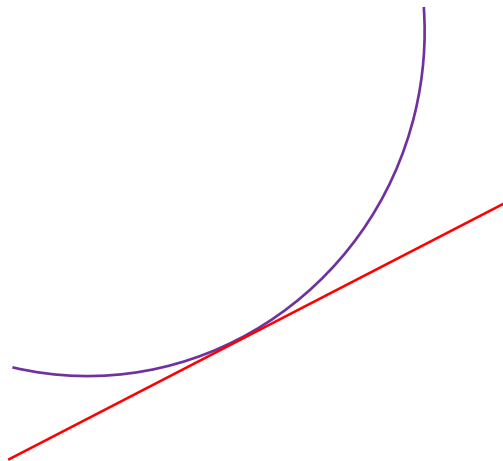


מתמטיקה

לכלכלנים

ב'



גיא סלומון

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס:

<http://www.gool.co.il/%D7%9E%D7%AA%D7%9E%D7%98%D7%A7%D7%94/%D7%97%D7%93%D7%95%D7%90-1>

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GOOL
בשביל התירגול

תוכן

4	פרק 1 – אינטגרלים
4	אינטגרלים לא מסוימים
6	אינטגרלים בשיטת ההצבה
8	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
10	האינטגרל המסוים
11	חישוב שטחים
13	פרק 2 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)
14	פרק 3 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)
14	פרק 4 - גזירת האינטגרל
15	פרק 5 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)
16	נוסחאות - גבולות
17	נוסחאות - נגזרות
18	נוסחאות - אינטגרלים
19	נוסחאות - טריגו
20	נוסחאות - אלגברה
21	נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות
23	פרק 6 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות
26	פרק 7 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות
29	פרק 8 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים
31	פרק 9 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם
33	פרק 10 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים
33	עקומות שוות ערך
34	נגזרות חלקיות
35	פרק 11 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)
37	פרק 12 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
39	פרק 13 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
41	פרק 14 - משוואות מסדר ראשון
41	פרק 14.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים
42	פרק 14.2 - משוואה לינארית

פרק 1 – אינטגרלים

אינטגרלים לא מסוימים

- בסרטון זה הסבר על אינטגרלים לא מסוימים.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$\int \frac{1}{x^2} dx$.3	$\int x^4 dx$.2	$\int 4dx$.1
$\int 4x^{10} dx$.6	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$.5	$\int \sqrt{x} dx$.4
$\int (x^2 + 1)^2 dx$.9	$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx$.8	$\int (2x^2 - x + 1) dx$.7
$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.12	$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$.11	$\int (x^2 + 1)(x+2) dx$.10
$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$.15	$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$.14	$\int (4x+1)^{10} dx$.13
$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$.18	$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$.17	$\int \sqrt[3]{4x-10} dx$.16
$\int \frac{1}{4x} dx$.21	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$.20	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$.19
$\int \frac{1}{4x-1} dx$.24	$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$.23	$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$.22
$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$.27	$\int \frac{4x+1}{x+2} dx$.26	$\int \frac{x+3}{x+2} dx$.25
$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$.30	$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$.29	$\int (e^{x+1})^2 dx$.28
		$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$.31

פתרונות

$$4 \frac{x^{11}}{11} + c \quad (6) \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \quad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) \quad -\frac{1}{x} + c \quad (3) \quad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \quad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \quad -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \quad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$\frac{3}{16} \cdot \sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) \quad -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \quad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{11}}{11} + c \quad (13)$$

$$-\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + c \quad (19) \quad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) \quad 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$(24) \quad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) \quad \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|x| + c \quad (21) \quad \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$4[x - 1.75\ln|x+2|] + c \quad (26) \quad x + \ln|x+2| + c \quad (25) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|4x-1| + c$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln(2/5)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln(16/5)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (29) \quad \frac{1}{2}e^{2x+2} + c \quad (28) \quad \frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$-\left[x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] + c \quad (31) \quad 8e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{4}{3}x} + c \quad (30)$$

אינטגרלים בשיטת ההצבה

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad .3 \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad .2 \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad .1$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad .6 \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad .5 \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad .4$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad .8 \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad .7$$

פתרונות

$$2 \left[\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right] + c \quad (3) \quad \frac{2}{3} \left[\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3+4}^3 \right] + c \quad (2) \quad \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + c \quad (1)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (6) \quad \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (5) \quad \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad -\frac{1}{4} \left[\frac{(1-x^4)^{-1}}{-1} - \ln |1-x^4| \right] + c \quad (7)$$

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad .1 \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad .2 \quad \int \frac{1}{x^2-4} dx \quad .3$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad .4 \quad \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad .5 \quad \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad .6$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad .7 \quad \int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad .8$$

• בסרטון זה הסבר על הגדרת הפולינום וחילוק פולינום.

