משוואת הגלים

<u>נוסחאות שימושיות</u>

<u>מד"ר הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים</u> $a\cdot y''(x)+b\cdot y'(x)+c\cdot y(x)=0$

ננחש פתרון מהצורה $y(x)=e^{\lambda x}$ ונקבל את המשוואה האופיינית $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

נחלק למקרים:

שורשי המשוואה האופיינית	**צורת הפתרון**
שני שורשים ממשיים שונים $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$
שורש ממשי אחד כפול $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$y(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$
שני שורשים מרוכבים צמודים $\lambda_1=\mu+i\omega$ $\lambda_2=\mu-i\omega$	$y(x)=c_1e^{\mu x}\cos(\omega x)+c_2e^{\mu x}\sin(\omega x)$

מקרה פרטי נפוץ:

הפתרון הכללי של המשוואה $y''(x)+\omega^2y(x)=0$ הוא $y(x)=c_1\cos(\omega x)+c_2\sin(\omega x)$

<u>בעיות שטורם-ליוביל נפוצות</u>

נניח כי $y''(x)+\lambda^2y(x)=0$ בתחום $0<x<L$

תנאי שפה	**פונקציות עצמיות**	**ערכים עצמיים**	
$y(0)=y(L)=0$	$y_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n\geq1$
$y'(0)=y'(L)=0$	$y_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n\geq0$
$y'(0)=y(L)=0$	$y_n(x)=\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n\geq1$
$y(0)=y'(L)=0$	$y_n(x)=\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n\geq1$

משוואת הגלים בקטע אינסופי

נוסחת דלמבר :

הפתרון של הבעיה

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

נתון על ידי הנוסחה הבאה

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=|x|$$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=\frac{|x|}{1+x^2}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx}+x^2+t^2 \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=x$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=e^{-x} \qquad u_t(x,0)=x$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin(x) \qquad u_t(x,0)=\cos(x)$$

6) נתון כי $u(x,t)$ זה פתרון של הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & x<2\\ 4 & x>2\end{cases} \qquad u_t(x,0)=0$$

חשבו $\int_{-\infty}^{4} u(x,1)\,dx$

7) נתון כי $u(x,t)$ זה פתרון של הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=e^{-|x|}$$

א) מצאו את $u(x,t)$

ב) חשבו את $\int_{0}^{10} u_x(x,5)\,dx$

8) נתון כי $u(x,t)$ זה פתרון של הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases} \qquad u_t(x,0)=0$$

א) מצאו את $u(x,1)$

ב) חשבו את $\int_{0}^{2} u(x,1)\,dx$

9) מצאו את הפתרון $u(x,t)$ של הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx}+t\cos(x) \qquad -\infty<x<\infty \;,\quad t>0$$
$$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=\cos(x)$$

10) מצאו את הפתרון $u(x,t)$ של הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx}-2e^{-x}\sin(t) \qquad -\infty<x<\infty \;,\quad t>0$$
$$u(x,0)=\sin(x) \qquad u_t(x,0)=1$$

11) נתונות פונקציות $a(t),b(t)$ גזירות ברציפות המקיימות $a(0)=b(0)=0$

פתרו את הבעיה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -t<x<t \;,\quad t>0$$
$$u(t,t)=a(t) \qquad u(-t,t)=b(t)$$

12) פתרו את הבעיה

$$u_{tt}=u_{xx}-2u_t-u \qquad -\infty<x<\infty \;,\quad t>0$$
$$u(x,0)=\sin(x) \qquad u_t(x,0)=0$$

רמז: כדאי להגדיר $v(x,t)=u(x,t)e^{-(\alpha x+\beta t)}$ עבור קבועים α,β מתאימים

13) פתרו את הבעיה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \;,\quad t\geq\begin{cases}-\frac{3}{2}x & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

$$u\left(x,-\frac{3}{2}x\right)=0 \qquad x<0$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=\sin(x) \qquad x\geq 0$$

