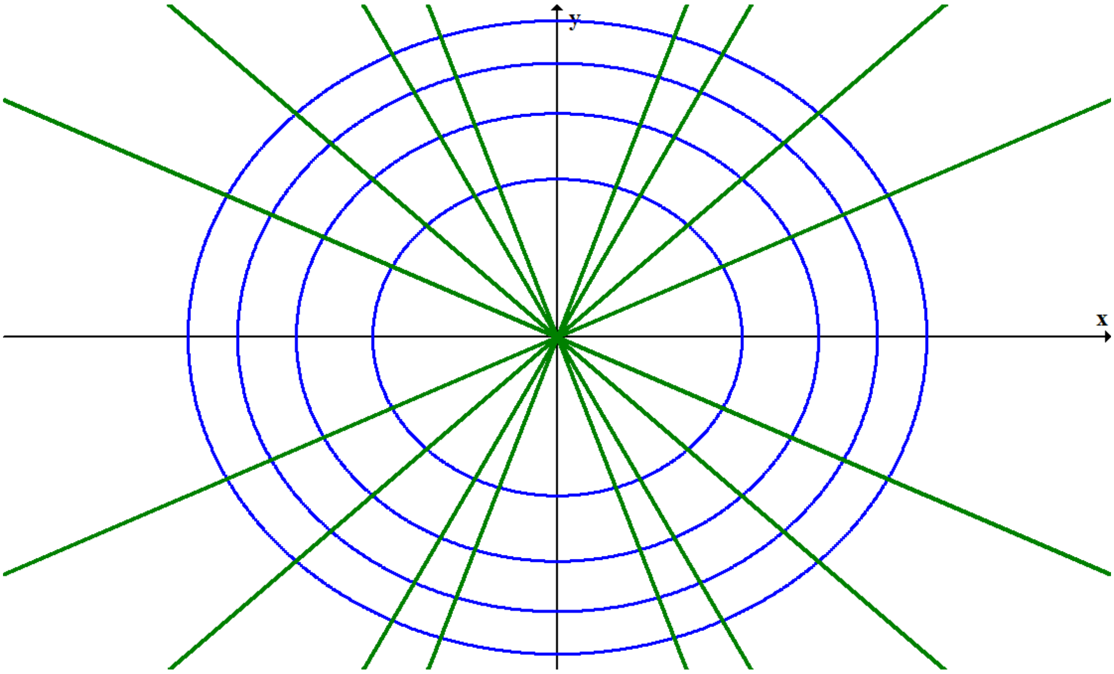
משוואות
דיפרנציאליות
רגילות



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדיי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - מערכת משוואות לינאריות

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

נתונה מטריצה A , מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

תשובות:

1) $x=0,\ x=1,\ \ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ \ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ \ x=2,\ \ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ \ v_{x=2}(1,1,1),\ \ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ \ x_3=3,\ \ v_{x=2}=(1,1,1),\ \ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)\ \ x^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ \ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ \ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ \ x=-1,\ \ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ \ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\ \ \ v_{x=-1}=(-1,2),\ \ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ \ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ \ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ \ v_{x=1}=(1,1,1)$,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2),\ \ v_{x=1-\sqrt{3}i}=(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2)$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

- מערכת משוואות דיפרנציאליות, מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת הלכסון -הסבר

פתור את התרגילים:

1) פתור את המערכת: $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

2) פתור את המערכת: $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$.

3) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$. הוכח כי $z(t)=y(t)$.

4) פתור את המערכת: $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

5) פתור $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

6) נתון $\underline{x}'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\underline{x}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$. חשב: $\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$.

7) פתור את המערכת: $\begin{cases}y_1'+5y_1-2y_2'=0\\3y_2'-4y_1'-5y_2=0\end{cases}$

8) פתור את המערכת: $\overset{\prime}{x}'(t)=A\cdot\overset{\prime}{x}(t)$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

- הערה: בשאלות 8,9 יש להגיע מהפתרון המרוכב לפתרון ממשי.

תשובות:

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2) $$\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3)

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

6) 0

7) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

8) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

- מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת וריאציית הפרמטרים - הסבר

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t}$$

2) $$x_1' = x_1 + x_2 + e^{at}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at}$$
(a קבוע).

3) $$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) $$x' = x + y + 2z + e^t$$
$$y' = x + 2y + z$$
$$z' = 2x + y + z + e^t$$

5) המר את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$ במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

תשובות:

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$$

2) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}\quad(a=-1),$$
$$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}\quad(a\neq 1)$$

3) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

(1 $\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$

(2 $\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$ בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$

(3 $\begin{cases} x'=4x-2y+e^{t} \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$

(4 $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$

(5 $\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$

:תשובות

1) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2 \,,\quad y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^x+2c_3e^{-x}+kx+l$

2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x \,,\quad y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

3) $x=c_1+c_2e^t+4te^t-e^{-t} \quad , \quad y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^t+6te^t-\frac{3}{2}e^t-\frac{5}{2}e^{-t}$

4) $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t \quad , \quad x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$

5) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x} \,,\quad y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^x$

פרק 2 - פתרון משוואות לינאריות באמצעות טורים

פתרון מד״ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית

- פתרון מדר בעזרת פיתוח טור חזקות סביב נקודה רגולרית - הסבר

פתור את המשוואות הבאות (2-8) על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$. במיוחד , רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.(הערת ניסוח : טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן).

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad ; \quad y(0)=3, y'(0)=12$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1}$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$).

8) פתור את המשוואה $y''+(x-1)y=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתור את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad ; \quad y(-1)=2, y'(-1)=-2$.

רמז : תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות:

1) $$a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ \ (n\ge 5)\quad,\quad y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$$

2) $$a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ \ (n\ge 3)\quad,\quad y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

3) $$a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\ge 2)\quad,\quad y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

4) $$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\quad (n\ge 4),$$
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$

5) $$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3),$$
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

6) $$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\ge 3)\ ,$$
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$

7) $$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3),$$
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$

8) $$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\ge 3)\ ,$$
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$

9) $$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3),$$
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

- פתרון מדר בעזרת פיתוח טור חזקות סביב נקודה רגולרית-סינגולרית – הסבר

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ופתור את המשוואה על יד פיתוח הפתרון לטור חזקות בסביבת הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערה: בשאלות 2-5 הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות 6,7 הפתרונות שווים ובשאלות 8,9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות:

1) $$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\ldots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\ldots\right)$$

2) $$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\ldots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3) $$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\ldots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\ldots\right)$$

4) $$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5) $$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\ldots\right)\right]$$

6) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}\qquad (8)\quad y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8) $$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\ldots\right)$$