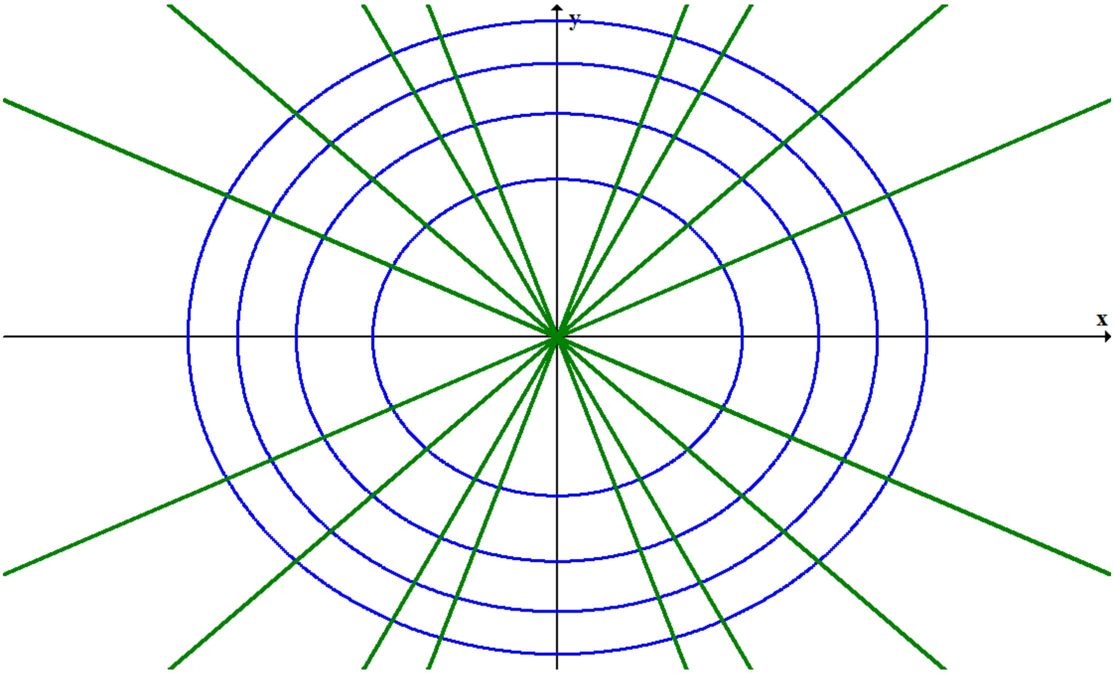
מתמטיקה

שימושית

2



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה) 6

אינטגרל קוי מסוג I 6

אינטגרל קווי מסוג II 7

פתרונות 9

פרק 2 - אי תלות במסלול, שדות משמרים 10

פתרונות 12

פרק 3 - משפט גרין 13

פתרונות 14

פרק 4 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם 15

אינטגרל משטחי מסוג I 15

אינטגרל משטחי מסוג II 16

פתרונות 16

פרק 5 - משפט הדיברגנץ (גאוס) 17

פרק 6 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב) 19

פתרונות 20

פרק 7 - משוואות מסדר ראשון 21

פרק 7.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים 21

פרק 7.2 - משוואות הומוגניות 22

פרק 7.3 - משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ 24

פרק 7.4 - משוואות מדויקות 25

פרק 7.5 - הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה) 26

פרק 7.6 - משוואה לינארית 28

פרק 7.7 - משוואת ברנולי 29

פרק 7.8 - משוואת ריקטי 30

פרק 7.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה 31

פרק 8 - משוואות לינאריות מסדר שני 32

פרק 2.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה) 32

פרק 8.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים 33

פרק 8.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים 34

פרק 8.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים 35

פרק 8.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות 36

פרק 9 - משוואות לינאריות מסדר n 37

פרק 9.1 - משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים 37

פרק 9.2 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים 39

פרק 9.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית,עם מקדמים קבועים -וריאציית פרמטרים 40

פרק 9.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות/אופרטוריות 41

פרק 10 - מערכת משוואות לינאריות 42

פרק 10.1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון מטריצות 42

פרק 10.2 - מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים - שיטת הליכסון 43
פרק 10.3 - מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים - וריאציית הפרמטרים 45
פרק 10.4 - מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים - שיטת החילוץ 47
פרק 11 - פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורים 48
פרק 11.1 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית 48
פרק 11.2 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה סינגולרית - רגולרית 50
פרק 12 - התמרת לפלס 52
פרק 12.1 - התמרת/טרנספורם לפלס 52
פרק 12.2 - התמרת לפלס ההפוכה ומשפט הקונוולוציה 54
פרק 12.3 - פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס 56
פרק 13 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות 57
פרק 14 - טורים עם איברים קבועים 62
טור גיאומטרי 62
טור טלסקופי 62
טור הרמוני מוכלל 62
תכונות אלגבריות של טורים 62
מבחן ההתבדרות 62
מבחן האינטגרל 63
מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי 63
מבחן המנה ומבחן השורש 63
מבחן לייבניץ 63
התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 64
הוכח או הפרך 64
פתרונות 65
פרק 15 - טורי פונקציות וטורי חזקות 66
טורי פונקציות 66
טורי חזקות 66
פתרונות 68
פרק 16 - טור טיילור/מקלורן 69
פתרונות 71
דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור, התמרות לפלס) 72
נוסחאות - נגזרות 72
נוסחאות - אינטגרלים 73
נוסחאות - טריגו 74
נוסחאות - אלגברה 75
נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 76
נוסחאות - התמרת לפלס 77

סיכום מד"ר 80
משוואות הניתנות להפרדת משתנים 80
משוואות הומוגניות (ניתנות להפרדת משתנים בעזרת הצבה מתאימה) 80
משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ 81
משוואות לינאריות מסדר ראשון 81
משוואת ברנולי (לינארית על ידי הצבה) 81
משוואות מדויקות 82
משוואות כמעט מדויקות (מדוייקות לאחר הכפלה בגורם אינטגרציה) 83
משוואות מסדר ראשון וממעלות גבוהות 84
הורדת סדר המשוואה 85
משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים 85
משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים 86
משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים 88
משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות (שיטה אופרטורית) 90
התמרת לפלס 92
פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס: 93
נוסחאות - התמרת לפלס 94
פתרון מד"ר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 96
פתרון מערכת מד"ר כללית 2x2 - שיטת החילוץ 97
פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - שיטת הלכסון 97
אלגוריתם פתרון (וריאציית פרמטרים): 98
פתרון נומרי (מקורב) של מד"ר מסדר ראשון (שיטת רונגה-קוטה) 99
בעיות מילוליות גיאומטריות 100

פרק 1 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

אינטגרל קוי מסוג I

(1) חשב $\int_C f(x,y)ds$

א. $f(x,y)=1-x^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

ב. $f(x,y)=x$; $C: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$.

ג. $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

ד. $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של ΔOAB : $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$.

(2) חשב $\int_C f(x,y,z)ds$

א. $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$; $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

ב. $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$; $f(x,y,z)=x^3+3z$

(3) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשב את **מסת** הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

(5) חשב:

א. $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy \; ; \; C: \; x=\cos t, \; y=\sin t \;\; 0\le t\le \pi/2$

ב. $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy \; ; \; C: \; x=t, \; y=t^2 \;\; 0\le t\le 1$

(6) חשב $\int_C ydx+x^2dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y=2x$ ב. $y=x^2$

(7) $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$ אם העקום נתון על ידי :

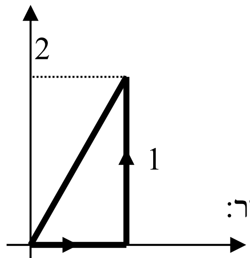
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

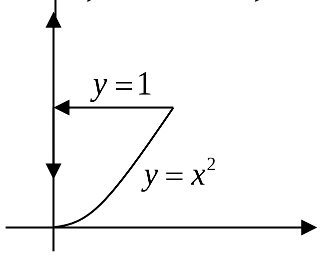
ג. הקוים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $x=2t^2+t+1, \quad y=t^2+1$.

(8) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(9) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(10) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים:

א. $x=t, \; y=t^2, \; z=t^3$.

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

א. $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

ב. $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

(12) א. חשב את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$
על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$.
ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$.

(13) חשב את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$
על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}\ \ (0\le t\le 1)$.

<u>הערת סימון</u>
אינטגרל קוי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

פתרונות

(1) א. π ב. $\frac{16}{3}$ ג. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ד. $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(2) א. $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$ ב. $\frac{567}{2}$

(3) 6

(4) $\sqrt{5}k\pi^2$

(5) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{4}{3}$

(6) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

(7) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

(8) $\frac{1}{2}$

(9) $\frac{4}{5}$

(10) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

(11) א. $-\frac{59}{105}$ ב. $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

(12) א. 3 ב. -3

(13) 1

פרק 2 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

א. $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

ב. $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

ד. $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+3z^2)\mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+(1+3x^2y^2)dy$.

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$ מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב: א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$.

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$.

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2,0)$ ל- $(-2,0)$:

$L_2:\ x^2+y^2=4\ ,\ y\le 0$ $\qquad L_1: x^2+y^2=4\ ,\ y\ge 0$

א. חשב: $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$, $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$.

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge 0\right\}$.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)$

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$

פתרונות

(1) א. $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$.   ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$.   ד. $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

ה. $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$.   ו. השדה אינו משמר.

(2) ב. 236

(3) -58

(4) 5

(5) -2

(6) 15 = עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1,-1,1) ל- (2,1,-1) לאורך C.

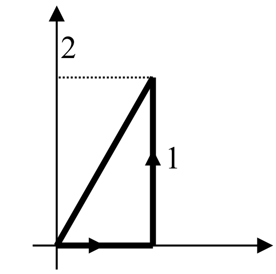
(7) א. 2π ב. -2π ג. 0.