רמז: תוכלו להיעזר בעובדה שהפתרון הכללי של משוואת הגלים $u_{tt}=a^2u_{xx}$

הוא מהצורה $u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$

תשובות סופיות

(1
$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right] & x>t\\ \frac{1}{4}\left[(x-t)^2+(x+t)^2\right] & -t<x<t\\ -\frac{1}{4}\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right] & x<-t\end{cases}$$

(2
$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left[\ln\left(1+[x+t]^2\right)-\ln\left(1+[x-t]^2\right)\right] & x>t\\ \frac{1}{4}\left[\ln\left(1+[x-t]^2\right)+\ln\left(1+[x+t]^2\right)\right] & -t<x<t\\ \frac{1}{4}\left[\ln\left(1+[x-t]^2\right)-\ln\left(1+[x+t]^2\right)\right] & x<-t\end{cases}$$

(3
$$u(x,t)=x+xt+\frac{1}{2}x^2t^2+\frac{1}{6}t^4$$

(4
$$u(x,t)=e^{-x}\cosh(at)+xt$$

(5
$$u(x,t)=\frac{(a+1)\sin(x+at)+(a-1)\sin(x-at)}{2a}$$

(6
$$\int_{-\infty}^{4}u(x,1)\,dx=8$$

(7 א)
$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{e^{-x+t}-e^{-x-t}}{2} & x>t\\ \frac{2-e^{x-t}-e^{-x-t}}{2} & -t<x<t\\ \frac{e^{x+t}-e^{x-t}}{2} & x<-t\end{cases}$$

ב)
$$\int_0^{10}u_x(x,5)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{e^{-10}}{2}-\frac{e^{-15}}{2}+\frac{e^{-10}}{2}+\frac{e^{-5}}{2}-\frac{1}{2}$$

8) **א)** $$u(x,1)=\begin{cases}\dfrac{1-(x+1)^2}{2} & -2<x<0\\ \dfrac{1-(x-1)^2}{2} & 0<x<2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב) $$\int_0^2 u(x,1)\,dx=\frac{4}{3}$$

9) $$u(x,t)=t\cos(x)$$

10) $$u(x,t)=\sin(x)\cos(t)+t+e^{-x}\sin(t)+e^{-x}\sinh(t)$$

11) $$u(x,t)=a\left(\frac{x+t}{2}\right)+b\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

12) $$u(x,t)=\cos(t)\left[\sin(x)+2\cos(x)\right]e^{-t}$$

13) $$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x-t}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-t}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\sin(x+t)-\dfrac{1}{2}\cos(x+t) & -\dfrac{2}{3}t\le x<t\\ \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-t)+\sin(x+t)\right]+\dfrac{1}{2}\left[\cos(x-t)-\cos(x+t)\right] & 0<t\le x\end{cases}$$

משוואת הגלים בקטע חצי אינסופי

נתונה הבעיה הבאה

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad 0<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u_t(x,0)=g(x)$$

$$u(0,t)=0 \quad \text{or} \quad u_x(0,t)=0$$

<u>נפריד בין שני מקרים:</u>

א) אם נתון תנאי שפה דיריכלה (הומוגני) $u(0,t)=0$

נבצע המשכה אי זוגית לבעיה, כלומר נגדיר פונקציות

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge 0 \\ -f(-x) & x<0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge 0 \\ -g(-x) & x<0 \end{cases}$$

ב) אם נתון תנאי שפה ניומן (הומוגני) $u_x(0,t)=0$

נבצע המשכה זוגית לבעיה, כלומר נגדיר פונקציות

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge 0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge 0 \\ g(-x) & x<0 \end{cases}$$

<u>בשני המקרים הפתרון נתון על ידי</u>

$$u(x,t)=\frac{\tilde{f}(x+at)+\tilde{f}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}(s)\,ds \qquad x>0$$

<u>מה קורה אם תנאי השפה לא הומוגני?</u>

נגדיר שתי פונקציות $v(x,t),w(x,t)$ כך שמתקיים הקשר $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

לפונקציה $w(x,t)$ אנו קוראים פונקציית תיקון והתפקיד שלה הוא לדאוג לכך שתנאי השפה של $v(x,t)$ יהיה הומוגני.

