

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תוכן עניינים

4	פרק 1 – חזרה אלגברית
4	חזקות ומשוואות מעריכיות
5	לוגריתמים
8	פתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה
8	חילוק פולינומים
10	אי-שוויונים
11	פרק 2 – פונקציות
11	פונקציות
11	פונקציה חד-חד ערכית ופונקציה הפוכה
12	הרכבת פונקציות
13	פרק 3 – גבולות
13	הסבר כללי
13	חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה
13	חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום
14	חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד
14	חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף
16	חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף
17	חישוב הגבול של אוילר
18	חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה
19	פרק 4 – רציפות
19	רציפות
20	משפט ערך הביניים
22	פרק 5 – חישוב נגזרת של פונקציה
22	כללי הגזירה
22	נגזרת של פונקציה רציונלית
23	נגזרת של פונקציה מעריכית
24	נגזרת של פונקציה לוגריתמית
26	נגזרת של פונקציה x בחזקת פונקציה של x
27	נגזרת לפי הגדרה
28	פרק 6 – כלל לופיטל
28	כלל לופיטל – $0/0$
29	כלל לופיטל – $0 \cdot \infty$
30	כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו
30	כלל לופיטל – $\infty - \infty$
31	פרק 7 – חקירת פונקציה

31.....	שלבי חקירת פונקציה.....
31.....	חקירת פולינום.....
32.....	חקירת פונקציה רציונלית.....
34.....	חקירת פונקציה מעריכית.....
36.....	חקירת פונקציה לוגריתמית.....
39.....	חקירת פונקציה עם שורשים.....
41.....	קיצון מוחלט.....
42	פרק 8 – שימושי הנגזרת.....
42.....	נוסחת הקירוב הלינארי.....
42.....	גמישות הביקוש.....
43.....	בעיות קיצון כלכליות.....
46.....	בעיות קיצון מסוגים שונים.....
48	פרק 9 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים.....
48.....	עקומות שוות ערך.....
49.....	נגזרות חלקיות.....
50	פרק 10 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה).....
52.....	פתרונות.....
53	פרק 11 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג').....
53.....	פונקציות של שני משתנים.....
55.....	פתרונות.....

פרק 1 – חזרה אלגברית

חזקות ומשוואות מעריכיות

1. בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.

2. חשב ללא מחשבון:

$$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} \quad \text{א.}$$

$$2^3 + 2^5 \quad \text{ד.}$$

3. פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \quad \text{א.}$$

4. פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \quad \text{א.}$$

5. בסרטון זה הסבר על חוקי השורשים.

$$\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} \quad \text{6. חשב ללא מחשבון:}$$

7. בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.

פתור את המשוואות הבאות:

$$2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \quad \text{ב.}$$

$$3^{5x-3} = 3^{3x+7} \quad \text{א.}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad \text{9.}$$

$$(25 \cdot 0.2^{2x}) = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad \text{8.}$$

$$e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad .10$$

.11 **בסרטון זה הסבר משוואות עם חיבור וחסור.**

פתור את המשוואות הבאות:

ב. $e^x + 2e^x = 3e^4$

א. $2^x + 2^x = 16$

.12 פתור את המשוואות הבאות:

ב. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

א. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

פתרונות

(2) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40 (3) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k (4) א. $3\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{x} + x$ (6) $\sqrt{2}$ (7) א. x=5

ב. x=1 (8) x=1 (9) $x = -\frac{1}{2}$ (10) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{6}$ (11) א. x=3 ב. x=4 (12) א. x=4 ב.

x=1

לוגריתמים

.1 בסרטון זה הסבר על לוגריתמים.

.2 בסרטון זה המשך ההסבר על לוגריתמים.

.3 חשב ללא מחשבון:

ג. $\log_{25} 5$

ב. $\log 1000$

א. $\log_2 32$

ו. $\log_a a^4$

ה. $\log_4 \frac{1}{16}$

ד. $\log_8 4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

.4 בסרטון זה הסבר על מהו \ln .

.5 חשב ללא מחשבון:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

6. מצא את ערכו של x :

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$ ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$
 ד. $\log_x 64 = 3$ ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$
 ז. $\ln x = 2$ ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

7. בסרטון זה הסבר על חוקי הלוגריתמים.

8. חשב ללא מחשבון:

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ ב. $2 \log 2 + \log 25$ ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3 \log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$

9. חשב ללא מחשבון:

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$ ג. $e^{\ln 3}$
 ד. $e^{2 \ln 3}$

10. פתור את המשוואות הבאות:

1. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$ 2. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

11. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$ ב. $\log_5 (25^x - 20) = x$ ג. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

12. פתור את המשוואות הבאות:

א. $2^x = 5$ ב. $5^x = 8$ ג. $e^x = 2$
 ד. $e^x = \frac{1}{2}$ ה. $e^x = -1$

פתרונות

- (3) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2 ו. 4 ז. -1.5 (5) א. 2 ב. -4 ג. -1.5 (6) א. $\frac{1}{2}$
- ב. 65,536 ג. 27 ד. 4 ה. 5 ו. 4 ז. e^2 ח. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (8) א. 2 ב. 2 ג. 3 (9) א. 8 ב. 25
- ג. 3 ד. 9 (10) א. 3 ב. 3 (11) א. ± 3 ב. 1 ג. 0 (12) א. 2.322 ב. 1.292 ג. 0.693 ד. -0.693

פתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad .2$$

$$5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad .1$$

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad .4$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad .3$$

פתרונות

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2} \quad (4) \quad x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} \quad (3) \quad x = \pm 1 \quad (2) \quad x = \pm 1 \quad (1)$$

חילוק פולינומים

1. בסרטון זה הסבר על חילוק פולינומים.

2. בסרטון זה המשך ההסבר על חילוק פולינומים.

$$\text{פתור את התרגיל הבא: } \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$$

פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad .5 \quad \frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad .4 \quad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad .3$$

פתרונות

$$4x + 9 \quad (5) \quad 4x^2 + 10x + 1 \quad (4) \quad x^2 + 1 \quad (3) \quad x^2 + x + 1 \quad (2)$$

אי-שוויונים

1. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון ממעלה ראשונה.

2. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון ממעלה שנייה ורציונלי.

3. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון מעריכי.

4. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון לוגריתמי.

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$.6 \quad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad .5 \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$.8 \quad \frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad .7 \quad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$$

$$.10 \quad x^2 < 144 \quad .9 \quad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$$

$$.12 \quad (x+2)(x+4) < 35 \quad .11 \quad x^2 - 12x > -32$$

$$.14 \quad (x-3)(x-7) \geq 8x-56 \quad .13 \quad -x^2 + 13x + 30 < 0$$

פתרונות

(5) $x \leq -4$ (6) $x < 5$ (7) $x \geq 12$ (8) $x > -13$ (9) אף x (10) $-1 < x < 1$
(11) $x > 8$ או $x > 4$ (12) $-9 < x < 3$ (13) $x > 15$ או $x < -2$ (14) $x \geq 11$ או $x \leq 7$

פרק 2 – פונקציות

פונקציות

1. בסרטון זה הסבר על הגדרת הפונקציה ופונקציות נפוצות.
2. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של פונקציה.
3. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של פונקצית שורש.
4. בסרטון זה הסבר על הפונקציה המעריכית.
5. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של הפונקציה המעריכית.
6. בסרטון זה הסבר על הפונקציה הלוגריתמית.
7. בסרטון זה הסבר על תחום ההגדרה של הפונקציה הלוגריתמית.
8. בסרטון זה הסבר על פונקציה מפוצלת.

פונקציה חד-חד ערכית ופונקציה הפוכה

1. בסרטון זה הסבר על פונקציה זוגית, אי-זוגית וכללית.
2. בסרטון זה הסבר על פונקציה הפוכה.
3. הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה.
בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{3}$.
4. הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה.
בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{x}$.
5. הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה.
בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$.

6. הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה.
 בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה $f(x) = x^2 - 4$ ($x \geq 0$).

פתרונות

$$y \neq 3, f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (5) \quad y \neq 1, f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (4) \quad y \text{ כל}, f^{-1}(x) = 3x+1 \quad (3)$$

$$y \geq -4, f^{-1}(x) = \sqrt{4+x} \quad (6)$$

הרכבת פונקציות

1. בסרטון זה הסבר על הרכבת פונקציות.
2. בסרטון זה הסבר המשך על הרכבת פונקציות.
3. נתונות הפונקציות $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$, $g(x) = e^{4x}$.
 פתור את המשוואה $f(g(x)) = 0$.
4. נתונות הפונקציות $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = e^x$.
 פתור את המשוואה $g(f(x)) = 5$.
5. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{1-2x}{x+k}$.
 באיזה ערך של הקבוע k מתקיים $f(g(x)) = x$.

פתרונות

$$k = -1 \quad (5) \quad x = \pm 2 \quad (4) \quad x = \frac{1}{4} \quad (3)$$

פרק 3 – גבולות

הסבר כללי

- בסרטון זה הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה

- בסרטון זה תוסבר טכניקת הצבה לחישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום

- בסרטון זה תוסבר טכניקת צמצום לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 2x + 3} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .15$$

פתרונות

- (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -1.5 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{5}{6}$ (6) $\frac{7}{7}$ (7) $\frac{2}{3}$ (8) $\frac{10}{8.5}$ (9) $-\frac{13}{4}$ (10) 3 (11) 32 (12) $\frac{8}{17}$ (13) $n-1$ (14) 6 (15) 27

חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד

- בסרטון זה תוסבר טכניקת כפל בצמוד לחישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} & .4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & .6 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & .8 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} & .10 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & .5 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} & .7 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} & .9 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} & .11 \end{array}$$

פתרונות

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{1}{12} \quad (5) 1 \quad (6) \frac{2}{3} \quad (7) \frac{3}{8} \quad (8) \frac{1}{6} \quad (9) \frac{3}{4} \quad (10) -\frac{13}{4} \quad (11) \frac{1}{3}$$

חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x & .4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x & .6 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x & .3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x & .5 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x}} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1} \quad .16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{5x^4 + x^3} \quad .15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad .21$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad .23$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{3x - 1} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 3}}{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{5x - 1}} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 7^x}{-2^x + 7^{x-1}} \quad .31$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .33$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad .40$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad .39$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad .42$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad .41$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x) \quad .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad .43$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x) \quad .46$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x \quad .45$$

פתרונות

- 0 (13) $-\infty$ (12) 4 (11) 0 (10) 0 (9) 1 (8) 1 (7) ∞ (6) 0 (5) 0 (4) ∞ (3) 0 (2) 0 (1)
 -2 (24) $\frac{3}{2}$ (23) -3 (22) -1 (21) 1 (20) $-\frac{1}{3}$ (19) $\frac{2}{5}$ (18) $\frac{1}{2}$ (17) 0 (16) 0 (15) -5 (14)
 4 (34) $-\frac{1}{2}$ (33) 1 (32) -10 (31) $\frac{1}{9}$ (30) 4 (29) 0 (28) $\frac{1}{4}$ (27) $-\frac{1}{3}$ (26) $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (25)
 $\frac{1}{2}$ (42) $-\frac{1}{2}$ (41) $\frac{1}{2}$ (40) $\frac{k}{2}$ (39) 2.5 (38) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{\frac{a}{b}}, 0, \infty, -\infty$ (37) $\frac{1}{3}$ (36) $\ln 3$ (35)
 $-\frac{1}{4}$ (46) ∞ (45) 1 (44) $\frac{a-b}{2}$ (43)

חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 19876^{\frac{1}{x}} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 7^{\frac{1}{x}} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad .8 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad .10 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .12 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .13$$

$$.14 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x + k}{x^2 - 4} = \text{נתון: מספר סופי}$$

חשב את k ואת ערך הגבול.

פתרונות

- (1 ∞ (2 0 (3 ∞ (4 $-\infty$ (5 $-\infty$ (6 לא קיים גבול (7 $-\infty$ (8 ∞ (9 ∞ (10 לא קיים גבול (11 $\frac{11}{4}$, $k = -10$ (12 1 (13 לא קיים גבול (14

חישוב הגבול של אוילר

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי נוסחת אוילר

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad .2 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad .4 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad .6 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad .8 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad .9$$

פתרונות

$$e \quad (9) \quad e \quad (8) \quad e^{30} \quad (7) \quad e^{-12} \quad (6) \quad e^3 \quad (5) \quad \frac{1}{e} \quad (4) \quad e^2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{e} \quad (1)$$

חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14$.

2. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$.

3. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$.

4. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1}$.

5. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$.

6. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$.

7. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

8. הוכח על פי הגדרת הגבול כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$.

פתרונות

$$\delta = \min\{1, 10\varepsilon\} \quad (4) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad (3) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} \quad (2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{7} \quad (1)$$

$$\delta = \left| \frac{1}{M} \right|, \quad \frac{1}{x^2-1} < M \quad (7) \quad \delta = \varepsilon \quad (6) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} \quad (5)$$

פרק 4 – רציפות

רציפות

• בסרטון זה הסבר כללי על פונקציה רציפה.

בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודות התפר" שלהן. בסיום, שרטט את גרף הפונקציה.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad .2 \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad .1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \quad .3 \quad \text{בדוק את רציפות הפונקציה הבאה ב"נקודות התפר" שלה:}$$

.4 מה צריך להיות ערכו של הקבוע k על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases}$$

.5 מה צריך להיות ערכו של הקבוע k על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 2 \end{cases}$$

.6 מה צריך להיות ערכו של הקבוע k על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$$

.7 מה צריך להיות ערכו של הקבוע k על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases}$$

.8 מה צריך להיות ערכם של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases}$$

9. מה צריך להיות ערכם של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{\frac{1}{2^x} - 2}{\frac{1}{2^x} + 4} & x < 0 \end{cases}$$

10. מה צריך להיות ערכם של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בתחום הגדרתה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 = b & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases}$$

פתרונות

- (1) f רציפה בנקודה $x=2$ (2) f רציפה בנקודה $x=1$ (3) f רציפה בנקודה $x=1$, אינה רציפה בנקודה $x=2$ (4) $k=1$ (5) $k=4$ (6) $k=\frac{2}{3}$ (7) $k=-1$ (8) $a=1, b=2$ או $a=2, b=1$ (9) $a=-\frac{2}{e}, b=\frac{1}{e}$ (10) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$

משפט ערך הביניים

• בסרטון זה הסבר על משפט ערך הביניים.

1. הוכח שלמשוואה הבאה יש לפחות פתרון אחד: $x^3 + 4x - 1 = 0$.

2. הוכח שלמשוואה הבאה יש לפחות פתרון אחד: $x^2 = -\ln x$.

3. הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

4. הוכח שלמשוואה הבאה יש לפחות שני פתרונות: $e^x - 5x = 0$.

5. הוכח שלמשוואה הבאה יש לפחות שני פתרונות: $4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$.

6. מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

7. נגדיר $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$.

א. חשב $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע

$(0,2)$?

פתרונות

6 (7) א. $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. ב. לא ניתן להסיק.

פרק 5 – חישוב נגזרת של פונקציה

כללי הגזירה

1. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה.
2. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע כפול פונקציה.
3. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע.
4. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של סכום והפרש.
5. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה מורכבת.
6. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של $\frac{1}{x}$.
7. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מכפלה.
8. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מנה.
9. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של \sqrt{x} .
10. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקציה עם פרמטר.

נגזרת של פונקציה רציונלית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של מנה

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} & 1. \quad f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \right)' \quad 2. \quad f'(x) = \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \right)' \quad 3. \quad f'(x) = \left(\frac{2x^2}{(x+1)^2} \right)' \\ & 4. \quad f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right)' \quad 5. \quad f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} \right)' \quad 6. \quad f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \right)' \end{aligned}$$

פתרונות

$$(1) \frac{4}{x^3} \quad (2) \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (3) \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (4) \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (5) \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (6) \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^3} \quad 12$$

נגזרת של פונקציה מעריכית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה מעריכית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = e^{\sin x}$ ד. $f(x) = 2^{3x}$

ה. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5. גזור את הפונקציה $f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$

6. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)'$

ב. $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right)\right)'$

7. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left(x \cdot e^{-2x^2}\right)'$

ב. $f'(x) = \left(e^{-2x^2} (1 - 4x^2)\right)'$

פתרונות

א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $\cos x \cdot e^{\sin x}$ ד. $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$
 ה. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$ א. $e^x(1+x)$ ב. $2x \cdot e^{4x}(1+2x)$ א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$
 ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{(e^{2x}-e^{-2x})}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ א. $e^x \left(\frac{1+2x}{x^4} \right)$
 א. $e^x \left(\frac{x^2-x-2}{x^2} \right)$ ב. $e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4} \right)$ א. $e^{-2x^2}(1-4x^2)$ ב. $-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

נגזרת של פונקציה לוגריתמית

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה לוגריתמית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1)$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x$

ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

ב. $f'(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)'$

5. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'$

ב. $f'(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}\right)'$

6. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = (x \cdot \ln x)'$

ב. $f'(x) = (\ln x + 1)'$

7. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = (x^2 \ln x)'$

ב. $f'(x) = (x \cdot (2 \ln x + 1))'$

8. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (x < 2)$

ב. $f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \ln(2-x)\right)'$

ג. $f'(x) = \left(\frac{1}{4-2x}\right)'$

9. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 32\right)'$

ב. $f'(x) = \left(\frac{2 \ln x + 2}{x}\right)'$

10. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((\ln x)^2 + (\ln x)^{-2}\right)'$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} [\ln x - (\ln x)^{-3}] \right)' \quad \text{ב.}$$

פתרונות

$$\frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{ד.} \quad \frac{-2}{(x+1)(x-1)} \quad \text{ג.} \quad \frac{2x-3}{x^2-3x} \quad \text{ב.} \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} \quad \text{ד.} \quad (3x+1) \left(6\ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \quad \text{ב.} \quad \ln x + 1 \quad \text{א.} \quad (2) \quad \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \quad \text{ג.} \quad -\tan x \quad \text{ה.}$$

$$\frac{3\ln^2 x}{x} \quad \text{א.} \quad (3) \quad \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \quad \text{ה.} \quad \frac{4}{x(\ln x+2)^2}$$

$$\frac{2\ln x-3}{x^3} \quad \text{ב.} \quad \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \text{א.} \quad (4) \quad \frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3} \quad \text{ד.} \quad 2x \ln x (\ln x+1) \quad \text{ג.} \quad \frac{6\ln x}{x} \quad \text{ב.}$$

$$2\ln x+3 \quad \text{ב.} \quad x \cdot (2\ln x+1) \quad \text{א.} \quad (7) \quad \frac{1}{x} \quad \text{ב.} \quad \ln x+1 \quad \text{א.} \quad (6) \quad \frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}} \quad \text{ב.} \quad \frac{2-\ln x}{2x^{1.5}} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{-2\ln x}{x^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{x} (\ln x+1) \quad \text{א.} \quad (9) \quad \frac{2}{(4-2x)^2} \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{2(2-x)} \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$-\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right] \quad \text{א.} \quad (10)$$

