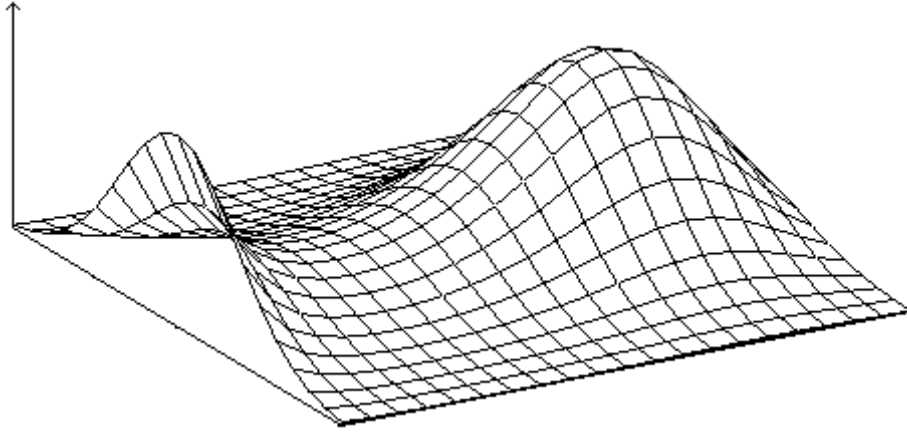


מתמטיקה II



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: חדו"א 2

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - טור טיילור/מקלורן.....
6	פתרונות
7	פרק 2 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות.....
9	פתרונות
10	פרק 3 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות.....
12	פתרונות
13	פרק 4 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים.....
14	פתרונות
15	פרק 5 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט.....
16	פתרונות
17	פרק 6 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים.....
17	פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות.....
18	שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח).....
18	פתרונות
19	פרק 7 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם.....
19	נוסחת טיילור.....
19	הדיפרנציאל השלם.....
20	פתרונות
21	פרק 8 - גבול של פונקציה.....
25	פתרונות
26	פרק 9 - חזרה אלגברית.....
26	חזקות ומשוואות מעריכיות.....
27	לוגריתמים.....
30	פתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה.....
30	חילוק פולינומים.....
31	אי-שוויונים.....

פרק 1 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:
(היעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח בעמוד 79)

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

הערה חשובה: פיתוח לטור מקלורן של 15 פונקציות נוספות תמצא בשאלה 4 בפרק 2.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב:

$$(n=4)\ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1)\cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1) \quad (8)$$

- א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$.
- ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$.
- ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$.
- (9)

- א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001.
- ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01.
- (10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \quad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה**, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$. אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>
(3)	(2)	(1)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>	$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>
(6)	(5)	(4)
$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ <p align="center">$(-1 < x < 1)$</p>	$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ <p align="center">$(-1 \leq x < 1)$</p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>
(9)	(8)	(7)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$ <p align="center">$(-\infty < x < \infty)$</p>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$ <p align="center">$(0 < x < 4)$</p>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ <p align="center">$(0 < x \leq 2)$</p>
(3)	(2)	(1)
$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$	$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots$
(3)	(2)	(1)
$\ln \frac{3}{2}$	$\ln 2$	\sqrt{e}
(9)	(8)	(3)
$\cos 1$	$\sin 1$	e^{-2}
(7)	(6)	(2)
$1/3$	$\pi/4$	e
(3)	(5)	(1)
$47/192$	$\pi/60$	$1/120$
(3)	(2)	(1)
$\frac{77}{192}$	$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$	$\frac{5}{8}$
(3)	(2)	(1)
$\frac{1}{160}$	$(0.2)^6 / 6!$	$(0.01)^2 / 2$
(3)	(2)	(2)
$143/576$	$ x < \sqrt[3]{9/100}$	$(\pi/6)^5 / 5!$
(3)	(2)	(1)
$39/400$	$ x < \sqrt[5]{3/25}$	$449/2250$
(2)	(1)	(1)

פרק 2 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x - y}{x^2 + yx + y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות

- (1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור. (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה. - כל המרחב. (8) ת.ה. - כל המרחב.
- (2) (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5.
- (3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.
- (5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

פרק 3 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

הערת סימון:

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$ $f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$ $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

פתרונות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) (3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0, 0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0, 0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 4 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^3$, $z = \ln(x^2 - y^2)$. חשב z_u , z_v .