• בסרטון זה המשך הסבר על חילוק פולינומים.

חשב את התרגילים הבאים:

$$\int \frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10} dx \quad .11 \quad \int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1} dx \quad .10 \quad \int \frac{4x^2+x-1}{x-2} dx \quad .9$$

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad .12 \quad \int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad .13 \quad \int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad .14$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad .15 \quad \int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad .16$$

פתרונות

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3) \quad -\frac{1}{3(x-1)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2) \quad \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5) \quad \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5} \ln|x+5| + c \quad (4)$$

$$\ln|x-2| + 4 \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} - \ln|x+2| + c \quad (7) \quad \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (12) \quad 4x^2 + 10x + 1 \quad (11) \quad x^2 + 1 \quad (10) \quad 4x + 9 \quad (9) \quad 6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (8)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c \quad (15) \quad x^3 - x^2 + x + c \quad (14) \quad \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (13)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (16)$$

האינטגרל המסוים

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int_0^1 xe^{-x} dx & \text{ג.} & \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx & \text{ב.} & \int_1^4 (x^2-4x+1) dx & \text{א.} \\ \int_0^\pi \cos^2 10x dx & \text{ו.} & \int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5} dx & \text{ה.} & \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx & \text{ד.} \\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} & & \int_0^4 f(x) dx & \text{ז.} & & \\ & & \int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx & \text{ח.} & & \end{array}$$

2. נתונה פונקציה רציפה f . הוכח:

$$\begin{array}{l} \text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \\ \text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \end{array}$$

פתרונות

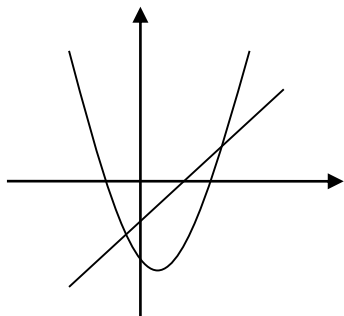
$$\begin{array}{l} \text{1) א. } -\frac{18}{3} \quad \text{ב. } \ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{ג. } -2e^{-1} + 1 \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \arctan 6 - \arctan 3 \quad \text{ו. } \frac{1}{2}\pi \quad \text{ז. } \frac{17}{22} \\ \text{ח. } \frac{2}{3}[-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5}] \end{array}$$

חישוב שטחים

• **בסרטון זה הסבר על חישוב שטחים.**

1. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x - 12, \quad g(x) = x - 6$$

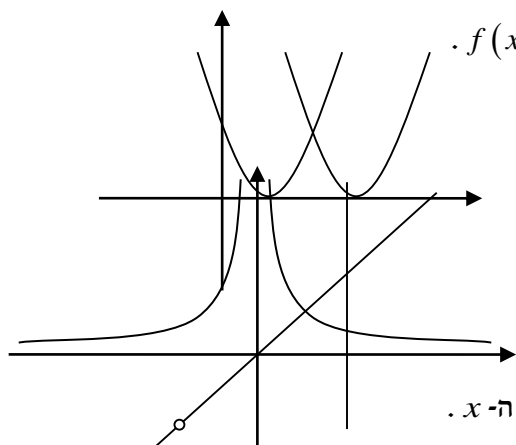


2. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$

3. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ וציר ה- x .

4. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x .

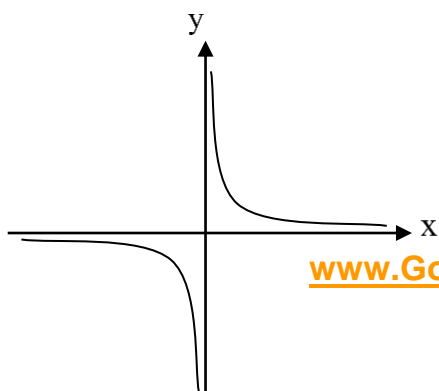
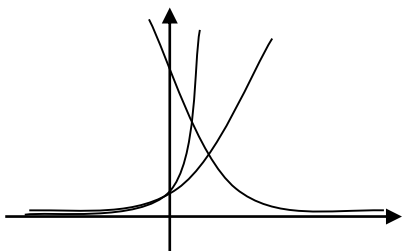


5. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 2$ וציר ה- x .

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$

חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x .
אפשר להשאיר \ln בתשובה.

פתרונות

$$(1) \quad S = 57 \frac{1}{6} \quad (2) \quad S = \frac{1}{2} \quad (3) \quad S = 8 \quad (4) \quad S = \frac{2}{3} \quad (5) \quad S = 1$$

$$(6) \quad S = 3 \frac{1}{3} \quad (7) \quad S = \ln 4$$

פרק 2 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 3 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{1+e^x}}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 4 - גזירת האינטגרל

- (1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדו"א.
 (2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $a(x), b(x)$ גזירות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t}{\sin^2 x} dt \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

פרק 5 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} \quad (8) \quad \int_1^\infty x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_1^\infty \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^\infty x e^{-x^2} \quad (5)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_3^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx \quad (4) \quad \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8) \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_1^\infty (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad (5)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר x עבור $x \leq 1$.

