משפט השארית

<u>הגדרת השארית</u>:

נניח כי z_0 זו נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$,

כלומר נניח כי $f(z)$ הולומורפית בטבעת $0<|z-z_0|<R_2$ כאשר $0<R_2\le\infty$

אזי קיים לה פיתוח לטור לורן בטבעת זו הנתון ע"י $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ והשיוויון מתקיים בטבעת.

נגדיר $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}$ וזו נקראת השארית של $f(z)$ בנקודה z_0

כלומר המקדם של $\frac{1}{z-z_0}$ בפיתוח של $f(z)$ לטור לורן בטבעת $0<|z-z_0|<R_2$

נקרא השארית של $f(z)$ ב - z_0.

<u>חישוב השארית – בנק' סינגולרית סליקה</u>:

אם $z_0\in\mathbb{C}$ נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$ אזי $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$

<u>חישוב השארית – בקוטב מסדר</u> m:

אם $z_0\in\mathbb{C}$ קוטב מסדר m של $f(z)$ אזי

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

<u>נוסחה מקוצרת לחישוב השארית בקוטב פשוט (מסדר 1)</u>:

אם $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$ מנת אנליטיות ב z_0 ו - z_0 קוטב פשוט של $f(z)$ ו - $g'(z_0)\neq 0$

אז $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

<u>חישוב השארית – בנקודה סינגולרית עיקרית</u>:

אין נוסחה מקוצרת, יש לפתח את הפונקציה לטור לורן $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

ואז $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}$.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

<u>משפט השארית:</u>

נניח כי γ מסילה פשוטה,סגורה וחלקה למקוטעין ונניח כי $f(z)$ אנליטית על γ ובתחום הפנימי D פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,...,z_N \in D$. אזי

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

<u>משפט שימושי:</u>

אם $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ פונקציה רציונלית (מנת פולינומים) ומעלת הפולינום במכנה גדולה בלפחות 2 ממעלת הפולינום במונה (כלומר $\deg(q) \geq \deg(p)+2$) והמכנה $q(x)$ לא מתאפס על הציר הממשי, אז :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

כאשר לוקחים **רק** את השאריות בחצי המישור העליון.

<u>הלמה של ז'ורדן:</u>

נניח כי $f(z)$ פונקציה רציפה המוגדרת על $C_R = \left\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$ (חצי קשת מעגלית עליונה) ונניח כי היא מהצורה $f(z)=e^{iaz}g(z)$ עבור $a>0$ קבוע כלשהו אז מתקיים $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{a} \cdot max_{z\in C_R}\left|g(z)\right|$

<u>אינטגרל ברומוויץ' (לחישוב התמרת לפלס הפוכה):</u>

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

בהינתן התמרת לפלס $F(s)$ נוכל לחשב את התמרת לפלס ההפוכה ע"י הנוסחה

$$f(t)=L^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{st}F(s)ds \qquad t>0$$

כאשר $\sigma \in \mathbb{R}$ נבחר כך שכל הנקודות הסינגולריות של $F(s)$ נמצאות מצד שמאל לקו האנכי $\mathrm{Re}(s)=\sigma$

חישוב השארית באינסוף:

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

תזכורת: ∞ תקרא נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$ אם קיים $R>0$ כך ש $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|>R$.

הסיווג של הנקודה ∞ עבור $f(z)$ נעשה לפי הסיווג של 0 עבור $f\left(\frac{1}{z}\right)$

הגדרת השארית באינסוף – אם ∞ נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$ אז נגדיר $\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} f(z)dz$ לכל $r>R$.