שאלות

1) נתונה הבעיה הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>0$$

$$u(0,t)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$$

$$u(x,0)=0$$

חשבון את $u\left(x,\frac{1}{2}\right)$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty \ , \ t>0\\ u(0,t)=0 & \\ u(x,0)=f(x)=x & u_t(x,0)=g(x)=\sin(x)\end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty \ , \ t>0\\ u(0,t)=0 & \\ u(x,0)=f(x)=x^2 & u_t(x,0)=g(x)=\sin(x)\end{cases}$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty \ , \ t>0\\ u_x(0,t)=0 & \\ u(x,0)=f(x)=x^2 & u_t(x,0)=g(x)=\sin(x)\end{cases}$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty \ , \ t>0\\ u(0,t)=0 & \\ u(x,0)=f(x)=2x^2-x & u_t(x,0)=g(x)=4x+1\end{cases}$$

6) נתונות הבעיות הבאות בתחום $t>0$ $0<x<\infty$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=x^3 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v_x(0,t)=0 \\ v(x,0)=x^3 \\ v(x,0)=0 \end{cases}$$

חשבו את הגבול $\lim_{t\to\infty}\frac{u(1,t)}{v(1,t)}$

7) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}+t & 0<x<\infty \quad t>0 \\ u(0,t)=\frac{1}{6}t^3 \\ u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

8) הפונקציה $u(x,t)$ היא פתרון של הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}+2u_x+u & 0<x<\infty \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=e^{-x} \\ u_t(x,0)=e^{-2x} \end{cases}$$

חשבו $\lim_{x\to\infty}\left[e^x\cdot u(x,2)\right]$ רמז: הגדירו פונקציה $v(x,t)=u(x,t)\cdot e^{-(\alpha x+\beta t)}$

9) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<\infty \quad t>0 \\ u(0,t)=t \\ u(x,0)=\sin^2(x) \\ u_t(x,0)=\sin(x)+1 \end{cases}$$

תשובות סופיות

1) $$u\left(x,\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}0 & x>\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-x\right) & \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ x & 0<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

2) $$u(x,t)=x+\sin(x)\sin(t)$$

3) $$u(x,t)=\begin{cases}x^2+t^2+\sin(x)\sin(t) & x\ge t\\ 2xt+\sin(x)\sin(t) & 0\le x<t\end{cases}$$

4) $$u(x,t)=\begin{cases}x^2+t^2+1-\cos(x)\cos(t) & 0\le x<t\\ x^2+t^2+\sin(x)\sin(t) & x\ge t\end{cases}$$

5) $$u(x,t)=\begin{cases}2\left(x^2+t^2\right)+4xt-x+t & x>t\\ 8xt & 0\le x<t\end{cases}$$

6) $$\lim_{t\to\infty}\frac{u(1,t)}{v(1,t)}=0$$

7) $$u(x,t)=x+\frac{1}{6}t^3$$

8) $$\lim_{x\to\infty}\left[e^x\cdot u(x,2)\right]=1$$

9) $$u(x,t)=\begin{cases}\frac{\sin^2(x+t)+\sin^2(x-t)}{2}+\sin(x)\sin(t)+t & x>t\\ \frac{\sin^2(x+t)-\sin^2(x-t)}{2}+\sin(x)\sin(t)+t & 0<x<t\end{cases}$$

הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית

נתונה הבעיה הבאה

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad 0<x<L \quad , \quad t>0$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$ (תנאי התחלה)

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \quad \text{or} \quad u_x(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \quad \text{or} \quad u_x(L,t)=0 \end{cases}$$ (תנאי שפה)

שלבי הפתרון:

1) נמצא את כול הפתרונות מהצורה $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ ונרשום את הפתרון הכללי כך $u(x,t)=\sum X_n(x)\cdot T_n(t)$

2) נציב תנאי התחלה ונמצא את המקדמים

סיכום המקרים הנפוצים:

תנאי שפה	צורת הפתרון
$u(0,t)=u(L,t)=0$	$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$	$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+b_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

מה קורה אם תנאי השפה לא הומוגניים?