נגזרת של פונקציה של x בחזקת פונקציה של x

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של x בחזקת פונקציה של x

גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = x^{\frac{x}{2}} \quad .2$$

$$y = x^{x^2} \quad .1$$

$$y = (\ln x)^{4x} \quad .4$$

$$y = (x+1)e^x \quad .3$$

$$y = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad .6$$

$$y = x^{ax} \quad .5$$

פתרונות

$$y' = e^x (x+1)^{e^x} \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] \quad (3) \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} [\ln x + 1] \quad (2) \quad y' = x^{x^2} [2x \cdot \ln x + x] \quad (1)$$

$$y' = ax^{ax} [\ln x + 1] \quad (5) \quad y' = 4(\ln x)^{4x} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \quad (4)$$

$$y' = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x+1-k) + \frac{1}{x+1-k} \cdot \sqrt{x} \right] \quad (6)$$

נגזרת לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הנגזרת, את נגזרת הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

2. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

3. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x+10}$.

4. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת: $y = 2x^2 - 3$.

5. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת: $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 1.5$.

6. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln x$.

7. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = e^x$.

פתרונות

$$e^x \quad (7) \quad \frac{1}{x} \quad (6) \quad 2x + \frac{1}{2} \quad (5) \quad 4x \quad (4) \quad \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (3) \quad -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad 2x + 4 \quad (1)$$

פרק 6 – כלל לופיטל

כלל לופיטל – 0/0

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\frac{0}{0}$.

מצא את הגבולות הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^5 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad .2$ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad .1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad .4$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .3$ |
| $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad .6$ | $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad .5$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad .8$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad .7$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad .10$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad .9$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad .12$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad .11$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad .14$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad .13$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2} \quad .16$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad .15$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad .18$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad .17$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad .20$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad .19$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{20}}{e^x} \quad .22$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad .21$ |

23. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 2} = 4$. מצא את הקבועים a ו- b .

24. נתון כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$. מצא את הקבועים a ו- b .

25. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2e^{a+2x} + bx}{1 - x^2} = 3e$. מצא את הקבועים a ו- b .

פתרונות

- (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{20}{17}$ (3) $n-1$ (4) 4 (5) $\frac{1}{6}$ (6) $\frac{3}{2}$ (7) $\frac{5}{6}$ (8) $-\frac{3}{2}$ (9) 1 (10) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (11) $\frac{1}{2}$ (12) $\frac{1}{6}$ (13) 0
- (14) $-\frac{1}{2}$ (15) 2 (16) 1 (17) 2 (18) $\frac{1}{2}$ (19) $-\infty$ (20) 0 (21) 0 (22) 0
- (23) $a = 1.5, b = 4$ (24) $a = 12, b = -32$ (25) $a = 3 + \ln\frac{6}{5}, b = \frac{6}{5}e$

כלל לופיטל - $0 \cdot \infty$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $0 \cdot \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$
5. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3)$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right]$

פתרונות

- (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) 0 (7) $\frac{5}{2}$

כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג משהו בחזקת משהו.

מצא את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{x-1} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad .3$$

פתרונות

$$e^2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad e \quad (1)$$

כלל לופיטל – $\infty - \infty$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\infty - \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad .3$$

פתרונות

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

פרק 7 – חקירת פונקציה

שלבי חקירת פונקציה

1. בסרטון זה הסבר על נקודות קיצון.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות קיצון.
3. בסרטון זה הסבר על נקודות פיתול.
4. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות פיתול.
5. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה אנכית.
6. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה משופעת.

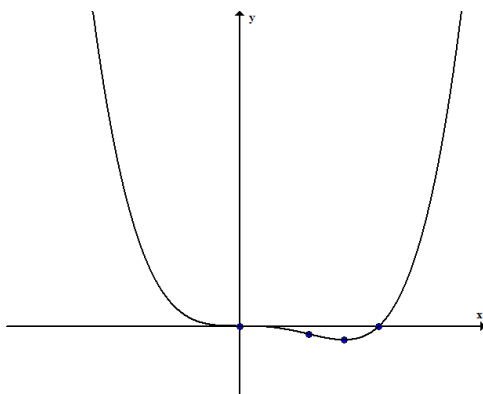
חקירת פולינום

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x(x-9)^2$.
2. חקור את הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^3$.

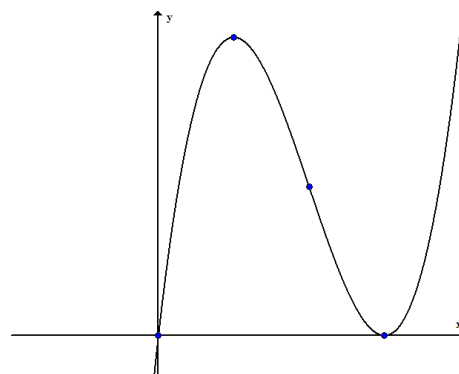
פתרונות

- (1) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(9,0)$, נקודות קיצון: $max(3,108)$, $min(9,0)$, תחומי עליה: $x < 3$ או $x > 9$, תחום ירידה: $3 < x < 9$, נקודת פיתול: $(6,54)$, תחום קמירות: $x > 6$, תחום קעירות: $x < 6$. (2) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(2,0)$, נקודות קיצון: $min\left(1.5, -\frac{27}{16}\right)$, תחום עליה: $x > 1.5$, תחום ירידה: $x < 1.5$, נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$, תחומי קמירות: $x > 1$ או $x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < 1$.

(2)



(1)



חקירת פונקציה רציונלית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$.

6. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$.