(2) נתון $v = 4t + k^2$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial m}$, $\frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z = f(x^2 - y^2)$. הוכח $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון $z = f(xy)$. הוכח $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון $z = f(x - y, y - x)$. הוכח $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון $w = f(x - y, y - z, z - x)$. הוכח $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$. הוכח $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

(9) נתון $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$. הוכח $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

(11) נתון $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

(12) נתון $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$. הוכח $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy} = u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1, \pi)$ אם ידוע ש- $f'(0) = 2$, $g'(0) = 1$.

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$$

$$\text{א. הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$\text{ב. הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$\text{ג. הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

(15) נתון $z = h(u, v)$ ונתון כי $u = f(x, y), v = g(x, y)$ מקיימות את מישוואת

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

הוכח כי:

$$\text{א. } u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ כלומר } u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר}$$

$$\text{ב. } h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, x = r \cosh s, u = f(x, y)$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות

$$(13) \text{ ג. } -e$$

פרק 5 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2$$

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה ?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy)$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: $\hat{u} = (x, y)$ או $\hat{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

למשל, $\hat{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \hat{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\hat{v} = (x, y, z)$ או $\hat{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל, $\hat{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \hat{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור \hat{u} גם כך \underline{u} או כך \mathbf{u} .

ג. וקטור יחידה יסומן \hat{u} .

פתרונות

(1) א. הגרדיאנט (6,8). אורך הגרדיאנט 10.

(2) $48/5$ (3) $1/2$ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) $88/3$

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (1,1) ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל- 22.

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2).

פרק 6 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים

גיאומטריים

פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות

- (1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.
- (2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$.
חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$.
חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.
- (7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2, 1, -2)$.
- מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.
- (8) אם $u^2 - v = 3x + y$, $u - 2v^2 = x - 2y$, מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .
- (9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.}$$

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור } x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי. מישור זה חותך את הצירים } x, y, z \text{ בנקודות } A, B, C \text{ בהתאמה. נסמן } OA + OB + OC = a \text{ הוכח. } O = (0, 0, 0) \text{ למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה.}$$

פתרונות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

פרק 7 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם

נוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן: $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל

מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית

באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

$$(9) \text{ שינוי מדויק } 0.06472, \text{ שינוי מקורב } 0.06153.$$

$$.5\% \quad (10)$$

$$2 \frac{7}{3200} \quad (11)$$

פרק 8 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+2} \right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדויץ'): :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו- 4.

פתרונות

									(1)
					40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1	
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9	27 (8	3 (7	32 (6	-3 (5	$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	
									(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8	$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$-\frac{1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	
									(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	
									(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	
									(6)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
									(7)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	
									(8)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	
								0 (10	
									(9)
					-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1
									(10)

$\pm\infty$ (7 $\sin \pi/4$ (6 1 (5 5 (4 0 (3 9 (2 28 (1

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 9 – חזרה אלגברית

חזקות ומשוואות מעריכיות

1. בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.

2. חשב ללא מחשבון:

$$\text{א. } \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} \quad \text{ב. } \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} \quad \text{ג. } \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$$

$$\text{ד. } 2^3 + 2^5$$

3. פתור את התרגילים הבאים:

$$\text{א. } \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \quad \text{ב. } \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$$

4. פתור את התרגילים הבאים:

$$\text{א. } \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \quad \text{ב. } \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$$

5. בסרטון זה הסבר על חוקי השורשים.

$$6. \text{ חשב ללא מחשבון: } \frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$$

7. בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3^{5x-3} = 3^{3x+7} \quad \text{ב. } 2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad .9$$

$$(25 \cdot 0.2^{2x}) = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad .8$$

$$e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad .10$$

.11 **בסרטון זה הסבר משוואות עם חיבור וחסור.**

פתור את המשוואות הבאות:

ב. $e^x + 2e^x = 3e^4$

א. $2^x + 2^x = 16$

.12 פתור את המשוואות הבאות:

ב. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

א. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

פתרונות

- (2) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40 (3) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k (4) א. $3\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{x} + x$ (6) $\sqrt{2}$ (7) א. x=5
 ב. x=1 (8) x=1 (9) $x = -\frac{1}{2}$ (10) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{6}$ (11) א. x=3 ב. x=4 (12) א. x=4 ב.
 x=1

לוגריתמים

.1 בסרטון זה הסבר על לוגריתמים.

