מקרי דו ממדי רציף

רקע:

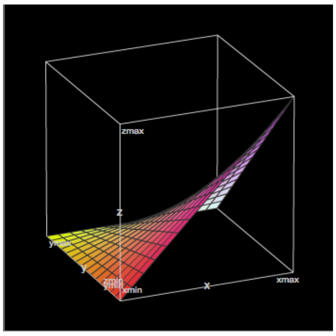
יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1) $f(x,y)\ge 0$ לכל $(x,y)\in R$.
2) $\iint_R f(x,y)\,dxdy=1$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.



פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא: $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$.

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא: $f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו לפונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$
את פונקציית הצפיפות השולית של X, וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y, המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}.$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X ו- Y יהיו בתחום הזה: $P[(x,y)\in A]=\iint_A f(x,y)dxdy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

חשבו את הסיכוי $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f(x,y)dxdy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\bigcap Y<0.5)$.

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש $Y=y$ לכל ערכי y המקיימים $f(y)>0$ על ידי: $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}$.

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש $X=x$ לכל ערכי x המקיימים $f(x)>0$ על ידי: $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את $f(x|y)$.

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של X בהינתן ש- $Y=y$ תהיה: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x|y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X=x$ תהיה:

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y|x)dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את $E(X|Y)$.

שאלות:

1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$, המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 1$ וגם $0\le y\le 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.

2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$, המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 2$ וגם $-x\le y\le x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A.

3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 1$ וגם $0\le y\le 1$.

א. מצאו את ערכו של C.

ב. מצאו את $f(y)$.

ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו $60\le x\le y$ וגם $60\le y\le 100$.

א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

ג. חשבו את $E(X)$, $V(X)$.

ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X+10)$.

5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:
$f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y?

ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X)$.

6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע $[2,4]$.

בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \le x \le y$, $f(x|y)=\frac{2x}{y^2}$.

מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y.

7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y. פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא: $f(x,y)=\begin{cases} x & 0<y<1 \quad 1-y \le x \le 1+y \\ 0 & else \end{cases}$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. מצאו את $f(y|x)$.

ג. מצאו את $E(Y|X)$.

8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y.

ג. חשבו את התוחלת של X ו- Y.

ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?

ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

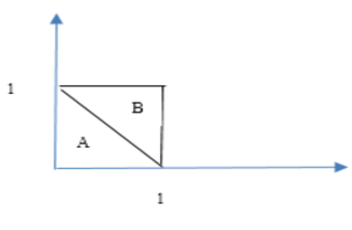
9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:

הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.

האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?

א. מצאו את $f(x)$.

ב. מצאו את $f(x|y)$.



10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת $f(x,y)=cx$. פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו $0 \le x \le 1$ וכן $0 \le y \le x^2$.

א. מצאו את הקבוע C.

ב. חשבו את ההסתברות ש $6Y<1-X$.

11) נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$
ו- $X \mid Y = y \sim U\left(0,\sqrt{y}\right)$. חשבו את $E(Y \mid X = 0.5)$.

12) נתונה פונקציית הצפיפות $f(x,y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$ בתחום שבו $x, y \geq 0$.
חשבו את הסיכוי $P(X < Y)$.

13) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את $P(X > 1 \mid Y = 2)$.

14) יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.
נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

15) נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y,1)$ ו- $Y \sim U(0,2)$.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y.
ב. מצאו את $E\left(X^2 \mid Y\right)$.
ג. מצאו את $E(X)$.

16) פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x,y) = 1$.
פונקציה זו מוגדרת בתחומי $0 \leq x, y \leq 1$.
הוכיחו ש: $E\left(|X - Y|^n\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

17) $X \sim \exp(1)$ וכן $Y \sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.
נגדיר את $Z = \frac{X}{X+Y}$.
הוכיחו: $Z \sim U(0,1)$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה

2) $A=\frac{1}{8}$

3) א. $\frac{5}{16}$ ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$ ג. תלויים

4) א. הוכחה ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$ ג. $E(X)=73\frac{1}{3}\ ,\ V(X)=88\frac{8}{9}$
ד. לא ה. 0.5 ו. 0.5625

5) א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ ,\ f(y)=\mu e^{-\mu y}$ ב. לא ג. 0 ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

6) $\frac{2}{9}$

7) א. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$ ב. $f(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1 \\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1 \\ 0 & else \end{cases}$

ג. $E(y|x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$

8) א. $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 1+x<y<1-x \quad -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$

ב. $f(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$ $f(y)=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ 2-y & 1\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$

ג. $E(Y)=1\ ,\ E(X)=-\frac{2}{3}$ ד. כן ה. לא

9) א. כן

ב. $f(x)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$

ג. $f(x|y)=\begin{cases}\frac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

10) א. 4 ב. 0.0947

11) $\frac{7}{12}$

12) $\frac{1}{3}$

13) $e^{-\frac{1}{2}}$

14) $\frac{25}{72}$

15) א. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$

ב. y^2+1 ג. 1

16) הוכחה

17) הוכחה