פתרונות

- 1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(2, 0.25)$, תחום עליה: $0 < x < 2$, תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2$, נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x > 3$, תחום קעירות: $x < 0$ או $0 < x < 3$. 2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=2$, נקודת קיצון: $\min(0,0)$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 0$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$, נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x < -1$ או $-1 < x < \frac{1}{2}$, תחום קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- 3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 2$, זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x = \pm 2$, $y = x$, נקודת קיצון: $\max(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, $\min(\sqrt{12}, \sqrt{27})$, תחום עליה:

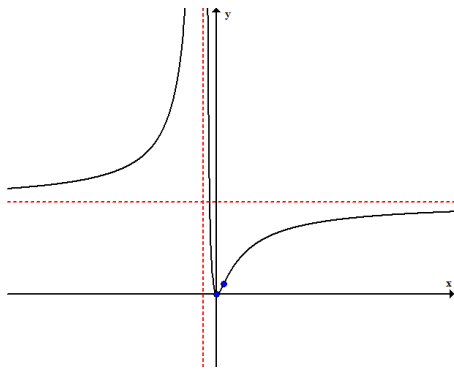
$x < -\sqrt{12}$ או $x > \sqrt{12}$, תחום ירידה: $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$, נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $-2 < x < 0$ או $x > 2$, תחום קעירות: $x < -2$ או $0 < x < 2$.

(4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x = -1$, $y = x - 2$, נקודת קיצון: $\max\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$, תחום עליה: $x < -3$ או $x > -1$, תחום ירידה: $-3 < x < -1$, נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $x > 0$, תחום קעירות: $x < -1$ או $-1 < x < 0$.

(5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-1)$, $(-1,0)$, אסימפטוטות: $x = 1$, $y = 1$, אין נקודות קיצון, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$, תחום קמירות: $-3 < x < -1$ ו- $x > 1$, תחום קעירות: $x < -3$ או $-1 < x < 1$.

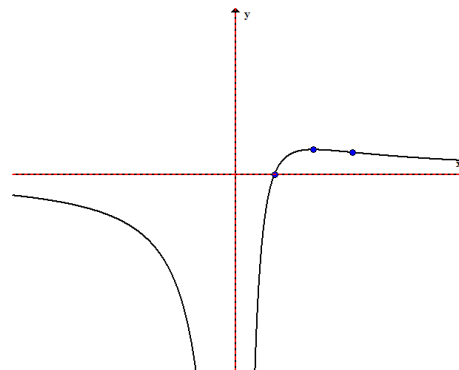
(6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 1$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x = -1$, חור בנקודה $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, נקודת קיצון: $\min(0,0), \max(-2,-4)$, תחום עליה: $x < -2$ או $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $-2 < x < -1$ או $-1 < x < 0$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: $-1 < x < 1$ או $x > 1$, תחום קעירות: $x < -1$.

(2)

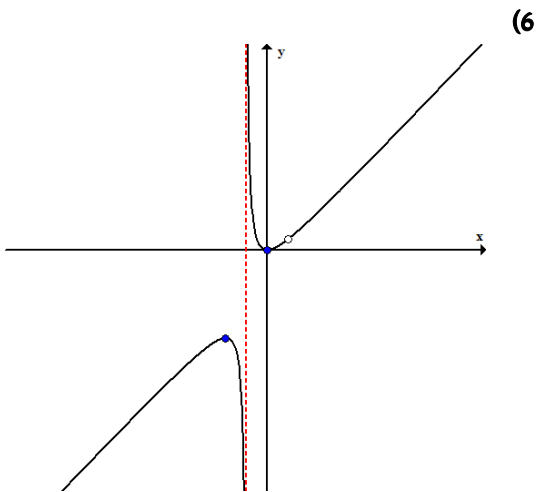
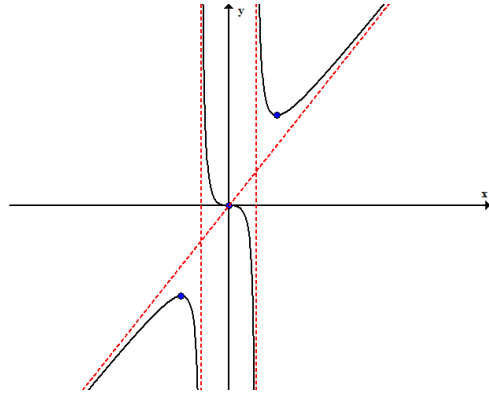
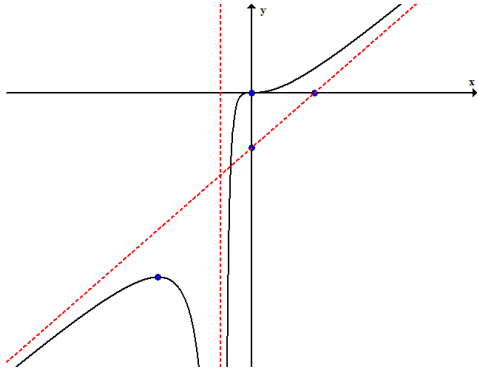


(4)

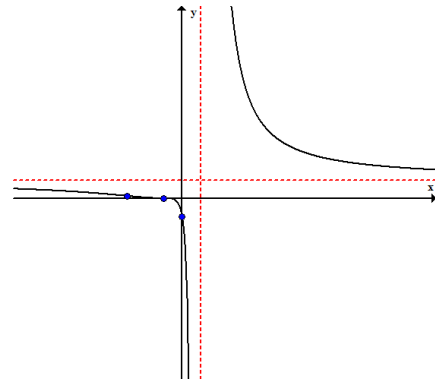
(1)



(3)



(6)



(5)

חקירת פונקציה מעריכית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x - e^x$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

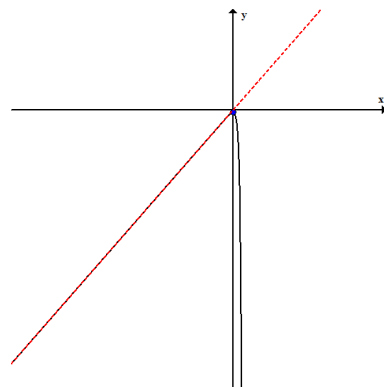
4. חקור את הפונקציה $f(x) = xe^{-2x^2}$.

