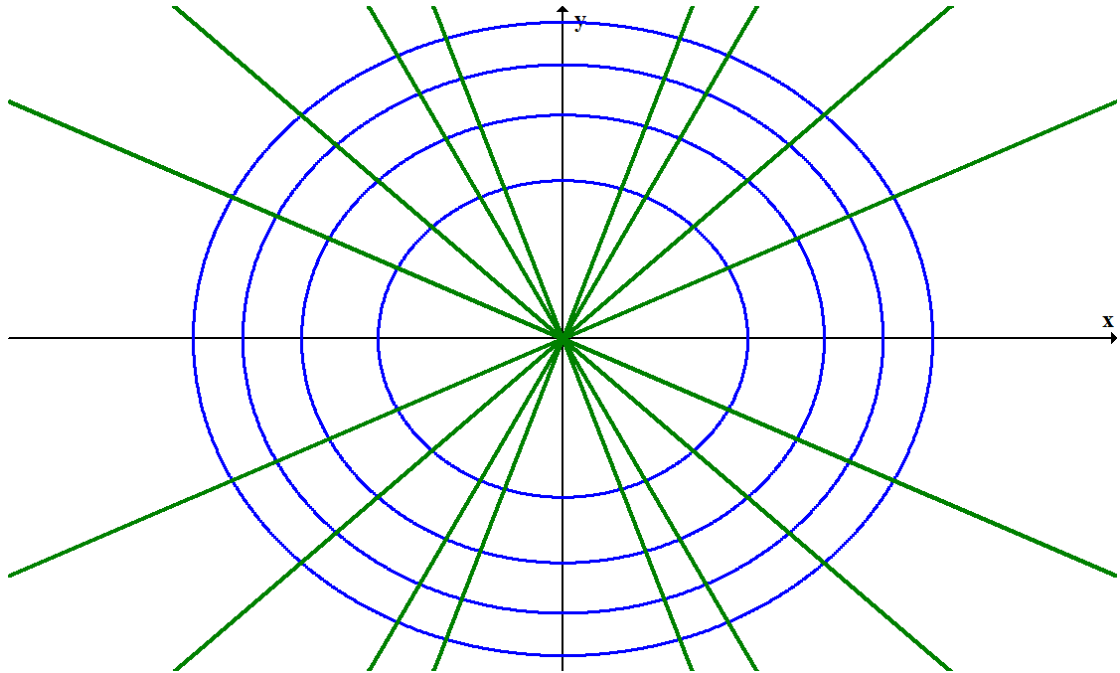


משוואות דיפרנציאליות רגילות



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4.....	פרק 1 - משוואות מסדר ראשון
4.....	הפרדת משתנים
6.....	משוואה הומוגנית
8.....	משוואה הומוגנית – שיטת ההצבה
10.....	משוואה מדויקת
12.....	גורם אינטגרציה
14.....	משוואה לינארית מסדר ראשון
16.....	משוואת ברנולי
18.....	משוואת ריקטי
19.....	משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה
21.....	משפט הקיום והיחידות
22.....	פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני
22.....	משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה
24.....	משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים
26.....	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים - שיטת השוואת מקדמים
28.....	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים
30.....	משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית
32.....	משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים – שיטת משוואת אוילר
33.....	משוואה לינארית, כללית – שיטת הפתרון השני
34.....	פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר n
34.....	משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים
36.....	שיטת השוואת מקדמים
38.....	שיטת וריאציית פרמטרים
39.....	השיטה האופרטורית

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

הפרדת משתנים

- מדר הניתנת להפרדת משתנים - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות:

$$y = \pm \sqrt{x^2 + k} \quad (1)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (3)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (5)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, \quad y = -2 \quad (7)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (8)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (9)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (10)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (11)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (12)$$

משוואה הומוגנית

- פונקציה הומוגנית - הסבר
הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.
- מדר הומוגנית - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(9) \quad \text{נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0$$

- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.
 ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה הומוגנית - שיטת ההצבה

- מדר הומוגנית, פתרון על ידי הצבה - הסבר
 הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות:

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4} \ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (2)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} + 1 \right| + c, \quad y = x-3, \quad y = -x-1 \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4} \left[-(2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} - 2 \frac{y+2}{x-1} \right| + (-2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} + 2 \frac{y+2}{x-1} \right| \right] + c, \quad y = \sqrt{0.5x-2} - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5x-2} + \sqrt{0.5} \quad (4)$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2} \ln \left(2 + 2 \frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2} \right)^2 \right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

- מדר מדויקת - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה

פתור את המשוואות הבאות :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

- (7) נתונה המשוואה $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$ באשר k קבוע.
- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.
- ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

- גורם אינטגרציה - הסבר
הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(1) הראה שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם

האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x+2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם

אינטגרציה xe^x .