(8) א. $L_1:\pi$, $L_2:-\pi$

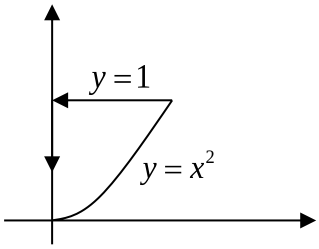
פרק 3 - משפט גרין

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב
את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x-f_y\right)dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



(3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$;
C הוא ריבוע שקודקודיו: $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.ריקי

(4) חשב את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$
על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$ כאשר C הוא
האיחוד של העקומים $y=8-x^2,\ y=x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos ydx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$
כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה
$(-2,0)$.

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>פתרונות</u>

(1) הערך המשותף הוא 0.5
(2) הערך המשותף הוא 0.8
(3) הערך המשותף הוא 8
(4) 1.5π
(5) $0.5\sin 64$
(6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
(7) ב. πab

פרק 4 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי:

(1) $\iint_S x^2 yzdS$ כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$ מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

(2) $\iint_S xdS$ כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

(3) $\iint_S yzdS$ כאשר S הוא המישור $z=y+3$ שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

(4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$ כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

(5) $\iint_S xyzdS$ כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$

המקיים $1\le u\le 2$, $0\le v\le \pi/2$.

(6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R.

(7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ שמתחת למישור $z=1$

וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$ קבועה. חשב את **מסת** היריעה.

אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$

ובניסוח אחר:
בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.
($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(8) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(9) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

(10) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(11) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\ge 0$.

(12) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$
S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוס 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

פתרונות

(1) $171\sqrt{14}$ (2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$ (3) $\pi\sqrt{2}/4$

(4) 16π (5) $93/\sqrt{10}$ (6) $4\pi R^2$

(7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ (8) $\frac{11}{6}$ (9) $\frac{8\pi}{3}$

(10) 27 (11) 12π (12) -16π

פרק 5 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב
את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$ והראה שהם שווים זה לזה. ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2+y^2+z^2=1$.

(3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

(6) חשב את
$$\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)xydzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$.

(7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים) .

חשב את **השטף** דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$
;

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\ge 0$ (המשטח <u>פתוח</u>).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$

(3) הערך המשותף הוא 27

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π

פרק 6 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ והראה שהם שווים זה לזה

(ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\ge 0$.

(2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$ כאשר C העקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$

ו- C היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$ ומעל למישור- xy .

(7) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$

ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא 12π

(2) הערך המשותף הוא -16π

(3) הערך המשותף הוא א) -6 ב) -9 ג) -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π

פרק 7 - משוואות מסדר ראשון

פרק 7.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים

1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$

3) $(1-x)y'=y^2$

4) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

5) $y(2)=1 \ ; \ (x-1)\frac{dy}{dx}=4y$

6) $y(1)=-1 \ ; \ \frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9$

7) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

8) $dy=2t(y^2+4)dt$

9) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

10) $y(\pi)=1 \ ; \ y'+y^2\sin x=0$

11) $y(0)=4 \ ; \ \frac{dy}{dx}=y\sec^2 x$

תשובות:

(1) $y=\pm\sqrt{x^2+k}$ (2) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$ (3) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c}$, $y=0$

(4) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$ (5) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$ (6) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

(7) $\frac{x^2}{2}+x=\frac{y^2}{2}+c$, $y=-2$ (8) $y=2\tan(2t^2+k)$ (9) $x=1+\tan(t+c)$

(10) $y=-\frac{1}{\cos x}$ (11) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$ (12) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

פרק 7.2 - משוואות הומוגניות

1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

3) $(y^3+x^3)dx+xy^2dy=0$

4) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

5) $y^2+x^2y'=xyy'$

6) $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$

7) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

8) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

9) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0 \quad ; \quad y(1)=0$

10) $(2x^2t-2x^3)dt+(4x^3-6x^2t+2xt^2)dx=0$

11) נתונה המשוואה $(y^2+x^2)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

(3) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right| + c\ ,\ y = -\frac{x}{2^{1/3}}$

(4) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln|(y/x)-1| - \frac{5}{4}\ln|(y/x)+3| + c\ ,\ y = x\ ,\ y = -3x$

(5) $-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c\ ,\ y = 0$

(6) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right| + c\ ,\ y = 0\ ,\ y = -2x$

(7) $\ln|x| = -\sin(y/x) + c$ (8) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c\ ,\ y = 0$ (9) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

(10) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right| + c\ ,\ x(t) = 0\ ,\ x(t) = t$

(11) $n = 1,\ \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2\left(x/y\right)^2\right) + c$

פרק 7.3 - משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x+y}{2+x+y}$

3) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

5) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

6) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות:

(2) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1)+\frac{1}{4}+c\ ,\ y=-x-1.5$

(3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

(4) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,\ y=x-3\ ,\ y=-x-1$

(5) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c\ ,$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

(6) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

פרק 7.4 - משוואות מדויקות

1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\left(2x^3+3y\right)dx+(3x+y-1)dy=0$

3) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

4) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

5) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

6) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

7) $(2x^2t-2x^3)dt+(4x^3-6x^2t+2xt^2)dx=0$

8) נתונה המשוואה $(3x^2+ye^{xy})dx+(2y^3+kxe^{xy})dy=0$ באשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

(2) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$ (3) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$ (4) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

(5) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$ (6) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

(7) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$ (8) $k=1$, $x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

פרק 7.5 - הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)

1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדויקת.

2) הראה שהמשוואה $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

3) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

4) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x.

5) פתור את המשוואה $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$.

6) פתור את המשוואה $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$.

7) פתור את המשוואה $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$.

8) פתור את המשוואה $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$.

9) פתור את המשוואה $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$.

10) פתור את המשוואה $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$.

תשובות:

(2) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$ (3) $e^x\sin y+2y\cos x=c$ (4) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

(5) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$ (6) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-x=c$ (7) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

(8) $x-\frac{x}{y}=c$ (9) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$ (10) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

פרק 7.6 - משוואה לינארית

1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

3) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

4) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3$

5) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

6) $y(0)=1 \;\; ; \;\; \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

7) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

8) $y'-2y\cot x=1$

9) $z(\pi)=0 \;\; ; \;\; x^2z'+2xz=\cos x$

תשובות:

(2) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$ (3) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$ (4) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

(5) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$ (6) $y=2t+e^{-t}$ (7) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

(8) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$ (9) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

פרק 7.7 - משוואת ברנולי

1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

3) $(x^2+1)y' - 2xy - y^2 = 0$

4) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2}$

5) $y' - \left(\dfrac{1}{x} + 5x^4\right)y = -x^3 y^2 \quad ; \quad y(1) = 2.5$

6) $z' - \cot x \cdot z = \dfrac{1}{\sin x} z^3$

תשובות:

(2) $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x} + c \cdot x^4}}$ (3) $y = \dfrac{x^2+1}{-x+C}$ (4) $y = x^2\left(\dfrac{x}{2} + C\right)^2$ (5) $y = \dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$

(6) $z = \pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$

פרק 7.8 - משוואת ריקטי

1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y' = e^{2x} + (1 + \frac{5}{2}e^{x})y + y^{2}$

3) $y' = -(1 + x + x^{2}) - (2x + 1)y - y^{2}$

4) $y' = 1 + x^{2} - 2xy + y^{2}$

5) $y' = 1 + x + 2x^{2}\cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^{2}\cos x$

תשובות:

(2) $y(x) = -x + \dfrac{1}{1 + Ce^{x}}$ (3) $y(x) = -0.5e^{x} + \dfrac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$

(4) $y(x) = x + \dfrac{1}{-x + C}$ (5) $y(x) = x + \dfrac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$

פרק 7.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

2) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$

3) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

4) $xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$

5) $y = 2px + p^4x^2$

6) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

7) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$

תשובות:

(2) $(y - 2x - \sqrt{x}\cdot c_1)\cdot\left(\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x| - c_2\right) = 0$

(3) $(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1)\cdot(\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$

(4) $(y + 0.5x - \frac{c_1}{x})\cdot(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0 \ , \ x > 0$ (5) $y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$

(6) $y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c}$ (7) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$

פרק 8 - משוואות ליניאריות מסדר שני

פרק 2.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)

1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x}$

3) $y''\tan x-1=y'$

4) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

5) $y''x\ln x=y'$

6) $xy''=x^2e^x+y'$

7) $yy''+\left(y'\right)^2=0$

8) $2y''y-\left(y'\right)^2=1$

9) $x^3y''+x^2y'=1$

תשובות:

(2) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$ (3) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

(4) $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2\ ;\ y=\pm x+C_3$

(5) $y=C_1(x\ln x-x)+C_2\ ;\ y=C_3$ (6) $y=e^x(x-1)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

(7) $\frac{y^2}{2}=cx+k\ ;\ y=c$ (8) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2(x+k)^1}{4}+1\right]$ (9) $\cot y=-(cx+k)\ ;\ y=c$

פרק 8.2 - משוואות מסדר שני, ליניאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

1) הגדר משוואה ליניארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y''-100y=0$

3) $y''-4y'=0$

4) $y''-8y'+7y=0$

5) $4z''+z'-5z=0 \quad ; \quad z(0)=1,\ z'(0)=1$

6) $y''-2y'+y=0$

7) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

8) $y''+4y=0$

9) $y''+10y=0$

10) $y''-2y'+10y=0 \quad ; \quad y(0)=0, y'(0)=1$

11) $5y''+8y'+4y=0$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$ (3) $y=c_1+c_2e^{4x}$ (4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$ (5) $z=e^{x}$

(6) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$ (7) $x(t)=c_1e^{-t/2}+c_2te^{-t/2}$ (8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

(9) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ (10) $y=e^{2}\sin 3x$ (11) $y=e^{-4x/5}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

פרק 8.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y''+5y'+6y=22x+16x^2$

3) $y(0)=2\ ,\ y'(0)=7\ ;\ y''-2y'+y=e^{2x}$

4) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

5) $y''-2y=xe^{-x}$

6) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

9) $z''+z=\sin x$

10) $y''-3y'+2y=e^x$

11) $y''-2y'=6x^2-2x$

12) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

13) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$ (3) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