.2 בסרטון זה המשך ההסבר על לוגריתמים.

.3 חשב ללא מחשבון:

ג. $\log_{25} 5$

ב. $\log 1000$

א. $\log_2 32$

ג. $\log_a a^4$

ה. $\log_4 \frac{1}{16}$

ד. $\log_8 4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

.4 בסרטון זה הסבר על מהו \ln .

.5 חשב ללא מחשבון:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

6. מצא את ערכו של x :

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$ ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$
 ד. $\log_x 64 = 3$ ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$
 ז. $\ln x = 2$ ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

7. בסרטון זה הסבר על חוקי הלוגריתמים.

8. חשב ללא מחשבון:

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ ב. $2 \log 2 + \log 25$ ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3 \log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$

9. חשב ללא מחשבון:

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$ ג. $e^{\ln 3}$
 ד. $e^{2 \ln 3}$

10. פתור את המשוואות הבאות:

1. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$ 2. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

11. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$ ב. $\log_5 (25^x - 20) = x$ ג. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

12. פתור את המשוואות הבאות:

א. $2^x = 5$ ב. $5^x = 8$ ג. $e^x = 2$
 ד. $e^x = \frac{1}{2}$ ה. $e^x = -1$

פתרונות

- (3) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2 ו. 4 ז. -1.5 ח. (5) א. 2 ב. -4 ג. -1.5 (6) א. $\frac{1}{2}$
 ב. 65,536 ג. 27 ד. 4 ה. 5 ו. 4 ז. e^2 ח. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (8) א. 2 ב. 2 ג. 3 (9) א. 8 ב. 25
 ג. 3 ד. 9 (10) א. 3 ב. 3 (11) א. ± 3 ב. 1 ג. 0 (12) א. 2.322 ב. 1.292 ג. 0.693
 ד. -0.693

פתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad .2$$

$$5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad .1$$

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad .4$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad .3$$

פתרונות

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2} \quad (4) \quad x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} \quad (3) \quad x = \pm 1 \quad (2) \quad x = \pm 1 \quad (1)$$

חילוק פולינומים

1. בסרטון זה הסבר על חילוק פולינומים.

2. בסרטון זה המשך ההסבר על חילוק פולינומים.

$$\cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \quad \text{פתור את התרגיל הבא:}$$

פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad .5 \quad \frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad .4 \quad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad .3$$

פתרונות

$$4x + 9 \quad (5) \quad 4x^2 + 10x + 1 \quad (4) \quad x^2 + 1 \quad (3) \quad x^2 + x + 1 \quad (2)$$

אי-שוויונים

1. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון ממעלה ראשונה.

2. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון ממעלה שנייה ורציונלי.

3. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון מעריכי.

4. בסרטון זה הסבר על אי-שוויון לוגריתמי.

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad .6 \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad .5$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad .8 \quad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad .7$$

$$x^2 < 144 \quad .10 \quad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad .9$$

$$(x+2)(x+4) < 35 \quad .12 \quad x^2 - 12x > -32 \quad .11$$

$$(x-3)(x-7) \geq 8x-56 \quad .14 \quad -x^2 + 13x + 30 < 0 \quad .13$$

פתרונות

(5) $x \leq -4$ (6) $x < 5$ (7) $x \geq 12$ (8) $x > -13$ (9) אף x (10) $-12 < x < 12$
 (11) $x > 8$ או $x > 4$ (12) $-9 < x < 3$ (13) $x > 15$ או $x < -2$ (14) $x \geq 11$ או $x \leq 7$