נגדיר שתי פונקציות $v(x,t),w(x,t)$ כך שמתקיים הקשר $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

לפונקציה $w(x,t)$ אנו קוראים פונקציית תיקון והתפקיד שלה הוא לדאוג לכך

שתנאי השפה של $v(x,t)$ יהיו הומוגניים.

להלן טבלה מסכמת של פונקציית התיקון עבור המקרים השונים :

מקרה	תנאי שפה	פונקציית התיקון
דיריכלה - דיריכלה	$u(0,t)=a(t)$, $u(L,t)=b(t)$	$w(x,t)=a(t)+\frac{x}{L}\left[b(t)-a(t)\right]$
ניומן - ניומן	$u_x(0,t)=a(t)$, $u_x(L,t)=b(t)$	$w(x,t)=x\cdot a(t)+\frac{x^2}{2L}\left[b(t)-a(t)\right]$
דיריכלה - ניומן	$u_x(0,t)=a(t)$, $u(L,t)=b(t)$	$w(x,t)=(x-L)a(t)+b(t)$
ניומן - דיריכלה	$u(0,t)=a(t)$, $u_x(L,t)=b(t)$	$w(x,t)=a(t)+b(t)\cdot x$

בכל אחד מן המקרים האלו מתקיים כאמור $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$.

יש למצוא את המד"ח של הפונקציה החדשה $v(x,t)$ ותנאי ההתחלה שלה.

נזכור כי מובטח לנו שתנאי השפה של $v(x,t)$ הם הומוגיים.

במידה ו $v(x,t)$ מקיימת את משוואת הגלים ההומוגנית נמצא את $v(x,t)$ כמפורט

בעמוד הקודם ולאחר מכן נחזור ל $u(x,t)$.

אחרת, אם $v(x,t)$ מקיימת את משוואת הגלים הלא – ההומוגנית נפתור לפי

התהליך המפורט בנושא הבא.

שאלות

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) - 7\sin(5\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = -2x-1 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) & u_t(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2L}x\right) \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin\left(\frac{5\pi}{2L}x\right) & u_t(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

6) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos(\pi x) + \cos(3\pi x) \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

7) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x) \\ u_t(x,0) = \cos(2\pi x) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות

1) $$u(x,t)=\frac{1}{2}\cos(\pi t)\sin(\pi x)-7\cos(5\pi t)\sin(5\pi x)$$

2) $$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)}\cos\left(\pi(2k-1)t\right)\sin\left(\pi(2k-1)x\right)$$

3) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{3(-1)^n-1}{\pi n}\cos(2\pi nt)\sin(\pi nx)$$

4) $$u(x,t)=\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2L}at\right)+\frac{2L}{3\pi a}\cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2L}at\right)+\frac{2L}{5\pi a}\cos\left(\frac{5\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2L}at\right)$$

5) $$u(x,t)=\frac{2L}{\pi a}\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2L}at\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{5\pi}{2L}at\right)$$

6) $$u(x,t)=1+t+\cos(\pi t)\cos(\pi x)+\cos(3\pi t)\cos(3\pi x)$$

7) $$u(x,t)=\cos(\pi t)\cos(\pi x)+\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\cos(2\pi x)$$

הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נתונה הבעיה הבאה

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

(תנאי התחלה)

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

(תנאי שפה)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \quad \text{or} \quad u_x(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \quad \text{or} \quad u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

<u>שלבי פתרון</u>:

1) נבצע הפרדת משתנים לבעיה ההומוגנית $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

(נמצא רק את $X_n(x)$ ונרשום כי צורת הפתרון הינה $u(x,t) = \sum T_n(t) X_n(x)$)

2) נציב את צורת הפתרון במד"ח הלא-הומוגנית ונקבל מד"ר-ים על $T_n(t)$

3) ניעזר בתנאי ההתחלה של u כדי לקבל תנאי התחלה על $T_n(t)$

<u>סיכום המקרים הנפוצים</u>:

תנאי שפה	**צורת הפתרון**
$u(0,t) = u(L,t) = 0$	$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$	$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