(4) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$ (5) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

(6) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$ (7) $c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

(8) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$ (9) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

(10) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$ (11) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

(12) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$ (13) $y=e^{-x}\sin 2x$

פרק 8.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

3) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

4) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

5) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\ ;\ y(1)=0\ ,\ y'(1)=0$

6) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

7) $y''+4y=\sec 2x$

<u>תשובות:</u>

(2) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

(3) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-x}\left[\ln x-1\right]$

(4) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6(\sqrt{x+1})^5}{5}-\dfrac{6(\sqrt{x+1})^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

(5) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad (x>0)$

(6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

(7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

פרק 8.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

3) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

4) $(D^2+D-2)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

5) $(D^2+4)y=\sin 5x$

6) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

7) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

8) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

הערת סימון– $\boxed{(aD^2+bD+c)y=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad ay''+by'+cy=Q(x)}$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+e^{-2x}-5e^{x}-5.5$

(3) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{10}{9}e^{4x}+x^2e^{x}-1$

(4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-4xe^{x}+\frac{1}{72}e^{10x}+7$

(5) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{21}\sin 5x$

(6) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{80}\sin 4x$

(7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+\sin x$

(8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{30}\sin 3x-\frac{1}{15}\cos 3x$

פרק 9 - משוואות ליניאריות מסדר n

פרק 9.1 - משוואות ליניאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

1) הגדר משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

2) הקושי העיקרי בפתרון משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הוא בפתרון המשוואה האופיינית. צטט מספר משפטים מתחום האלגברה שבעזרתם נוכל לפתור את המשוואה האופיינית ביתר קלות.

פתור את המשוואות הבאות:

3) $y'''-2y''-3y'=0$

4) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

5) $y'''-2y''-y'+2y=0$

6) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

7) $y^{(4)}-y=0$

8) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

9) $y^{(4)}+y=0$

10) $y^{(6)}-y''=0$

11) $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

12) $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

13) $z'''-6z''+12z'-8z=0$

14) $y^{(4)}-4y=0$

15) $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$

16) $y(0)=3, y'(0)=4, y''(0)=-1\ ;\ y'''-y''+y'-y=0$

17) $y(0)=2\ ,\ y'(0)=5\ ,\ y''(0)=-19, y'''(0)=-47;\ y''''-3y'''+6y''-12y'+8y=0$.

18)נתונה מד״ר הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפתרונות שלה הוא
$x^2e^x\cos 2x$. א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה ב. מצא את המד״ר.

תשובות:

(3) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$ (4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}$

(5) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$ (6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

(7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{0x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]$ (8) $y=c_1e^{-4x}+e^{x}\left[c_2\cos 2x+c_3\sin 2x\right]$

(9) $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(10) $y=c_1+c_2x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}+\cos x+\sin x$

(11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4x^2e^{-x}+c_5x^3e^{-x}$

(12) $y=e^{x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]+e^{-x}\left[c_5\cos x+c_6\sin x\right]+xe^{-x}\left[c_7\cos x+c_8\sin x\right]$

(13) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}$

(14) $y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$

(15) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

(16) $y=e^{x}+2\cos x+3\sin x$ (17) $y=e^{x}-2e^{2x}+3\cos 2x+4\sin 2x$

(18) (a) $y=e^{x}\left[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos 2x+c_4\sin 2x\right]+x^2e^{x}\left[c_5\cos 2x+c_6\sin 2x\right]$

(b) $y''''''-6y'''''+27y''''-68y'''+135y''-150y'+125y=0$

פרק 9.2 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

3) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

4) $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

5) $y'''-3y'+2y=e^x$

6) $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

7) $y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=2\ \ ;\ \ y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x}$

8) $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$

תשובות:

(2) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+\sin x$ (3) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+e^{2x}$

(4) $y=c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3e^{-x}+x^3+4$ (5) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^2e^x$

(6) $y=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{4}x(\cos x-\sin x)$ (7) $y=-4.5+4e^{-x}+2xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{2x}$

(8) $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{1}{4}x^4-3x^2+x\sin x+2x\cos x$

פרק 9.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית,עם מקדמים קבועים -וריאציית פרמטרים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y'''+y'=\frac{1}{\cos x}$

3) $y'''-3y''+2y'=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$

4) $y'''-3y''+3y'-y=\frac{e^x}{x}$

תשובות:

(2) $y=c_1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x+\ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|-x\cos x+\sin x\ln|\cos x|$

(3) $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+\frac{1}{2}\left(e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$

(4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-\frac{3}{4}x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\ln|x|$

פרק 9.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות/אופרטוריות

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $$\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$$

3) $$y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$$

4) $$\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$$

5) $$\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$$

6) $$\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin(2x+1)+\cos(x+10)$$

7) $$\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$$

8) $$(D^4-3D^3+6D^2-12D+8)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

(3) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

(4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

(5) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

(6) $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin(2x+1)-\cos(x+10)$

(7) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

(8) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$

פרק 10 - מערכת משוואות לינאריות

פרק 10.1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון מטריצות

עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ 8) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

תשובות:

(1) $x=0,\ x=1,\ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ v_{x=2}=(1,0,1)$

(2) $x=6,\ x=2,\ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ v_{x=2}(1,1,1),\ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

(3) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=3,\ v_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)\ \ x^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

(4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

(5) $x=1,\ x=4,\ x=-1,\ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

(6) $x=-1,\ x=3\ \ v_{x=-1}=(-1,2),\ v_{x=3}=(1,2)$

(7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

(8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ v_{x=1}=(1,1,1)$

$v_{x=1+\sqrt{3}i}=(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2),\ \ v_{x=1-\sqrt{3}i}=(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2)$

פרק 10.2 - מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים - שיטת הליכסון

1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת הליכסון.

2) פתור $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

3) פתור $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$, $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$.

4) נתון $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$. הוכח כי $z(t)=y(t)$.

5) פתור $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

6) פתור $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

7) נתון $\underline{x}'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\underline{x}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$. חשב: $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$.

8) פתור $\begin{cases}y_1'+5y_1-2y_2'=0\\3y_2'-4y_1'-5y_2=0\end{cases}$

9) פתור $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

- הערה: בשאלות 8,9 יש להגיע מהפתרון המרוכב לפתרון ממשי.

תשובות:

(2) $\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (3) $\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

(5) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (6) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(7) 0 (8) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$

(9) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$

פרק 10.3 - מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים - וריאציית הפרמטרים

1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

2)
$$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t}$$

3)
$$x_1' = x_1 + x_2 + e^{at}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at}$$
(a קבוע).

4)
$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5)
$$x' = x + y + 2z + e^t$$
$$y' = x + 2y + z$$
$$z' = 2x + y + z + e^t$$

6) המר את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$ במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

<u>תשובות:</u>

$$(2)\quad \underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}\quad (a=-1),$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}\quad (a\neq 1)$$

$$(4)\quad \underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(5)\quad \underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(6)\quad \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$$

פרק 10.4 - מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים - שיטת החילוץ

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

(1
$$\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$$

(2
$$\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$$
בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$

(3
$$\begin{cases} x'=4x-2y+e^{t} \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$$

(4
$$\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$$

(5
$$\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$$

תשובות:

(1) $z=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2 , \quad y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^{x}+2c_3e^{-x}+kx+l$

(2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{x}-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x , \quad y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

(3) $x=c_1+c_2e^{t}+4te^{t}-e^{-t} \quad , \quad y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^{t}+6te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}-\frac{5}{2}e^{-t}$

(4) $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t \quad , \quad x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$

(5) $z=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{2x} , \quad y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^{x}$

פרק 11 - פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורים

פרק 11.1 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית

1) נתונה מד"ר מהתבנית $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$
שעבורה הנקודה $x=0$ היא נקודה רגולרית.
הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה $x=0$.
בתשובתך התייחס גם למקרה בו הנקודה היא רגולרית כלשהי, $x=x_0$.
(הנח כי p,q פולינומים או מנה של פולינומים).

פתור את המשוואות הבאות (2-8) על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$. במיוחד , רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.(הערת ניסוח: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן).

2) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad ; \quad y(0)=3, y'(0)=12$

3) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

4) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

5) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

6) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

7) $y''+ty=e^{t+1}$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$

8) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$).

9) פתור את המשוואה $y''+(x-1)y=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

10) פתור את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad ; \quad y(-1)=2, y'(-1)=-2$.

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות:

(2) $a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 5)\quad ,\quad y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$

(3) $a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\ge 3)\quad ,\quad y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

(4) $a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\ge 2)\quad ,\quad y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

(5) $a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\quad (n\ge 4)$

$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$

(6) $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$

$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

(7) $a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\ge 3)$

$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$

(8) $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$

$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$

(9) $a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\ge 3)$

$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$

(10) $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$

$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$

פרק 11.2 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה סינגולרית - רגולרית

1) נתונה מד"ר מהתבנית $y''+p(x)y'+q(x)y=0$
שעבורה הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית.
הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה $x=0$.
(הנח כי p,q פולינומים או מנה של פולינומים).

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ופתור את המשוואה על יד פיתוח הפתרון לטור חזקות בסביבת הנקודה.

2) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

3) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

4) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

5) $3x^2y''-xy'+y=0$

6) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

7) $x^2y''-xy'+y=0$

8) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

9) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערה : בשאלות 2-5 הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות 6,7 הפתרונות שווים ובשאלות 8,9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות:

(2) $y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$

(3) $y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$

(4) $y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$

(5) $y=k_1x+k_2x^{1/3}$

(6) $y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$

(7) $y(x)=k_1x+k_2x\ln x$ (8) $y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$

(9) $y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$

פרק 12 - התמרת לפלס

פרק 12.1 - התמרת/טרנספורם לפלס

1)הגדר והדגם את המושג התמרת לפלס.

חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס :

2) $L\left(t^2+4t-2\right)$ 3) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$ 4) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$ 5) $L\left(\cosh 4t\right)$

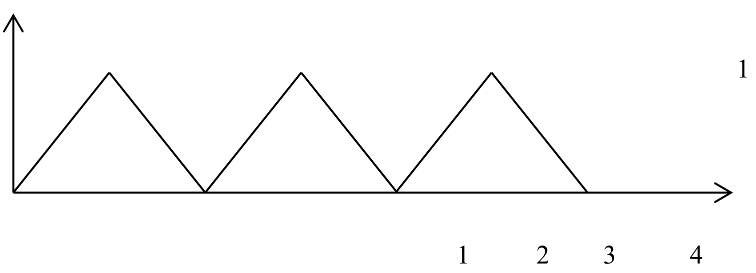
6) $L\left(\sinh 10t\right)$ 7) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$ 8) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$ 9) $L\left(\sin^2 t\right)$

10) $L\left(\cos^2 4t\right)$ 11) $L\left(t^2\sin 4t\right)$ 12) $L\left(t^4e^{2t}\right)$ 13) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

14) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & 1<t \end{cases}$.

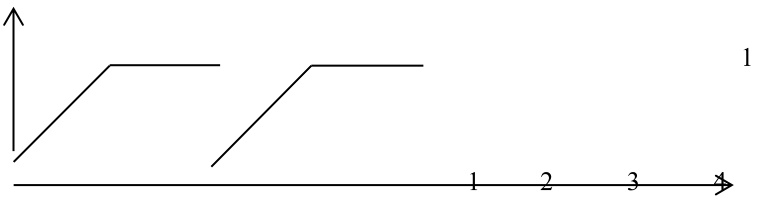
15) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:

18) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



19) הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

20) שרטט את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

21) רשום את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

22) רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$, של הפונקציה $u(t-k)$

ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

23) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

<u>תשובות:</u>

(2) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$ (3) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$ (4) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$ (5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

(6) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$ (7) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$ (8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$ (9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

(10) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$ (11) $\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$ (12) $\frac{24}{(s-2)^5}$ (13) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$ (14) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

(15) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$ (16) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$ (17) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$ (18) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

(21) $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$ (23) $\frac{2e^{-4s}}{s^3}$ (24) $\frac{2e^{-4s}(8s^2+4s+1)}{s^3}$

פרק 12.2 - התמרת לפלס ההפוכה ומשפט הקונוולוציה

חשב את התמרת לפלס ההפוכה:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ 2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$ 3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$ 5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$ 6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$ 8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$ 9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$ 11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$ 12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$ 14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$ 15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$ 17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$ 18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$ 20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right)$ 21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$ 23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{\left(s^2+1\right)(s-3)}\right)$ 24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$ 26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$ 27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$ 29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

- בשאלה 27 הוסף סעיף ב המבקש לשרטט את הפתרון.

30) נתון $F(s)=\dfrac{e^{-s}+2}{s}$ חשב את $f(0)$ ו- $f(\infty)$ כאשר $f(t)=L^{-1}\left(F(s)\right)$.
פתור בשתי דרכים שונות.
הערה: $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב:

32) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3(s-4)}\right)$ 33) $L^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s-4)^2}\right)$ 35) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

<u>תשובות:</u>

(1) 1 (2) $\dfrac{t^3}{3!}$ (3) e^{10t} (4) $\dfrac{1}{3}\sin 2t$ (5) $\cos 2t$ (6) $e^{10t}\dfrac{1}{2}\sin 2t$ (7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\dfrac{1}{2}\sin 2t\right\}$

(8) $\dfrac{1}{4}t\sin 2t$ (9) $\dfrac{1}{2\cdot 2^3}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$ (10) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$ (11) $\dfrac{1}{4}e^{2t}-\dfrac{1}{4}e^{-2t}$ (12) $1-2e^{-5t}$

(13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$ (14) $1+\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{1}{2}e^{-t}$ (15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$ (16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

(17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$ (18) $-6+5t+6e^{-2t}$ (19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$ (20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

(21) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$ (22) $\dfrac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$ (23) $\sin t+2e^{3t}$ (24) $\cos t+e^{-2t}$ (25) $\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t$

(26) $e^{t}-\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\dfrac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$ (27) $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

(28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$ (29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$ (30) $f(0)=2$ $f(\infty)=3$

(32) $-\dfrac{1}{2}(t^2+2t+2)+e^{t}$ (33) $0.5t-\dfrac{1}{4}\sin 2t$ (34) $\dfrac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\dfrac{1}{4}$ (35) $\dfrac{1}{2}(-2\cos t+2-t\sin t)$

פרק 12.3 - פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

1)א. הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לינארית, מסדר שני, לא הומוגנית במקדמים קבועים על ידי התמרת לפלס.
ב.הסבר כיצד פועלים אם המד"ר מסדר כלשהו.
פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס

2) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

3) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ \ ;\ \ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

4) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

5) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

6) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ \ ;\ \ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

7) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''-3y'+2y=u(t-4)$

כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

הערה: יש המסמנים $u(t-4)=u_4(t)$

8) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''+y'=f(t)$

כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\ge 1\end{cases}$

9) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''+5y'+6y=h(t)$

כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$.

10) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ \ ;\ \ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

תשובות:

(2) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$ (3) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$ (4) $y(t)=-4t-1$ (5) $y(t)=t^2$

(6) $y(t)=\frac{1}{8}e^{t}(t^2+2)$ (7) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

(8) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

(9) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

(10) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

פרק 13 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x,y) על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצא את משוואת העקום.

2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$ ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x,y) שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$. מצא את משוואת העקום.

3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה (1,2) ושבכל נקודה (x,y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

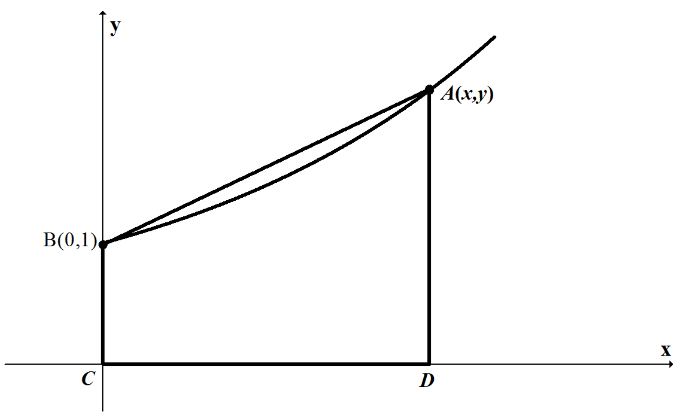
6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$. נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- y של הנקודה A.

7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה (3,4), אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

8) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x,y) שבין נקודה זו וציר x נחצה ע"י ציר y.
מצא את משוואת עקום זה.

9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה (0,1) כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר y, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x,y)$ והקטע OM מהראשית O ל- M הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע MN.
(N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר y).
צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעייה.

10) נתון עקום העובר בנקודה (0,1). בכל נקודה A שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז ABCD הנראה בציור. מהי משוואת העקום.



11) מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות:

א) $2\ln x+\ln y=c$

ב) $xy=c$

ג) $x^2+2y^2=c$

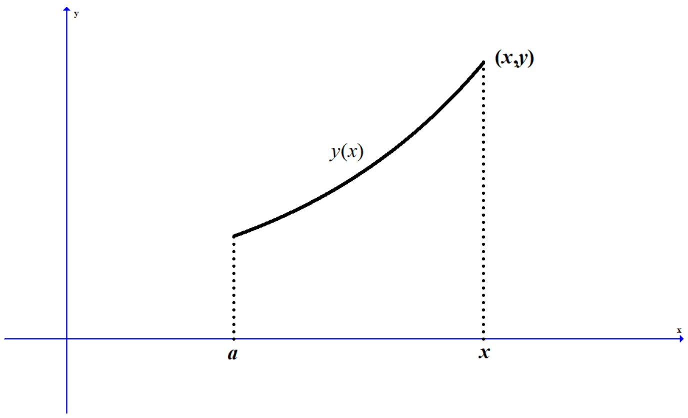
בפרט, מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$ בנקודה $(1,2)$. שרטט.

ד) $x^2+y^2=cx$

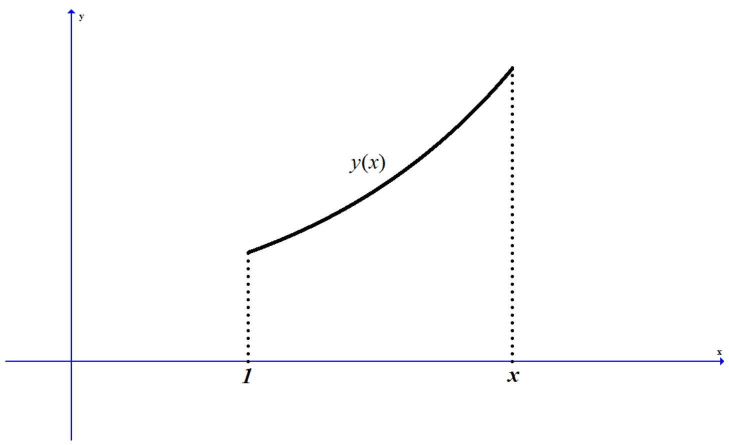
12) מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית של 45 מעלות עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

13) שטח S מוגבל ע"י עקום $y=y(x)$, ציר ה-x, $x=a$ ו x משתנה (ראה ציור).
ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a,y(a))$ ו- $(x,y(x))$.