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \text{ar cot } f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \text{coth } f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורןתחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0) \\ -1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0) \\ -1 < x < 1 \quad (m \leq -1) \\ m \neq 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

פרק 6 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x - y}{x^2 + yx + y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהייה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 2 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות

(1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור. (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה. - כל המרחב. (8) ת.ה. - כל המרחב.

(2) (1) 1 (2) $\frac{1}{12}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5.

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

פרק 7 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

הערת סימון:

$$f = f(x, y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

פתרונות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) הנגזרות החלקיות בנקודה (0, 0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0, 0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 8 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^3$, $z = \ln(x^2 - y^2)$. חשב z_u , z_v .

(2) נתון $v = 4t + k^2$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial m}$, $\frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z = f(x^2 - y^2)$. הוכח $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון $z = f(xy)$. הוכח $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון $z = f(x - y, y - x)$. הוכח $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון $w = f(x - y, y - z, z - x)$. הוכח $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$. הוכח $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

(9) נתון $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$. הוכח $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z = xy + x f\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

(11) נתון $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

(12) נתון $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$. הוכח $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy} = u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1, \pi)$ אם ידוע ש- $f'(0) = 2$, $g'(0) = 1$.

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$$

$$א. \text{ הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$ב. \text{ הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$ג. \text{ הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$(15) \text{ נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$\cdot u_x = v_y, u_y = -v_x \text{ קושי-רימן, כלומר מקיימות}$$

הוכח כי:

$$א. u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$ב. h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, x = r \cosh s, u = f(x, y)$$

$$\text{ הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות

$$(13) \text{ ג. } -e$$

פרק 9 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם

נוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.

ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן : $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדוייק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל

מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית

באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

(9) שינוי מדויק 0.06472 , שינוי מקורב 0.06153.

5% (10)

$2\frac{7}{3200}$ (11)

פרק 10 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \quad \text{נגדיר } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט. הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

פרק 11 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה

מתקדמת)

שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$ לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

שיטת הריבועים הפחותים

(7) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y = h(x)$

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי:

$$(2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \text{ הנקי } h(x) = ax + b$$

$$(-1, 2), (2, 0), (0, -2) \text{ הנקי } h(x) = ax^2 + bx$$

$$(10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \text{ הנקי } h(x) = ax + \frac{b}{x}$$

$$(4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \text{ הנקי } h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$$

$$(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12) \text{ הנקי } h(x) = ax^2 + bx + c$$

(8) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצא ישר $y = ax + b$ כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- a ו- b המתקבלים מפתרון המשוואות

$f_a = 0, f_b = 0$ נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי

המרחקים האנכיים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

פתרונות

(2) $(0,0)$ מקסימום.

(4) אין קיצון. (1,2) אוקף.

(6) 0.375

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (\text{ב.7})$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (\text{ד.7})$$

(1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

(3) אין קיצון. (1,2) אוקף.

(5) $(0.5, 1, 1)$ מינימום.

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (\text{א.7})$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (\text{ג.7})$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (\text{ה.7})$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

פרק 12 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad \text{נתונה בעיית הקיצון} \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad \text{נתונה בעיית הקיצון} \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצור פונקציית ייצור $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצור נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצור (אל תפתור).

פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) & \min(-2, -3) & (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & & \text{Max}(6, 2) & (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & & (6, 2) & (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & & 7 / \sqrt{45} & (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & & \text{Max}(6, 2) & (11) \\ & & & \min\{2K + L\} & ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 & (13) \end{array}$$

פרק 13 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי

לגרנג'ו

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצא נקי על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנקי $(1, 2, 3)$.
 ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

- (6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות

- (1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4) .
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) (0, 0, 1) , (0, 0, -1) .
- (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10 .

פרק 14 - משוואות מסדר ראשון

פרק 14.1 - משוואות הניתנות להפרדת משתנים

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

תשובות:

- (1) $y = \pm\sqrt{x^2 + k}$ (2) $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k}$ (3) $y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}$, $y = 0$
 (4) $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c$ (5) $\frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1|$ (6) $\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$
 (7) $\frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c$, $y = -2$ (8) $y = 2 \tan(2t^2 + k)$ (9) $x = 1 + \tan(t + c)$
 (10) $y = -\frac{1}{\cos x}$ (11) $\ln|y| = \tan x + \ln 5$ (12) $\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$

פרק 14.2 - משוואה לינארית

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

תשובות:

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$