<u>מה קורה אם תנאי השפה לא הומוגניים?</u>

ניעזר בפונקציית תיקון לפי הטבלה בעמוד 12 ונפתור את הבעיה החדשה של $v(x,t)$

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + (t+1)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \frac{9x}{L}\sin(3t) & 0<x<L \;,\; t>0 \\ u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=\frac{3x}{L} \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=\sin(3t) \end{cases}$$

רמז: היעזרו בפונקציית תיקון מהצורה $w(x,t)=A(t)+B(t)x$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & 0<x<L \;,\; t>0 \\ u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & 0<x<L \;,\; t>0 \\ u(x,0)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \end{cases}$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) & 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) & u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+e^t & 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) & u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

תשובות סופיות

1) $$u(x,t)=\left[\left(\frac{L}{3\pi a}\right)^2(t+1)-\left(\frac{L}{3\pi a}\right)^2\cos\left(\frac{3\pi a}{L}t\right)-\left(\frac{L}{3\pi a}\right)^3\sin\left(\frac{3\pi a}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)+\frac{1}{L}\sin(3t)x$$

2) $$u(x,t)=\left[-\left(\frac{L}{\pi a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi a}{L}t\right)+\left(\frac{L}{\pi a}\right)^2\right]\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

3) $$u(x,t)=\cos\left(\frac{\pi a}{L}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\left[\left(\frac{L}{2\pi a}\right)^2t-\left(\frac{L}{2\pi a}\right)^3\sin\left(\frac{2\pi a}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

4) $$u(x,t)=\left(\left[1-\left(\frac{L}{\pi a}\right)^2\right]\cos\left(\frac{\pi a}{L}t\right)+\left(\frac{L}{\pi a}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

5) $$u(x,t)=\left(e^t-t-1\right)+\cos\left(\frac{\pi a}{L}t\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

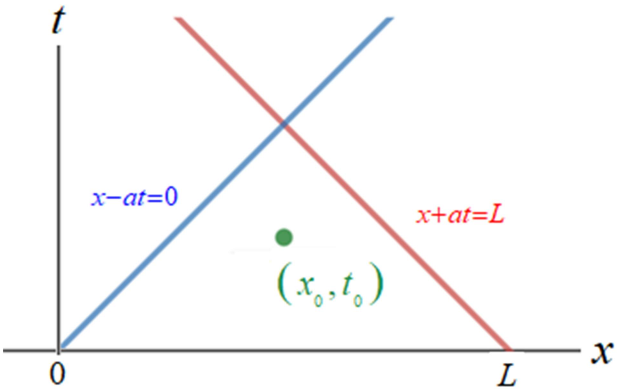
משולש הקביעה

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח נתונה לנו משוואת גלים

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) & 0<x<L \quad , \quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) & u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=A(t) & u(L,t)=B(t) \end{cases}$$

ורוצים שנחשב את $u(x_0,t_0)$



נבדוק אם הנקודה (x_0,t_0) נמצאת במשולש הקביעה ואם כן ניעזר בנוסחת בדלמבר:

$$u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

שאלות

1) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<2 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = x & u_t(x,0) = \cos(x) \\ u(0,t) = \cos(t) & u(2,t) = \sin(t) \end{cases}$$

חשבו $u\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{4}\right)$

2) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = x(x-1) & u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \end{cases}$$

חשבו $u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

3) נתונות הבעיות הבאות בתחום $0<x<1 \ , \ t>0$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + e^{-t}\cos(\pi x) \\ v(x,0) = -\sin^2(\pi x) \\ v_t(x,0) = \cos^2(\pi x) \\ v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}\cos(\pi x) \\ u(x,0) = \cos^2(\pi x) \\ u_t(x,0) = -\sin^2(\pi x) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

בדקו מה יותר גדול: $v\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ או $u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

4) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t^2 & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 & u_t(x,0) = 2 \\ u(0,t) = 1 & u(2,t) = 2 \end{cases}$$

חשבו $u\left(1, \frac{1}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right)$

2) $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}$

3) $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4) $u\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$

משוואת מברקן

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח ונתונה לנו הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

המד"ח נקראת משוואת מברקן.