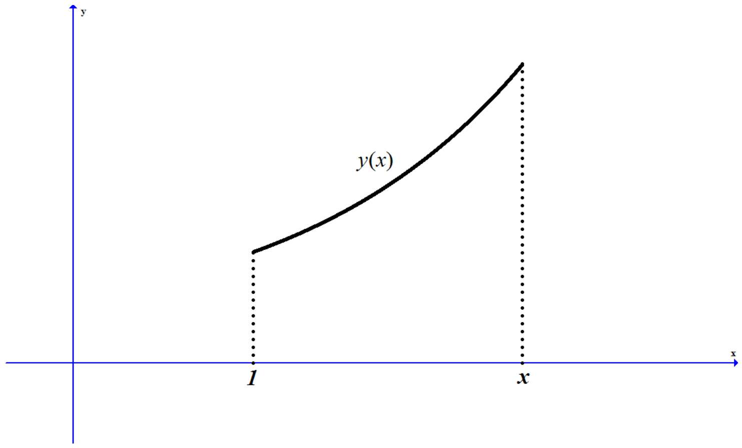
מצא את משוואת העקום.



14) שטח S מוגבל ע"י עקום $y=y(x)$, ציר ה-x, $x=1$ ו x משתנה.
ידוע כי $y(1)=2$ (ראה ציור).
האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$.



15) שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$ ו x משתנה.
ידוע כי $y(1) = 2$ (ראה ציור).
האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $y(x) - 2$.



16) נניח שכמות $y(t)$ גדלה (דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית), כלומר בכל רגע קצב הגידול (הדעיכה) שלו פרופורציונלי לערכו. נניח שבזמן התחלתי מסוים $t = 0$ הכמות היא y_0
ונניח שקבוע הפרופורציה הוא k מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן t .

17) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
ג. באיזה שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר שבכל רגע קצב הגידול פרופורציוני לערכו).

18) האוכלוסיה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.
א. מצא את אחוז הגידול השנתי
ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.

19) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית שנתית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.
א. כמה כסף הפקיד האדם.
ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?

20) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה ראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?

21) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציונילכמותו הנמצאת באותו הרגע.
א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1000 שנים מכמות התחתלתית של 100 גרם?
ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?

22) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 4% כל שבוע. בבריכה שנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 10% כל שבוע.
א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

23) בזמן $t=0$ יש במיכל 2 ק״ג מלח מומסים ב-500 ליטר מים. נניח שמי מלח בריכוז של 0.2 ק״ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 10 דקות.

24) סירה נגררת בקצב של 12 קמ״ש. ברגע $t=0$ כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כח של 20 ק״ג על הסירה. אם משקל החותר והסירה הוא 480 ק״ג וההתנגדות (ק״ג) שווה ל- $1.75v$ באשר v נמדדת ב- מטר/שעה, מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

25) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונאלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אויר קבועה השווה ל- 30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל- 70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

26) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס״מ וגובהו 4 ס״מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונאלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים וב- k את קבוע הפרופורציה.

א. רשום מד״ר עבור גובה פני המים, $h(t)$. מהו תנאי ההתחלה של הבעייה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$. פתור את המד״ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

27) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס״מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס״מ.

א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג 1/64 מנפחו ההתחלתי?

28) מבלון מלא אויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$ כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t . הוכח כי כעבור $\ln 2$ שניות ייקטן נפח הבלון לכדי שמינית מנפחו התחלתי?

תשובות:

(1) $x^2+y^2=k$ (2) $2xy+x^2=7$ (3) $x^3-3y^2x=11$ (4) $x^2+y^2=k$

(5) $y^2=ax$ (6) $y=2xe^{x-2}$ (7) $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$

(8) $2x^2+y^2=k$ (9) $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$ (10) $y=2e^{x^2/4}-1$

(11) (א) $2y^2-x^2=k$ (ב) $y^2-x^2=k$ (ג) $y=ax^2$, $y=2x^2$

(ד) $y=m(x-c)^2$ $y>0$ (12) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$

(13) $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$ (14) לא (15) כן (16) $y(t)=y_0e^{kt}$

(17) (א) $4\cdot e^{0.02\cdot 30}\approx 7.28_{mil}$ (ב) $4\cdot e^{0.02\cdot(-6)}\approx 4.51_{mil}$ (ג) 2106 שנים

(18) (א) 2% (ב) 15.92 שנים (19) (א) 4093.65 ש"ח (ב) 13.41 שנים

(20) 40.77 חודשים (21) (א) 88.69 גרם (ב) 19188 שנים

(22) (א) 3.04 שנים (ב) 14.6 שנים (23) (א) 26.75 ק"ג (ב) 0.942 דקות

(24) (א) 4.09 מטר לשנייה (ב) 72 שניות (ג) 10 מטר לשנייה (25) (א) $43\frac{1}{3}$

(ב) 1.13 שעות (26) (א) $h(0)=4$, $\pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ (ב) $\sqrt{2}+2$

(27) (א) $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ (ב) 4.5 שעות

פרק 14 - טורים עם איברים קבועים

טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p>1)$ 5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p\le 1)$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3^n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ 2) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

<u>התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי</u>

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

(1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$ (2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ (3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

(4 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$ (5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ (6 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

(7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ (8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$ (9 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

<u>הוכח או הפרך</u>

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

פתרונות

(1)

1) מתכנס ל- $11/14$	2) מתכנס ל- $1/3$	3) מתבדר
4) מתכנס ל- $-64/7$	5) מתכנס ל- $11/12$	6) מתכנס ל- 8

(2)

1) מתכנס ל- $1/2$	2) מתכנס ל- $1/12$	3) מתבדר

(3)

1) מתכנס	2) מתבדר	3) מתבדר
4) מתבדר	5) מתכנס	6) מתכנס

(4)

1) מתכנס	2) מתבדר	3) מתבדר

(5)

1) מתבדר	2) מתבדר	3) מתבדר
4) מתבדר	5) מתבדר	6) מתבדר

(6)

1) מתבדר	2) מתבדר	3) מתכנס
4) מתכנס	5) מתבדר	6) מתכנס

(7)

1) מתכנס	2) מתבדר	3) מתכנס
4) מתבדר	5) מתכנס	6) מתכנס
7) מתבדר	8) מתכנס	9) מתכנס

(8)

1) מתבדר	2) מתכנס	3) מתכנס
4) מתכנס	5) מתכנס	6) מתכנס
7) מתכנס	8) מתכנס	9) מתכנס

(9)

1) מתכנס	2) מתכנס	3) מתכנס

(10)

1) מתבדר	2) מתכנס בהחלט	3) מתכנס בתנאי
4) מתכנס בתנאי	5) מתכנס בהחלט	6) מתכנס בהחלט
7) מתכנס בתנאי	8) מתכנס בתנאי	9) מתכנס בתנאי

פרק 15 - טורי פונקציות וטורי חזקות

טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 nx}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ (-\infty<x<\infty)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}\ (-1\le x\le 1)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)\ (\frac{1}{4}\le x\le 4)$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\ (-a\le x\le a)$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}\ (-\infty<x<\infty)$

טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

1) $f(x)=\frac{1}{1+x}$
2) $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$
3) $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$
4) $f(x)=\frac{1}{x-5}$
5) $f(x)=\frac{x}{4x+1}$
6) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$
7) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$
8) $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$
9) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$
10) $f(x)=\ln(1+x)$
11) $f(x)=\ln(1-x)$
12) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$
13) $f(x)=\ln(5-x)$
14) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$
15) $f(x)=\arctan(x/3)$

<u>הערות חשובות:</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

פתרונות

(1)

1) $x>0$ 2) $x\neq 5$ 3) $x<3\frac{9}{10}$ or $x\geq 4\frac{1}{10}$

4) $0<x\neq \frac{1}{n}$ 5) $x>0$ 6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$

(2)

1) מתכנס במידה שווה 2) מתכנס במידה שווה 3) מתכנס במידה שווה

4) מתכנס במידה שווה 5) מתכנס במידה שווה 6) מתכנס במידה שווה

(3)

1) $-1\leq x<1\ ,\ R=1$ 2) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$ 3) $-0.2\leq x\leq 0.2\ ,\ R=0.2$

4) $-1\leq x\leq 1\ ,\ R=1$ 5) $-3<x\leq -1\ ,\ R=1$ 6) $-1<x<1\ ,\ R=1$

7) $x=1\ ,\ R=0$ 8) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$ 9) $-5<x\leq 3\ ,\ R=4$

10) $-\frac{19}{3}<x<-\frac{11}{3}\ ,\ R=4/3$ 11) $-9\leq x\leq 11\ ,\ R=10$ 12) $-7<x<-3\ ,\ R=2$

(4)

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n} \quad (|x|<1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n} \quad (|x|<\frac{1}{3})$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n \quad (|x|<5)$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (|x|<\frac{1}{4})$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (|x|<3)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n \quad (|x|<1)$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n \quad (|x|<\frac{1}{3})$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1} \quad (|x|<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x\leq 1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1\leq x<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$

13) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (-5\leq x<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2} \quad (|x|<\frac{1}{2})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (|x|\leq 3)$

פרק 16 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:
(היעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח בעמוד 79)

1) $f(x)=\sin 2x$
2) $f(x)=x^2e^{-4x}$
3) $f(x)=\sinh x$
4) $f(x)=\sin^2 x$
5) $f(x)=\cos^2 x$
6) $f(x)=2^x$
7) $f(x)=x\cos(4x^2)$
8) $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$
9) $f(x)=\arcsin x$

הערה חשובה: פיתוח לטור מקלורן של 15 פונקציות נוספות תמצא בשאלה 4 בפרק 2 .

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=\ln x$ $\left(x_0=1\right)$
2) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\left(x_0=2\right)$
3) $f(x)=\sin x$ $\left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

1) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$
2) $f(x)=\tan x$
3) $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$
4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$
5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$
6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$
7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$
8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$
9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

1) $\frac{1}{e}$ 2) $\sin 3^{\circ}$ 3) $\arctan 0.25$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב:

1) $\frac{1}{\sqrt{e}}\ (n=3)$ 2) $\cos 4^{\circ}\ (n=1)$ 3) $\ln 1.5\ (n=4)$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$.

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$.

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$.

(9)

א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001 .

ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01 .

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$ 2) $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (\varepsilon = 0.001)$

<u>הערה לגבי קירובים:</u>

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times 10^{-3} = 0.0005$.

אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות

(1)

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(-1<x<1\right)$

(2)

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$ $\left(0<x\le 2\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$ $\left(0<x<4\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(3)

1) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

2) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

3) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

(4)

1) e 2) e^{-2} 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$ 6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

(5)

1) $1/120$ 2) $1/3$ 3) $1/3$

(6)

1) $53/144$ 2) $\pi/60$ 3) $47/192$

(7)

1) $\frac{5}{8}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$

2) 1 בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$

3) $\frac{77}{192}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$

(8)

1) $(\pi/6)^5/5!$ 2) $(0.01)^2/2$ 2) $(0.2)^6/6!$

(9)

1) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$ 2) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

(10)

1) $449/2250$ 2) $39/400$ 3) $143/576$

דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור, התמרות לפלס)

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \quad \rightarrow \quad y' = 0$

2. $y = f^n \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

3. $y = e^f \quad \rightarrow \quad y' = e^f \cdot f'$

4. $y = a^f \quad \rightarrow \quad y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$

5. $y = \ln f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{f} \cdot f'$

6. $y = \sin f \quad \rightarrow \quad y' = \cos f \cdot f'$

7. $y = \cos f \quad \rightarrow \quad y' = -\sin f \cdot f'$

8. $y = \tan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$

9. $y = \cot f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$

10. $y = \arcsin f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

11. $y = \arccos f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

12. $y = \arctan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

13. $y = \operatorname{arccot} f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

14. $y = \sinh f \quad \rightarrow \quad y' = \cosh f \cdot f'$

15. $y = \cosh f \quad \rightarrow \quad y' = \sinh f \cdot f'$

16. $y = \tanh f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$

17. $y = \coth f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$

18. $y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\[2mm] \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\[2mm] 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\[2mm] \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\[2mm] \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\[2mm] \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\[2mm] \cos x=\cos\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\[2mm] \tan x=\tan\alpha\ \Rightarrow\ x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha\ \Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow\ x=\pi k\\[2mm] \cos x=0\Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\\a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^m a^n=a^{m+n}\\\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\\\left(a^m\right)^n=a^{mn}\\(ab)^n=a^n b^n\\\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\\a^0=1\\a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\\\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\\e^x=b\ \Rightarrow\ x=\ln b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0,b>0\\\ln a+\ln b=\ln ab\\\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}\\\ln 1=0\ ,\ \ln e=1\\\ln e^n=n\\\ln x^n=n\ln x\ (x>0)\\e^{\ln x}=x\\e^{k\ln x}=x^k\\e^{-k\ln x}=\dfrac{1}{x^k}\\a^b=e^{b\ln a}\\\ln x=k\ \Rightarrow\ x=e^k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c\\\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & if\ \ a\ge 0\\-a & if\ \ a<0\end{cases}\\|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\\\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\\|x|<a\ \Leftrightarrow\ -a<x<a\\|x|>a\ \Leftrightarrow\ x<-a\ or\ x>a\end{cases}$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות טור מקלורן

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad -1<x\le 1$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad -1\le x\le 1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots \qquad -1<x<1$$

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n \qquad -1\le x\le 1\ (m>0)$$

$$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$-1<x\le 1\ (-1<m<0)$$
$$-1<x<1\ (m\le -1)$$
$$m\ne 0,1,2,3,\ldots$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(\text{for } n=1,2,3\ldots)\ t^n$
$\frac{1}{s^n}$	$(\text{for } n=1,2,3\ldots)\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$
e^{-ks}	$\delta(t-k)$

תכונות נוספות

1) $L[ag(t)+bh(t)]=aL[g(t)]+bL[h(t)]$

2) $L^{-1}\left[aG(s)+bH(s)\right]=aL^{-1}[G(s)]+bL^{-1}[H(s)]$

3) $L^{-1}[F(s)]=e^{-at}L^{-1}[f(s-a)] \quad , \quad L^{-1}[F(s)]=e^{at}L^{-1}[f(s+a)]$

4) $L\left[ay'(t)+by(t)\right]=Y(s)[as+b]-y(0)[a]$

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=Y(s)[as^2+bs+c]-y(0)[as+b]-y'(0)[a]$$

$$L\left[ay'''(t)+by''(t)+cy'(t)+dy(t)\right]=$$

$$Y(s)[as^3+bs^2+cs+d]-y(0)[as^2+bs+c]-y'(0)[as+b]-y''(0)[a]$$

$$L\left[ay''''(t)+by'''(t)+cy''(t)+dy'(t)+ey(t)\right]=$$

$$Y(s)[as^4+bs^3+cs^2+ds+e]-y(0)[as^3+bs^2+cs+d]$$
$$-y'(0)[as^2+bs+c]-y''(0)[as+b]-y'''(0)[a]$$

לדף התמרות לפלס מורחב
http://www.gool.co.il/laplace_table.pdf

סיכום מד"ר

משוואות הניתנות להפרדת משתנים

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה: $f(x)dx = g(y)dy$

אז הפתרון ניתן ע"י: $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

משוואות הומוגניות (ניתנות להפרדת משתנים בעזרת הצבה מתאימה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

כאשר $M(x,y)$ וגם $N(x,y)$ הומוגניות מאותו סדר !

מציבים: $y = v \cdot x$, $dy = dv \cdot x + dx \cdot v$

ומקבלים מד"ר הניתנת להפרדת משתנים.

לאחר האינטגרציה יש להציב $\frac{y}{x}$ במקום v.

הערה: פונקציה $f(x,y)$ **תקרא הומוגנית מסדר** n **אם** $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

מקרה I - $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

פותרים את מערכת המשוואות $a_1x+b_1y+c_1=0\ ,\ \ a_2x+b_2y+c_2=0$

ומקבלים $x=h$ ו- $y=k$.

מציבים $x=X+h,\ y=Y+k$ ומקבלים מד"ר הומוגנית מסדר ראשון.

מקרה II - $a_1b_2=a_2b_1$.

במקרה זה:

מציבים: $z=a_1x+b_1y+c_1$

גוזרים: $\dfrac{dz}{dx}=a_1+b_1\dfrac{dy}{dx}$

$$dy=\frac{1}{b_1}\left(dz-a_1dx\right)$$

ומקבלים משוואה הניתנת להפרדת משתנים במשתנים z ו- x.

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $y'+a(x)y=b(x)$.

הפתרון ניתן ע"י: $y=e^{-A(x)}\left[\int b(x)e^{A(x)}dx+C\right]\quad \left(A(x)=\int a(x)dx\right)$

זכור:

1) $e^{k\ln f(x)}=\left(f(x)\right)^k\quad ,\quad e^{-k\ln f(x)}=\dfrac{1}{\left(f(x)\right)^k}$

2) $\int e^f f'dx=e^f$

משוואת ברנולי (ליניארית על ידי הצבה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה: $y'+a(x)y=y^nb(x)$

אז ההצבה $v=y^{1-n}$ הופכת את המד"ר למד"ר ליניארית מסדר ראשון:

$v'+\left((1-n)\cdot a(x)\right)v=(1-n)\cdot b(x)$.

משוואות מדויקות

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

כך שמתקיים: $M_y=N_x$

אז המשוואה נקראת מדוייקת.

פתרון המשוואה נתון ע"י: $F(x,y)=c$

כאשר ידוע ש: $F_y=N$ **ו-** $F_x=M$

אלגוריתם פתרון:

1. $F(x,y)=C$
2. $F_x=M$
3. $F=\int Mdx=g(x,y)+h(y)$
4. $F_y=N \Rightarrow g_y+h'(y)=N \Rightarrow h(y)=...$
5. $F=g(x,y)+h(y)=C$

הערה: במידה והאינטגרל $F=\int Mdx$ מסובך, ניתן להתחיל מ- $F=\int Ndy$.

משוואות כמעט מדויקות (מדוייקות לאחר הכפלה בגורם אינטגרציה)

נתונה משוואה: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ומתקיים: $M_y \neq N_x$

במקרה כזה המשוואה אינה מדויקת.

ייתכן שקיים גורם אינטגרציה $h(x,y)$ שאם נכפול אותו במשוואה המקורית

נקבל משוואה מדויקת.

כלומר המשוואה $h(x,y)M(x,y)dx+h(x,y)N(x,y)dy=0$ היא מדויקת.

במידה וגורם האינטגרציה אינו מופיע בשאלה מצאו אותו בעזרת השיטות הבאות:

1. אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$ אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.
2. אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$ אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.
3. אם לאחר כינוס איברי המשוואה אתם מזהים את קבוצת האיברים מימין אז השתמשו בגורם האינטגרציה משמאל.

קבוצת איברים	גורם אינטגרציה
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{y^2}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{xy}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$
$xdy+ydx$	$\frac{1}{(xy)^n}$
$xdx+ydy$	$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^n}$

משוואות מסדר ראשון וממעלות גבוהות

המשוואה הכללית מסדר ראשון וממעלה n נתונה ע"י :

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad a_0(x,y) + a_1(x,y)p^1 + a_2(x,y)p^2 + ... + a_n(x,y)p^n = 0 \quad (*)$$

סוג I - משוואות פתירות עבור p

במקרה זה מתייחסים לאגף שמאל של (*) כאל פולינום ב- p .

משווים את הפולינום לאפס ומקבלים : $p = F_1(x,y), p = F_2(x,y), ..., p = F_n(x,y)$

פותרים את המשוואות שהתקבלו, כל אחת מהצורה $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ שפתרונה מהצורה $f(x,y,c) = 0$.הפתרון של (*) הוא המכפלה $f_1(x,y,c) \cdot f_2(x,y,c) \cdot ... \cdot f_n(x,y,c) = 0$.

סוג II– משוואות פתירות עבור y

כלומר, משוואות מהצורה $y = f(x,p)$.

נגזור לפי x את שני האגפים ונקבל: $p = f_x + f_p \cdot \frac{dp}{dx}$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $y = f(x,p)$ ומכאן y .

סוג III– משוואות פתירות עבור x

כלומר, משוואות מהצורה $x = f(y,p)$.