(4) פתור את המשוואה $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$.

(5) פתור את המשוואה $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$.

(6) פתור את המשוואה $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$.

(7) פתור את המשוואה $(y^2 - y)dx + xdy = 0$.

(8) פתור את המשוואה $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

(9) פתור את המשוואה $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

תשובות:

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

משוואה לינארית מסדר ראשון

- מדר לינארית מסדר ראשון - הסבר הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

תשובות:

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

משוואת ברנולי

- משוואות ברנולי - הסבר
הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

- משוואת ריקטי - הסבר
הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (4)$$

תשובות:

$$y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (1)$$

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (3)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (4)$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

- בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.
- מדר מסדר ראשון וממעלה גבוהה - הסבר הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2 \ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3 \ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

משפט הקיום והיחידות

משפט הקיום והיחידות למדר מסדר ראשון - הסבר

$$(1) \quad \text{נתונה הבעיה } y(2) = -1, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$$

א. הוכיחו ש- $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$, $y_1(x) = -x + 1$ הם פתרונות לבעיה.

קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

$$(2) \quad \text{נתונה הבעיה } y(0) = 0, \quad y' = \sqrt[3]{y} + 4$$

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה:

$$y(0) = 0, \quad y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$$

$$(4) \quad \text{נתונה הבעיה: } y(0) = 4, \quad y' = (y-1)(x^2 + y)^5$$

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שלכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

- מדר חסרה מסדר שני – הסבר
הגדר משוואה חסרה מסדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (8)$$

תשובות:

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1(x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k \quad ; \quad y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2(x+k)^1}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k) \quad ; \quad y = c \quad (8)$$

משוואה לינאריות, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

- מדר לינארית הומוגנית, מסדר שני, עם מקדמים קבועים – הסבר הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (6)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (7)$$

$$c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{-4x/5} \left[c_1 \cos\left(\frac{2}{5}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \right] \quad (10)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים - שיטת השוואת מקדמים

- מדר לינארית, לא הומוגנית, מסדר שני, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת השוואת מקדמים – הסבר
- הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7; y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

- הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה לינארית, לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

- הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3 \sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (7)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \text{ – הערת סימון}$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

משוואה ליניארית, עם מקדמים לא קבועים – שיטת משוואת אוילר

(1) מדר ליניארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר הומוגנית – הסבר ותרגיל

$$\text{דוגמא 1: } x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad (x \neq 0)$$

$$\text{דוגמא 2: } x^2 y'' + 3xy' + y = 0, \quad (x \neq 0)$$

$$\text{דוגמא 3: } x^2 y'' + xy' + y = 0, \quad (x \neq 0)$$

(2) מדר ליניארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר לא הומוגנית – הסבר ותרגיל

$$\text{דוגמא 1: } x^2 y'' - xy' + y = x^2, \quad (x > 0)$$

$$\text{דוגמא 2: } x^2 y'' + xy' = x \ln x, \quad (x > 0)$$

משוואה לינארית, כללית – שיטת הפתרון השני

- מדר לינארית, מסדר שני, כללית – הסבר

$$(1) \text{ פתור } y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$$

$$\text{כאשר ידוע } y_1(x) = e^{2x}$$

$$(2) \text{ פתור } (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

- (3) הסבר את שיטת הפתרון השני לפתרון מד"ר לינארית, לא הומוגנית, מסדר שני.

$$\text{הדגם על המד"ר } (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x} \quad (0 < x < 1),$$

$$\text{כאשר ידוע } y_1(x) = e^{2x} \text{ פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.}$$

תשובות:

$$(1) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$$

$$(2) y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$$

פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר n

משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

- מדר לינארית הומוגנית, מסדר n, עם מקדמים קבועים - הסבר
- משפטים הקשורים לפתרון משוואות פולינומיאליות - הסבר

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = -1; y''' - y'' + y' - y = 0 \quad (14)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -19, y'''(0) = -47; y'''' - 3y'''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \quad (15)$$

(16) נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

ב. מצא את המשוואה

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$(a) y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$(b) y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'''' - 150y'''' + 125y'''' = 0$$

שיטת השוואת מקדמים

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2 ; y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (7)$$

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית פרמטרים

- מדר ליניארית, מסדר n, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטת וריאציית הפרמטרים - הסבר

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות:

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln|x| \quad (3)$$

השיטה האופרטורית

- מדר ליניארית, מסדר n, חא הומוגנית, עם מקדמים קבועים, פתרון בשיטה האופרטורית - הסבר

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104 \sin(2x + 1) + \cos(x + 10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5 \sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48 \cos^2 x - 16 \quad (7)$$

תשובות:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2 \sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4 \sin 2x - 22 \cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5 \sin x + 25 \cos x}{26} + \frac{-3 \cos 2x - 18 \sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$