<u>שיטות פתרון:</u>

1) אם רק רוצים למצוא את הערך של u בנקודה מסויימת,
כדאי לבדוק אם הנקודה נמצאת במשולש הקביעה.

2) אם התחום הוא הישר הממשי (או אם פותרים במשולש הקביעה)
ואין תלות ב - x בתנאי ההתחלה אז ננחש פתרון $u(x,t)=U(t)$.

3) אם תנאי ההתחלה הם פולינומים אז ניתן לבצע הורדת סדר ולהגדיר $v=u_x$

שאלות

1) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx} & -\infty<x<\infty \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases} x & |x|<1 \\ x^3 & |x|\geq 1 \end{cases} & u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2\left(x,\frac{1}{2}\right)dx$

2) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx} & -1<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 & u_t(x,0)=1 \\ u(-1,t)=-1 & u(1,t)=1 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^1 u(0,t)\,dt$

3) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & \\ u(x,0)=x \quad u_t(x,0)=1 & \end{cases}$$

חשבו $u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

4) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx} & -2<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=1 \\ u(-2,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_{-1}^{1} u(x,1)\,dx$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx}+t^2 & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$$

6) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx} & -1<x<1\ ,\ t>0 \\ u(-1,t)=\cosh(t) & u(1,t)=3\cosh(t) \\ u(x,0)=x+2 & u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}} u(x,t)\,dt\,dx$

7) נתונה הבעיה הבאה עבור A,B קבועים

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t=u_{xx}+t^2 & -\infty<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=\begin{cases} A & |x|<10 \\ B & |x|>10 \end{cases} \end{cases}$$

חשבו את $u(0,5)$ (אין צורך לפשט את הביטוי)

תשובות סופיות

1) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2\left(x,\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{12}$$

2) $$\int_0^1 u(0,t)\,dt=\frac{1}{e}$$

3) $$u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}-\frac{9}{4}e^{-\frac{1}{4}}$$

4) $$\int_{-1}^{1} u(x,1)\,dx=4-2e^{-1}$$

5) $$u(x,t)=\frac{t^3}{3}-t^2+2t+2e^{-t}-1$$

6) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} u(x,t)\,dt\,dx=1$$

7) $$u(0,5)=\frac{74}{3}-A\left(e^{-5}-2\right)+2e^{-5}$$

עקרון דוהמל

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

הפתרון של בעיית הגלים הלא הומוגנית

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

נתון ע"י $u(x,t) = \int_0^t p(x,t,\tau)\,d\tau$ כאשר $p(x,t,\tau)$ מקיימת את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} p_{tt} = a^2 p_{xx} & t > \tau \\ p(x,\tau,\tau) = 0 \\ p_t(x,\tau,\tau) = F(x,\tau) \end{cases}$$

__הערות:__

1) יש לוודא שתנאי ההתחלה של u אכן שווים לאפס, כלומר כי

$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

2) על מנת לפתור את הבעיה של $p(x,t,\tau)$ נגדיר משתנה חדש $T = t - \tau$

ונקבל את הבעיה הבאה (כאשר הזמן ההתחלתי הוא אפס)

$$\begin{cases} p_{TT} = a^2 p_{xx} & T > 0 \\ p(x,T=0) = 0 \\ p_T(x,T=0) = F(x,\tau) \end{cases}$$

3) אם מדובר במשוואת הגלים בקטע סופי, יש לוודא כי תנאי השפה הומוגניים.

תנאי השפה של $p(x,t,\tau)$ יהיו אותם תנאי השפה של $u(x,t)$.

שאלות

1) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

2) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(\pi x) & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

3) בעזרת עקרון דוהמל ונוסחת דלמבר עבור משוואת הגלים ההומוגנית,
הוכיחו כי הפתרון לבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

נתון על ידי

$$u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

תשובות סופיות

1) $u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\left[1-\cos(\pi t)\right]$

2) $u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\left[1-\cos(\pi t)\right]$

3) הוכחה