נגזור לפי y את שני האגפים ונקבל: $\frac{1}{p} = f_y + f_p \cdot \frac{dp}{dy}$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $x = f(y,p)$ ומכאן y .

הורדת סדר המשוואה

1) אם המשוואה היא מהצורה $f(x,y',y'')=0$ אז מציבים $y'=z(x),\quad y''=z'$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

לבסוף $y'=z(x) \quad \Leftarrow \quad y=\int z(x)dx$:.

2) אם המשוואה היא מהצורה $f(y,y',y'')=0$ אז מציבים $y'=z(y),\quad y''=z'\cdot z$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

לבסוף: $\frac{dy}{dx}=z(y) \quad \Leftarrow \quad \int \frac{1}{z(y)}dy=\int dx$.

משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים

הצורה הכללית של משוואה הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

אלגוריתם פתרון:

1. נרשום את הפולינום האופייני של המשוואה (1) לפי $y^{(n)} \Rightarrow k^n$ ונמצא את שורשיו.

2. נחלק את השורשים לקבוצות :

קבוצה ראשונה – שורשים ממשיים ושונים $k_1\neq k_2\neq\ldots\neq k_m$

תרומתם לפתרון הכללי: $c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_me^{k_mx}$

קבוצה שנייה – שורשים ממשיים ושווים $k_1=k_2=\ldots=k_m=\boldsymbol{k}$ **(שורש מריבוי m)**

תרומתם לפתרון הכללי: $c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}+c_3x^2e^{kx}+\ldots+c_mx^{m-1}e^{kx}$

קבוצה שלישית – שורשים מרוכבים

כל זוג שורשים מרוכבים $k_{1,2}=a\pm bi$ תורם לפתרון הכללי :

$$e^{ax}\left[c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right]$$

הערה : במידה ומתקיים $k_{1,2}=a\pm bi$, $k_{3,4}=a\pm bi$ רושמים :

$$e^{ax}\left[c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right]+e^{ax}\left[c_1x\cdot\cos(bx)+c_2x\cdot\sin(bx)\right]$$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

(1) $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x)$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y=y_h+y_p$

כאשר: y_h הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל- (1). (מסמנים גם $\bar{y}$).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם y^*).

להלן שיטת השוואת מקדמים למציאת הפתרון הפרטי :

מכינים רשימה המכילה את כל הפונקציות שמופיעות ב- $Q(x)$ והפונקציות המתקבלות מ- $Q(x)$ עלידי גזירה. כאשר בכל אחת מהפונקציות הנ"ל מתעלמים מהקבועים.
נניח שרשימת הפונקציות שהתקבלו מהתהליך הנ"ל היא $f_1(x), f_2(x),..., f_t(x)$
אזי, פתרון פרטי יהיה מהצורה $y_p=A\cdot f_1(x)+B\cdot f_2(x)+C\cdot f_3(x)+...+G\cdot f_t(x)$ (3)

כאשר $A,B,C,...,G$ הם קבועים. למשל,

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=x^3$ פתרון פרטי $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=e^x+e^{3x}$ פתרון פרטי $y_p=Ae^x+Be^{3x}$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=\sin 2x$ פתרון פרטי $y_p=A\sin(2x)+B\cos(2x)$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=xe^{-x}$ פתרון פרטי $y_p=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=e^{2x}\cos 4x$ פתרון פרטי $y_p=Ae^{2x}\cos 4x+Be^{2x}\sin 4x$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=3x^2+x\cdot\cos 4x$ פתרון פרטי

$$y_p=Ax^2+Bx+C+D\cos 4x+E\sin 4x+Fx\cos 4x+Gx\sin 4x$$

מהצבת (3) ב (1) נוכל למצוא את הקבועים $A,B,C,...,G$.

יש לשנות את התהליך במקרה הבא:

אם אחד (או יותר) מהמחוברים בפתרון הפרטי הראשוני ,מופיע בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה יש לכפול אותו (אותם) בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שמניבה פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע בפתרון ההומוגני או בפתרון הפרטי הראשוני.**למשל:**

נתבונן במשוואה $y'''-y''-8y'+12y=\underbrace{e^{2x}+x^2}_{Q(x)}$

הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא $y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}$.

פתרון פרטי **ראשוני** $y_p \overset{\text{ראשוני}}{=} Ax^2+Bx+C+De^{2x}$. עתה, ב-"זוני" y_p מופיע המחובר De^{2x} שמופיע גם בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה לכן עלינו להכפיל אותו בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שתניב פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע במד"ר ההומוגנית או בפתרון הפרטי הראשוני. מכאן שעלינו להכפיל את De^{2x} ב- x^2 ולרשום את הביטוי שהתקבל $Dx^2\cdot e^{2x}$ בפתרון הפרטי. נקבל אם כן שהפתרון הפרטי הוא מן הצורה $y^*=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$(1)\quad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x)$$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y=y_h+y_p$

כאשר: y_h הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל- (1). (מסמנים גם $\bar{y}$).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם y^*).

להלן שיטת וריאציית הפרמטרים למציאת הפתרון הפרטי:

(היות ובד״כ מדובר על מד״ר מסדר שני או שלישי נתחיל בכך)

מד״ר מסדר שני –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay''+by'+cy=Q(x)$

<u>שלב I</u>

פותרים את המד״ר ההומוגנית המתאימה : $ay''+by'+cy=0$ ומקבלים $y_h=c_1y_1+c_2y_2$

<u>שלב II</u>

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי : $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

<u>שלב III</u>

מציבים בנוסחה : $y_p=y_1(x)\int\frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)}dx$

מד"ר מסדר שלישי –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay'''+by''+cy'+dy=Q(x)$

<u>שלב I</u>

פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה: $ay'''+by''+cy'+dy=0$
ומקבלים $y_h=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

<u>שלב II</u>

מחשבים את: $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix}$

מחשבים את: $W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 1 & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix}$, $W_2(x)=\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & 1 & y_2'' \end{vmatrix}$, $W_3(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & 1 \end{vmatrix}$

<u>שלב III</u>

מציבים בנוסחה: $y_p=y_1\int\frac{W_1\cdot Q}{W}dx+y_2\int\frac{W_2\cdot Q}{W}dx+y_3\int\frac{W_3\cdot Q}{W}dx$

מד"ר מסדר n–

<u>שלב I</u>
פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה ומקבלים $y_h=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$

<u>שלב II</u>

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי: $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

מחשבים את $W_1,W_2,\ldots,W_n$, כאשר W_i היא הדטרמיננטה המתקבלת מהוורונסקיאן W
על ידי החלפת העמודה ה- i בוקטור העמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>שלב III</u>
מציבים בנוסחה: $y_p=y_1\int\frac{W_1\cdot Q}{W}dx+y_2\int\frac{W_2\cdot Q}{W}dx+\ldots+y_n\int\frac{W_n\cdot Q}{W}dx$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות (שיטה אופרטורית)

משוואה לינארית לא הומוגנית במקדמים קבועים היא משוואה מהצורה

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_2 y'' + A_1 y' + A_0 y = Q(x)$$

בשיטה האופרטורית מסמנים: $y' = Dy \ , \ y'' = D^2 y \ , \ \dots$ (D אופרטור הגזירה),
ומקבלים:

$$\left(A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} +,,, + A_2 D^2 + A_1 D + A_0\right) y = Q(x)$$

או בקיצור

$$F(D)y = Q(x)$$

פתרון המשוואה נתון על ידי $y = y_h + y_p$

y_h - פתרון המשוואה $F(D)y = 0$

y_p - פתרון פרטי של המשוואה $F(D)y = Q(x)$

מציאת y_p

1. אם המד"ר מהצורה $F(D)y = e^{ax+b}$ אז $y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax+b} = \frac{1}{F(a)} e^{ax+b}$

במידה והמכנה מתאפס ניעזר בנוסחה $\frac{1}{(D-a)^n} e^{ax+b} = \frac{x^n}{n!} e^{ax+b}$.

2. א. אם המד"ר מהצורה $F(D^2)y = \sin(ax+b)$
אז $y_p = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$.

ב. אם המד"ר מהצורה $F(D)y=\sin(ax+b)$

אז:

* רשום $y_p=\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b)$
* החלף כל הופעה של D^2 ב- $-a^2$.
* לאחר ההחלפה הנ"ל תקבל:

$$\frac{1}{AD+B}\sin(ax+b)$$

$$\frac{1}{AD+B}\frac{AD-B}{AD-B}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD-B}{A^2D^2-B^2}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD-B}{A^2(-a^2)-B^2}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD\sin(ax+b)-B\sin(ax+b)}{A^2(-a^2)-B^2}$$

$$\frac{A\cos(ax+b)a-B\sin(ax+b)}{A^2(-a^2)-B^2}$$

* אם במקום קוסינוס רשום סינוס פועלים באופן זהה.