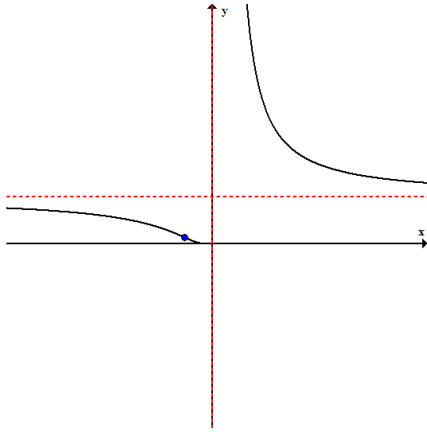
פתרונות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, -1)$, אסימפטוטות: $y = x$, נקודת קיצון: $\max(0, -1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, אין נקודות פיתול, תחום קעירות: כל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: אין, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 1$, נקודת קיצון: אין, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$, תחום קמירות: $-0.5 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-2, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = x + 3$, נקודת קיצון: $\min(2, 4e^{1/2}), \max(-1, e^{-1})$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 2$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 2$, נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$, תחום קמירות: $-0.4 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, 0)$, אסימפטוטות: $y = 0$, נקודת קיצון: $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, תחום עליה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, תחום ירידה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > \frac{1}{2}$, נקודת פיתול: $(0, 0), (-\sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}e^{-3/2}), (\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}e^{-3/2})$, תחום קמירות: $-\sqrt{3/4} < x < 0$ או $x > \sqrt{3/4}$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{3/4}$ או $x < -\sqrt{3/4}$.

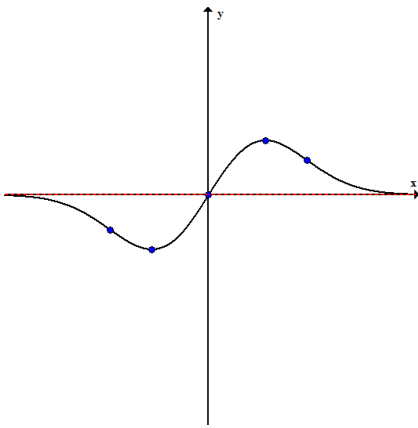
(2)

(1)

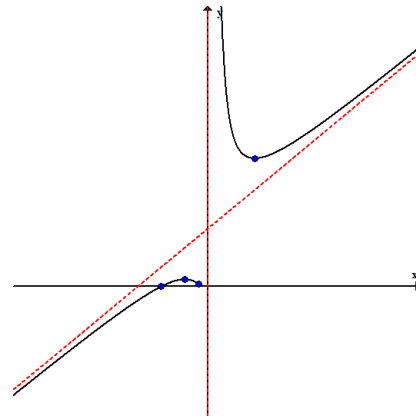




(4)



(3)



חקירת פונקציה לוגריתמית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4. חקור את הפונקציה $f(x) = x \ln x$

5. חקור את הפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$.

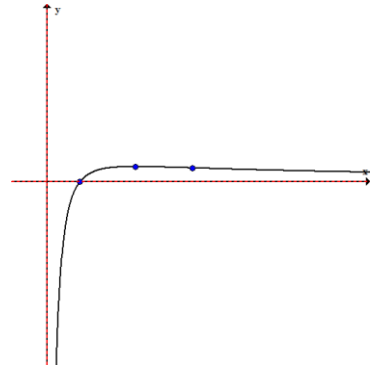
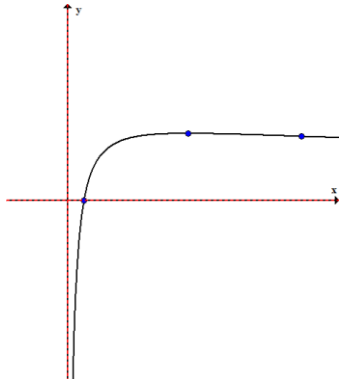
6. חקור את הפונקציה $f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3$.

פתרונות

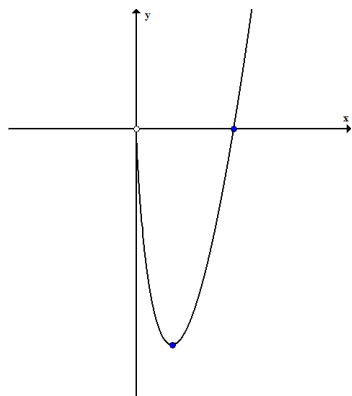
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 0$, נקודת קיצון: $\max(e, 1/e)$, תחום עליה: $0 < x < e$, תחום ירידה: $x > e$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, (3/2)/e^{1/3})$, תחום קעירות: $0 < x < e^{3/2}$, תחום קמירות: $x > e^{3/2}$ (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 0$, נקודת קיצון: $\max(e^2, 2/e)$, תחום עליה: $0 < x < e^2$, תחום ירידה: $x > e^2$, נקודת פיתול: $(e^{8/3}, \frac{8/3}{\sqrt{e^{8/3}}})$, תחום קמירות: $x > e^{8/3}$, תחום קעירות: $0 < x < e^{8/3}$ (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x < 2$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1, 0)$, $(0, -\frac{1}{2}\ln 2)$, אסימפטוטות: $x = 2$, אין נקודות קיצון, תחום עליה: כל x , אין נקודות פיתול. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1, 0)$, אסימפטוטות: חור בנקודה $(0, 0)$, נקודת קיצון: $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, תחום עליה: $x > \frac{1}{e}$, תחום ירידה: $0 < x < \frac{1}{e}$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: כל x . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e, 0)$, $(e^{-3}, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, נקודת קיצון: $\min(e^{-1}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{-1}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{-1}$, נקודת פיתול: $(1, -3)$, תחום קעירות: $x > 1$, תחום קמירות: $0 < x < 1$ (6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e^{1.5}, 0)$, $(e^{-0.5}, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, נקודת קיצון: $\min(e^{1/2}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{1/2}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{1/2}$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, 0)$, תחום קעירות: $x > 3/2$, תחום קמירות: $0 < x < 3/2$

(2)

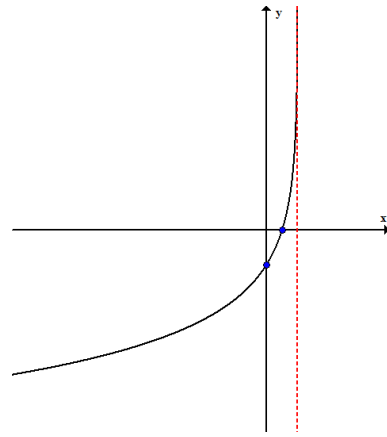
(1)