משפט:

אם ∞ תקרא נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$ אז

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

משפט:

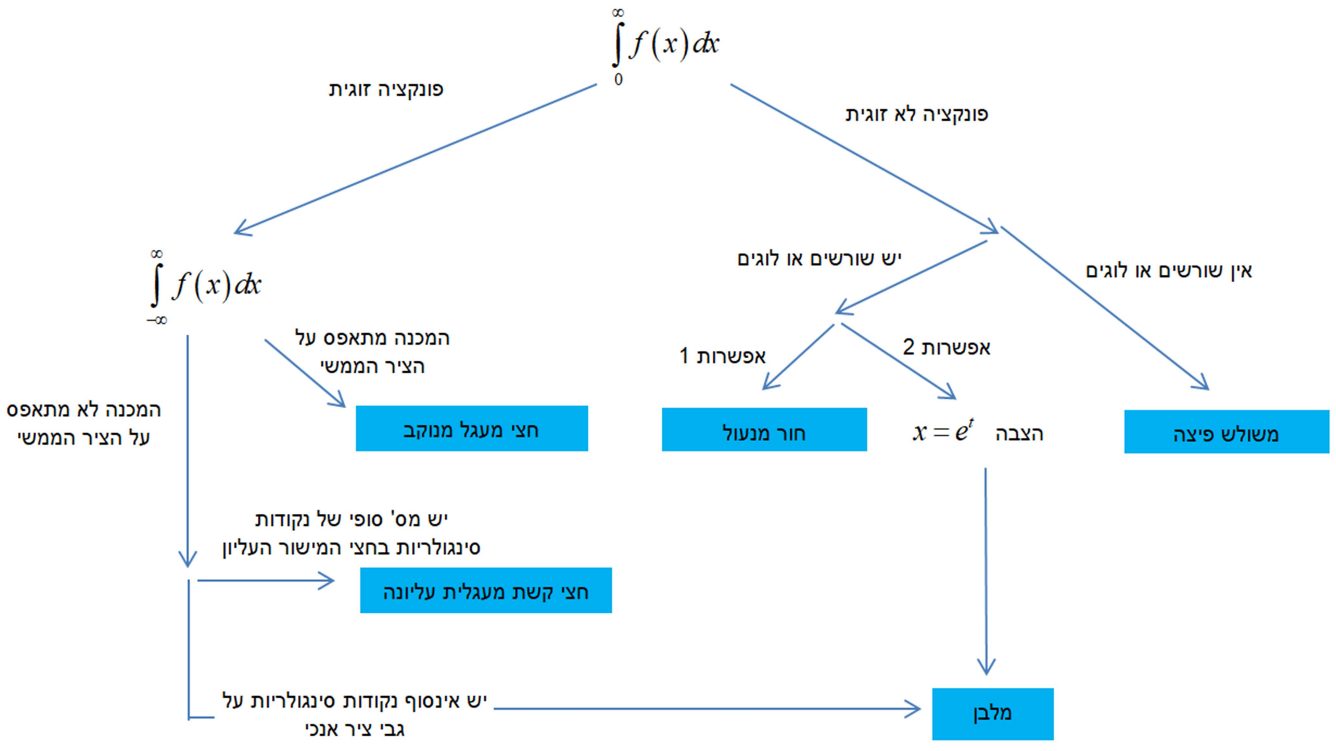
אם $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ אז

$$\operatorname{Res}\left[f(z),z_1\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),z_2\right]+\dots+\operatorname{Res}\left[f(z),z_n\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$$

הערה: שימו לב כי אם ישנן אינסוף נקודות סינגולריות במישור המרוכב לא ניתן להשתמש במשפט.

<u>כללי אצבע לחישוב אינטגרלים ממשיים – תרשים זרימה</u>

הערה: לא כולם לומדים את כל סוגי המסילות



$$\int_0^\pi f(x)dx \xrightarrow{\text{פונקציה זוגית}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \longrightarrow \text{מסילת מעגל היחידה}$$

הערות:

1) אם $f(x)$ זוגית אז $\int_0^\pi f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

2) אם $f(x)$ זוגית אז $\int_0^\infty f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

3) אם $g(z)$ מרוכבת אז

$$\mathrm{Re}\left[\int_a^b g(x)dx\right]=\int_a^b \mathrm{Re}\left[g(x)\right]dx \quad , \quad \mathrm{Im}\left[\int_a^b g(x)dx\right]=\int_a^b \mathrm{Im}\left[g(x)\right]dx$$