3.

$$F(D)\left[e^{ax}h(x)\right]=e^{ax}F(D+a)h(x)$$

$$\frac{1}{D+2}e^{3x}\sin x=e^{3x}\frac{1}{D+5}\sin x$$

התמרת לפלס

הגדרה:

התמרת לפלס של פונקציה $g(t)$ שתסומן ב- $L[g(t)]$ הוא פונקציה חדשה במשתנה s שתסומן ב-
G(s) והמוגדרת ע"י: $G(s)=L[g(t)]=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$
ההתמרה ההפוכה נתונה ע"י: $L^{-1}[G(s)]=g(t)$

כללים:

1. אם $g(t)$ מחזורית עם מחזור ω אז התמרת לפלס נתונה ע"י: $G(s)=\dfrac{\int_0^{\omega} e^{-st}g(t)dt}{1-e^{-\omega s}}$

זכור:

$$\int e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int e^{-st}\cdot tdt=-\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)$$

$$\int e^{-st}\cdot t^2dt=-\frac{1}{s^3}e^{-st}(s^2t^2+2st+2)$$

$$\int e^{-st}\sin(at)dt=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s\cdot\sin(at)-a\cos(at)]$$

$$\int e^{-st}\cos(at)dt=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s\cdot\cos(at)+a\sin(at)]$$

.2 $L[ag(t)+bh(t)]=aL[g(t)]+bL[h(t)]$

$$L^{-1}\left[aG(s)+bH(s)\right]=aL^{-1}[G(s)]+bL^{-1}[H(s)]$$

Examples: $L[2\sin t+5t^2]=2L[\sin t]+5L[t^2]\ ;\ L^{-1}\left[\frac{4}{s}+5e^{-s}\right]=4L^{-1}[\frac{1}{s}]+5L^{-1}[e^{-s}]$

.3 $L^{-1}[F(s)]=e^{-at}L^{-1}[f(s-a)]$

$$L^{-1}[F(s)]=e^{at}L^{-1}[f(s+a)]$$

Examples: $L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2+4}]=e^{-2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]\ ;\ L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2+4}]=e^{2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]$

.4

$$L\left[ay'(t)+by(t)\right]=Y(s)[as+b]-y(0)[a]$$

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^2+bs+c]-y(0)[as+b]-y'(0)[a]$$

$$L\left[ay'''(t)+by''(t)+cy'(t)+dy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^3+bs^2+cs+d]-y(0)[as^2+bs+c]-y'(0)[as+b]-y''(0)[a]$$

$$L\left[ay''''(t)+by'''(t)+cy''(t)+dy'(t)+ey(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^4+bs^3+cs^2+ds+e]-y(0)[as^3+bs^2+cs+d]-y'(0)[as^2+bs+c]-y''(0)[as+b]-y'''(0)[a]$$

<u>פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס:</u>

נתונה מד"ר מהצורה $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=g(t)$ עם תנאי התחלה $y(0)=y_0\ ;\ y'(0)=y_1$.

<u>שלב I</u>

מפעילים את התמרת לפלס על שני אפי המשוואה ומקבלים:

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=L\left[g(t)\right]$$

מכאן: $Y(s)[as^2+bs+c]-y_0[as+b]-y_1[a]=G(s)$

<u>שלב II</u>

מבודדים מהמשוואה האחרונה את $Y(s)$ ומקבלים:

$$Y(s)=\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}$$

<u>שלב III</u>

מבצעים התמרת לפלס הפוכה לשני האגפים של המשוואה האחרונה ומקבלים את $y(t)$:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}\right]$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(\text{for}\, n = 1, 2, 3\ldots)\, t^n$
$\frac{1}{s^n}$	$(\text{for}\, n = 1, 2, 3\ldots)\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(a\,t)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(a\,t)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(a\,t)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(a\,t)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(a\,t)+a\,t\cos(a\,t))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות:

.1
נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$ של פונקציה $f(t)$
ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

.2קונוולוציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

פתרון מד"ר בעזרת טורים - נקודה רגולרית

נתונה מד"ר מסדר שני : $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)=r(x)$

שלב I

מציבים במד"ר :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$
$$+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\dots$$
$$+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+(n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\dots$$
$$+(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-4}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

שלב II

משווים את המקדם של x^n באגף ימין עם המקדם של x^n באגף שמאל ומקבלים נוסחת נסיגה עבור a_n.

שלב III

במידה ונוסחת הנסיגה לא נותנת את כל המקדמים $a_0,a_1,\dots$ משווים מקדמים של חזקות שוות בשני האגפים (מהחזקה הקטנה ביותר ומעלה) עד לקבלת כל המקדמים הדרושים.

הערות :

1. אם במד"ר המקורית מופיעה פונקציה שהיא איננה פולינום, מחליפים אותה בטור מקלורן שלה. (רשימת טורים בעמוד האחרון בחוברת www.gool.co.il/hedva1.pdf).
2. שים לב כי בהינתן תנאי התחלה, מתקיים : $y(0)=a_0$, $y'(0)=a_1$.
   במידה ולא נתון תנאי התחלה אנו מניחים ש- a_0 ו- a_1 ידועים ומבטאים את יתר המקדמים בעזרתם.
3. באופן דומה פותרים מד"ר מכל סדר בעזרת טורים. בהקשר זה יש לזכור כי ,
   $y''(0)=2!a_2$, $y'''(0)=3!a_3$, $y''''(0)=4!a_4$,..., $y^{(n)}(0)=n!a_n$.

פתרון מערכת מד"ר כללית 2X2 - שיטת החילוץ

נתונות שתי משוואות עם פונקציות $y(x)$ ו- $z(x)$ כך שלפחות אחת מהן משוואה דיפרנציאלית.

אסטרטגיית הפתרון :

נחלץ את אחת הפונקציות ממשוואה אחת ונציב במשוואה השנייה.

במידה והתהליך אינו מתאפשר ניתן לגזור את המשוואות.למשל, אם נתונה המערכת

$$\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} & (1) \\ y'-z''+3z=x^2 & (2) \end{cases}$$

נגזור את המשוואה השנייה. נחלץ מהמשוואה השנייה את y'' ונציב אותו במשוואה הראשונה.

פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - שיטת הלכסון

מערכת הומוגנית:

מערכת מהצורה:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

או בכתיב מטריצות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}(t)}$$

<u>אלגוריתם פתרון</u> :

<u>שלב I</u>

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ה-ע"ע לא בהכרח שונים).

<u>שלב II</u>

מצא את הוקטורים העצמיים של המטריצה A : $v_1, v_2, \ldots, v_n$

<u>שלב III</u>

$$\underline{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}v_1+c_2e^{\lambda_2 t}v_2+\ldots+c_ne^{\lambda_n t}v_n$$

מערכת לא הומוגנית:

מערכת מהצורה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{\prime} \\ x_2^{\prime} \\ \vdots \\ x_n^{\prime} \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

<u>אלגוריתם פתרון (וריאציית פרמטרים):</u>

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}(t))$ הוא הסכום של הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה $(\underline{x}_h(t))$ ופתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}_p(t))$.

כלומר: $\underline{x}(t)=\underline{x}_h(t)+\underline{x}_p(t)$

<u>שלב I</u>

פתור את המערכת ההומוגנית המתאימה ונקבל: $\underline{x}_h(t)=c_1\underbrace{e^{\lambda_1 t}v_1}_{\underline{x}_1}+c_2\underbrace{e^{\lambda_2 t}v_2}_{\underline{x}_2}+\ldots+c_n\underbrace{e^{\lambda_n t}v_n}_{\underline{x}_n}$

<u>שלב II</u>

פתור את מערכת המשוואות הבאה עבור הנעלמים $C_1^{'}(t),C_2^{'}(t),\ldots,C_n^{'}(t)$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \vdots & \underline{x}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1^{'} \\ C_2^{'} \\ \vdots \\ C_n^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

<u>שלב III</u>

בצע אינטגרציה לקבלת $C_1(t),C_2(t),\ldots,C_n(t)$

<u>שלב IV</u>

הפתרון הפרטי הוא: $\underline{x}_p(t)=C_1(t)\cdot e^{\lambda_1 t}v_1+C_2(t)\cdot e^{\lambda_2 t}v_2+\ldots+C_n(t)\cdot e^{\lambda_n t}v_n$

הערה: האלגוריתם הנ"ל עובד אם ורק אם למטריצה יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

פתרון נומרי (מקורב) של מד"ר מסדר ראשון (שיטת רונגה-קוטה)

נתונה מד"ר מסדר ראשון $y' = f(x,y)$.

נתון: $y(x_0) = y_0$

מחפשים: $y(x_1)$

תשובה: $y(x_1) = y_0 + k$

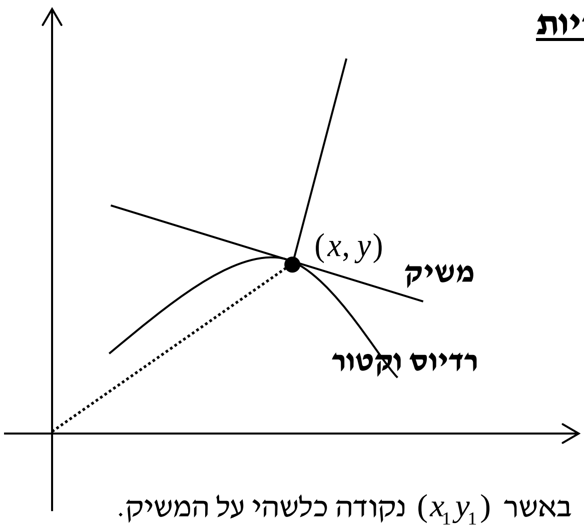
כאשר:

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$$
$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$h = x_1 - x_0$$

בעיות מילוליות גיאומטריות



נורמל

$\frac{dy}{dx}$ שיפוע המשיק לעקום בנקודה (x,y).

$-\frac{dx}{dy}$ שיפוע הנורמל לעקום בנקודה (x,y).

$\frac{y}{x}$ שיפוע רדיוס וקטור.

$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x)$ משוואת המשיק לעקום בנקודה (x,y) באשר $(x_1 y_1)$ נקודה כלשהי על המשיק.

$y_1 - y = -\frac{dx}{dy}(x_1 - x)$ משוואת הנורמל לעקום בנקודה (x,y) באשר $(x_1 y_1)$ נקודה כלשהי על הנורמל.

חיתוך המשיק עם ציר x וציר y בהתאמה: $x - y\frac{dx}{dy}$ ו- $y - x\frac{dy}{dx}$

חיתוך הנורמל עם ציר x וציר y בהתאמה: $x + y\frac{dy}{dx}$ ו- $y + x\frac{dx}{dy}$

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \le x \le b$ הוא $\int_a^b y(x)dx$.

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \le x \le b$ מסתובב סביב ציר x. הנפח: $\pi\int_a^b y^2(x)dx$

מציאת מסילות אורתוגונליות למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x,y,c)=0$ למציאת משפחת העקומות האורתוגונליות:

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)
ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $-\frac{dx}{dy}$.
ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.

מציאת מסילות בזוית θ למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x,y,c)=0$ למציאת משפחת העקומות בזוית θ :

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)
ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $\frac{y'-\tan\theta}{1+y'\tan\theta}$.
ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.