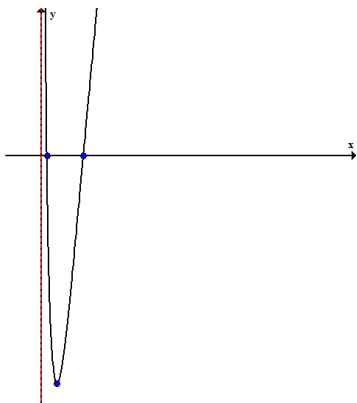
(4)



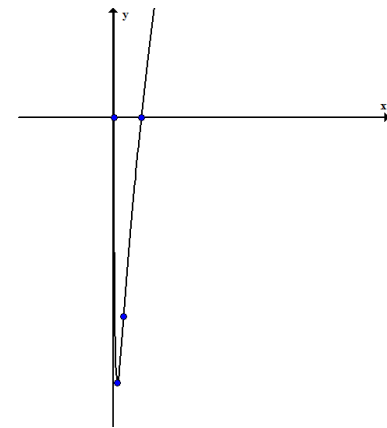
(3)



(6)



(5)



חקירת פונקציה עם שורשים

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = (\sqrt[3]{x^2}-1)^2$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2}-1$.

פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$, אסימפטוטות: $y=0$, נקודת קיצון: $\max(0,1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, נקודת פיתול:

$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$, תחום קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

(2) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא, לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0), (1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודת קיצון:

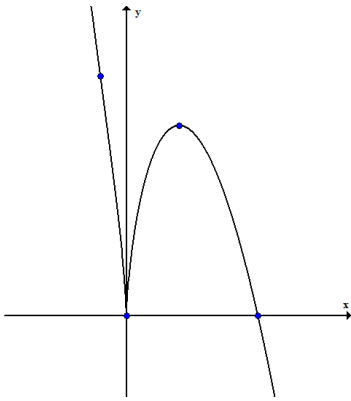
$\max(2/5, 0.326), \min(0,0)$, תחום עליה: $0 < x < 2/5$, תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2/5$, נקודת פיתול: $(-0.2, 0.41)$, תחום קמירות: $x < -0.2$, תחום קעירות: $-0.2 < x < 0$

או $x > 0$. (3) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1), (-1,0), (1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודות קיצון: $\max(0,1), \min(1,0), \min(-1,0)$, תחום עליה: $-1 < x < 0$ או $x > 1$

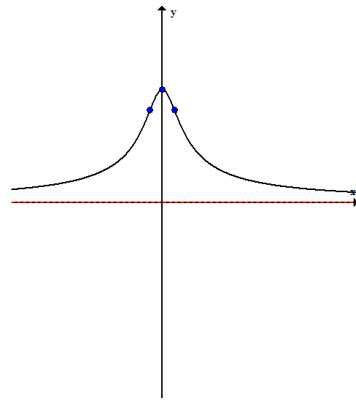
, תחום ירידה: $x < -1$ או $0 < x < 1$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: לכל x . (4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-1), (1,0), (-1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודת קיצון: $\min(0,-1)$, תחום עליה: $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $x < -1$

או $-1 < x < 0$, נקודות פיתול: $(-1, 0)$, תחום קמירות: $-1 < x < 1$, תחום קעירות: $x > 1$ או $x < -1$.

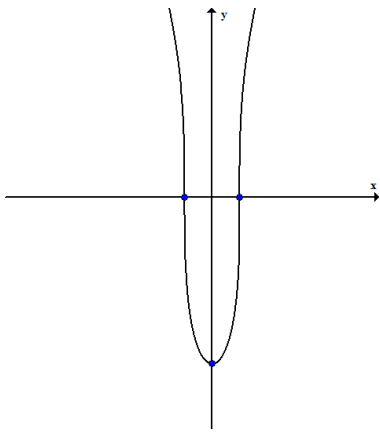
(2)



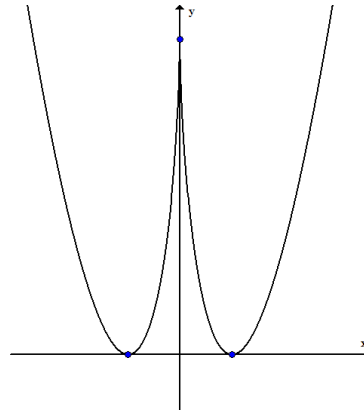
(1)



(4)



(3)



קיצון מוחלט

1. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ $(-1 \leq x \leq 3)$.

2. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$.

3. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^{2/3}(20 - x)$ $(-1 \leq x \leq 20)$.

4. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases}$ $(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2})$.

5. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = 1 + |9 - x^2|$ $(-5 \leq x \leq 1)$.

6. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ $(-5 \leq x \leq -1)$.

7. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^3 - 9x + 1$ $(-\infty \leq x \leq \infty)$.

8. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $x^3 e^{-7} \leq \frac{27}{3}$ (לכל x).

9. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $x e^{-\sqrt{x}} \leq 1$ $(x \geq 0)$.

10. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1$ $(x \leq 1)$.

פתרונות

(1) מקסימום מוחלט: 9, מינימום מוחלט -7 (2) מקסימום מוחלט: 3, מינימום מוחלט 0

(3) מקסימום מוחלט: 48, מינימום מוחלט 0 (4) מקסימום מוחלט: 2, מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$ (5)

מקסימום מוחלט: 17, מינימום מוחלט 1 (6) מקסימום מוחלט: -4 , לא קיים מינימום מוחלט (7) אין לפונקציה נקודות מקסימום ומינימום מוחלטות

פרק 8 – שימושי הנגזרת

נוסחת הקירוב הלינארי

1. בסרטון זה הסבר על נוסחת הקירוב הלינארי.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נוסחת הקירוב הלינארי.

גמישות הביקוש

1. חשב את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות:
א. $f(x) = x^2 + 4x$ ב. $f(x) = xe^x$ ג. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ד. $f(x) = \ln(\ln x)$
2. פונקצית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = 10 - p$. מצא את גמישות הביקוש, אם $p = 4$.
3. פונקצית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$.
א. מצא את המחיר p בו $\eta_D = 0$.
ב. מצא את המחיר p בו $\eta_D = -1$.
4. פונקצית הביקוש נתונה ע"י $x = a \cdot \sqrt{b - p}$, כאשר x – כמות, p – מחיר, $a, b > 0$ קבועים. מצא את x ו- p עבורם גמישות הביקוש שווה ל-1.
5. הוכח כי $\eta_{\ln f} = \frac{\eta_f}{\ln f(x)}$.

פתרונות

1. א. $\frac{2x+4}{x+4}$ ב. $1+x$ ג. $\frac{2x^2}{x^2+4}$ ד. $\frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$ (2) $\eta_D(4) = -\frac{2}{3}$ (3) $p = 0$
- ב. $p = \frac{a}{2b}$ (4) $p = \frac{2b}{3}$, $x = a\sqrt{\frac{b}{3}}$

בעיות קיצון כלכליות

• בסרטון זה הסבר על פונקציות כלכליות.

1. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$$

שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

2. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא x .

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

4. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצא את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

5. פונקציית הפוטנציאל הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

6. פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7. פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.
- שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 - מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ₪.
 - מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
 - מצא את פונקציית ההוצאה השולית.
8. פונקציית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.
- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
 - כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 - חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?
9. פונקציית העלות של מוצר מסויים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.
- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 - חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$.
 - חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצרן יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב'. מהי המסקנה?
 - מצא האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.
10. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.
- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
11. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
12. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
13. ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקציית עלות שולית $TC(Q) = 200 + 4Q$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
14. ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקציית העלות אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.
- 15.
- הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

16. $C(x)$ - פונקציית ההוצאות, $C'(x)$ - הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ - הוצאות ממוצעות.

- א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם יתכן להפך?
 ג. הוכח, כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה, אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מין ההוצאה הממוצעת.

17. מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.

נסמן את מחירי גורמי הייצור ליחידה ב- p_1 וב- p_2 בהתאמה.

אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יח' מג"י 2, המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ש.

א. הוכח כי באילוף התקציב, הייצור המקסימלי כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$.

ב. חשב x ו- y עבורם יהיה הייצור מקסימלי אם נתון $3,000$ ש"ח $p_1 =$ ש"ח 100 , $p_2 =$ ש"ח $372,500$. $A =$

פתרונות

- 1 א. 9 ב. 7 ג. 16 ד. $x \geq 0$ ה. $x(p) = 40 - 4p$ (2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, $x \geq 0$
- ב. מחיר: 108, פדיון: 2160 ג. $x = 180$ (3) א. $x \geq 0$ ג. $p(x) = -0.08x + 40$ (4) א. $x \geq 0$ ב.
- $R'(x) = -0.08x + 100$ ג. A ($R = 0$ $x = 4$, $R(x) = -0.04x^2 + 100x$
- ד. $R_{max} = 62500$, $x = 1250$ (5) א. $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$
- $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא כדאי ג. $R_{max} = 108000$, $x = 30$ (6) א. $33\frac{1}{3}$
- ב. $\frac{1000}{9}$ ג. $-3\frac{1}{3}$ (7) א. 150 ב. 170 ג. 250 ד. $MC(x) = 5$ (8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18
- 9 א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8 ג. 10.804 ד. גדל (10) $Q = 800$
- $\pi_{max} = 38200$ (11) $Q = 5$, $\pi_{max} = -250$ (12) $Q = 25$ (13) $Q = 800$, $\pi_{max} = 38200$
- (14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$ (16) א. יתכן. ב. לא יתכן (17) ב. $x = 4$, $y = 3600$

בעיות קיצון מסוגים שונים

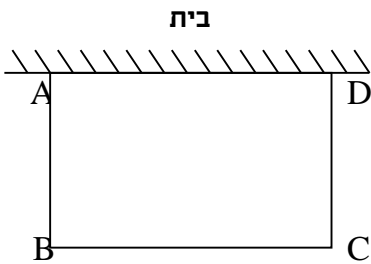
- בסרטון זה הסבר על בעיות קיצון.
- בסרטון זה הסבר על שלבי העבודה בפתרון בעיות קיצון.
- בסרטון זה הסבר על גופים תלת מימדים.

1. נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

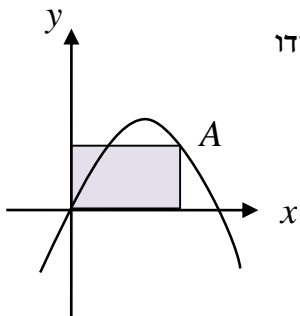
3. נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

4. מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



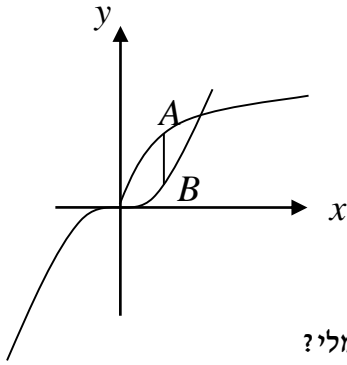
5. אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

6. לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?



7. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו

אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



8. נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו

מלבן.

מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום

הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

פתרונות

(1) 8, 8, 8 (2) 8 יח"א (3) 4·4·4 (4) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח = V (5) 4·6 (6) 3·6·8 ס"מ

(7) $A(4,8)$ (8) $A(1,2)$ (9) 1·2 (10) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

פרק 9 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$. \text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

פרק 10 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח

הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6\$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8\$.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; מינימום $(1.5, -3)$.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. $(4, 4)$ מקסימום. (6)
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 11 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג)

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת

שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

- | | | | | | |
|---------------------|-------------------------------------|------|---------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| $Max(0, \pm 1)$ | $min(\pm 1, 0)$ | (2) | $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (1) |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $min(\pm 2, 1)$ | (4) | $Max(2, 3)$ | $min(-2, -3)$ | (3) |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | | $Max(6, 2)$ | (5) |
| $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (8) | | $(6, 2)$ | (7) |
| | $min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | | $7 / \sqrt{45}$ | (9) |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | | $Max(6, 2)$ | (11) |
| | | | $min\{2K + L\}$ | $;$ | $\sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ (13) |