(בהנחה והאינטגרלים קיימים)

שימו לב שזה לא נכון בהכרח עבור אינטגרלים מסילתיים! באופן כללי

$$\mathrm{Re}\left[\int_\gamma g(z)dz\right]\neq\int_\gamma \mathrm{Re}\left[g(z)\right]dz$$

מציאת שארית

שאלות

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ (מנת אנליטיות) יש קוטב פשוט ב- z_0 ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$. הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.
הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים
וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\quad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$

אינטגרלים מרוכבים

שאלות

חשבון את האינטגרלים הבאים:

1) $\oint\limits_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz$

3) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$

4) $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

5) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz$

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint\limits_{C} f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0$

7) $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}dz \qquad (a>1)$

8) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz$

9) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz$

10) $\oint\limits_{|z|=6} \cot(z)\,dz$

11) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\,dz$

12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$

שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$. חשבו $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)}\,dz$

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4\sin(\bar{z})\,dz$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

15) חשבון את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z)=\frac{1}{\cos(z)-1}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<2\pi$

הערה: אם $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורן של $f(z)$ בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$

אז ניתן לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ כאשר $R_1<r<R_2$

16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על השפה γ

ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$

כאשר N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D

17) אם $n\in\mathbb{N}$ ו- $r>0$ כך ש $n<r^2<n+1$ חשבון את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz$

18) חשבון $\int\limits_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz$

הערה: $\int\limits_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz \overset{\text{definition}}{=} \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-iR}^{iR} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ $-iR$ ל - iR

תשובות סופיות

1) $$\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz=0$$

2) $$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3(z+1)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$$

3) $$\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

4) $$\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=-\frac{\pi i}{3}$$

5) $$\oint_{|z|=1}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz=0$$

6) הוכחה

7) $$\oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}dz=\frac{\pi i}{2}$$

8) $$\oint_{|z|=1}\frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz=\frac{267}{20}\pi i$$

9) $$\oint_{|z|=5}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz=\pi\left[-3i\cdot e^i+2i-e\right]$$

10) $$\oint_{|z|=6}\cot(z)\,dz=6\pi i$$

11) $$\oint_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\,dz=0$$

12) $$\oint_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{f(z)}\,dz=\frac{4\pi i}{7}$$

13) $$\oint_{|z|=1}z^4\sin\left(\bar{z}\right)\,dz=\frac{2\pi i}{5!}$$

14) $$\oint_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right)\,dz=0$$

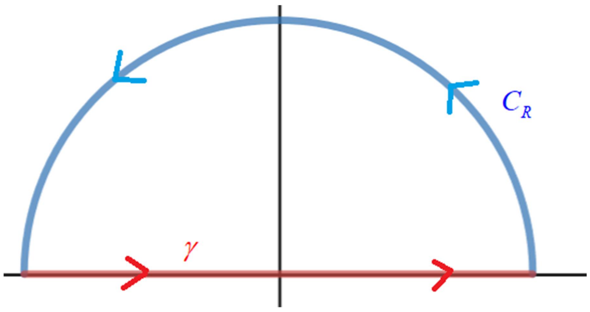
15) $$a_{-1}=-2\ ,\ a_{-2}=-2\ ,\ a_n=0\ \text{for}\ n\le -3$$

16) הוכחה

17) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz=2n+1$$

18) $$\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz=\frac{\pi i}{3e}$$

מסילת חצי קשת מעגלית



שאלות

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ $\qquad$ $\gamma = \{z = x \mid -R \le x \le R\}$

19) חשבן את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

20) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

21) הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{C_R+\gamma}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\sqrt{2}$

22) חשבו את האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

23) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+6}{x^6+1}dx$.

24) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

25) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$

26) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx$

27) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

תשובות סופיות

1) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2}dz = \pi$

ב) הוכחה

ג) הוכחה

2) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה

ג) הוכחה

3) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה

ג) הוכחה

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{3\pi}{8}$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1}dx = \frac{14\pi}{3}$

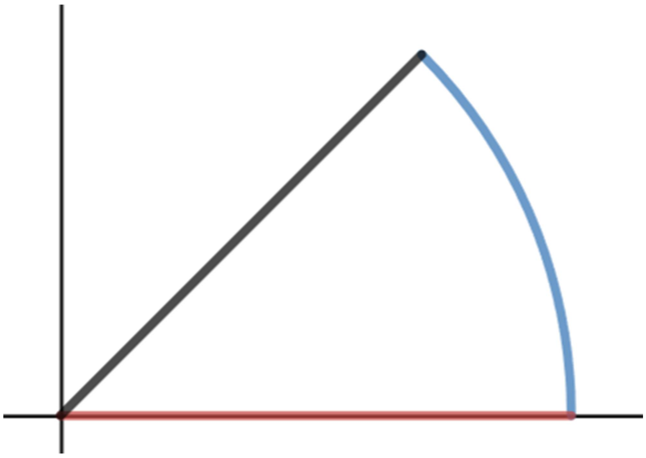
6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{\pi}{4}$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx = -\frac{\pi}{27}$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{\pi}{6}$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)} = \frac{5}{96}\pi$

מסילת משולש פיצה



שאלות

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2016}}dx=\frac{\pi}{2016}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)}$.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+x^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$

מסילת מעגל היחידה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+\text{b}\sin(x)+\text{c}} dx$ עבור הפרמטרים הממשיים a,b,c המקיימים $c > \sqrt{a^2+b^2}=1$.

<u>הערה</u>: ניתן להשתמש בעובדה כי $\left|\sqrt{c^2-1}-c\right|<1$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi$ עבור $a>b>0$

5) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx$ עבור $|a|>1$

6) חשבו לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta$

תשובות סופיות

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+\text{b}\sin(x)+\text{c}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$

4) $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$

6) $\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi$

הלמה של ז'ורדן

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בלמה של ז'ורדן:

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx = \mathrm{Im}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx \right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)\cdot i$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1} dx$

10) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx$

תשובות סופיות

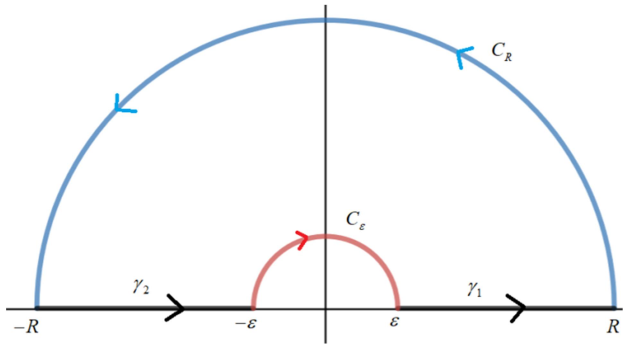
1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1} dx = 0$

4) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}(1-a)e^{-a}$

מסילת חצי מעגל מנוקב



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים :

$$\gamma_1 = \left\{ z = x \mid \varepsilon \le x \le R \right\} \qquad C_R = \left\{ z = Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{ z = x \mid -R \le x \le -\varepsilon \right\} \qquad C_\varepsilon = \left\{ z = \varepsilon e^{i\theta} \mid \theta : \pi \to 0 \right\}$$

$$\gamma = \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_\varepsilon$$

שאלות

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$

הדרכה :

א. הוכיחו כי $\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1-e^{i2x}}{2x^2} \right\}$

ב. הגדירו $f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{2z^2}$ והסבירו מדוע $\oint_\gamma f(z)dz = 0$

ג. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ ו - $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = -\pi$

2) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$

5) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(x^2+\beta^2)} dx$ לכל $\alpha, \beta > 0$

תשובות סופיות

6) הוכחה

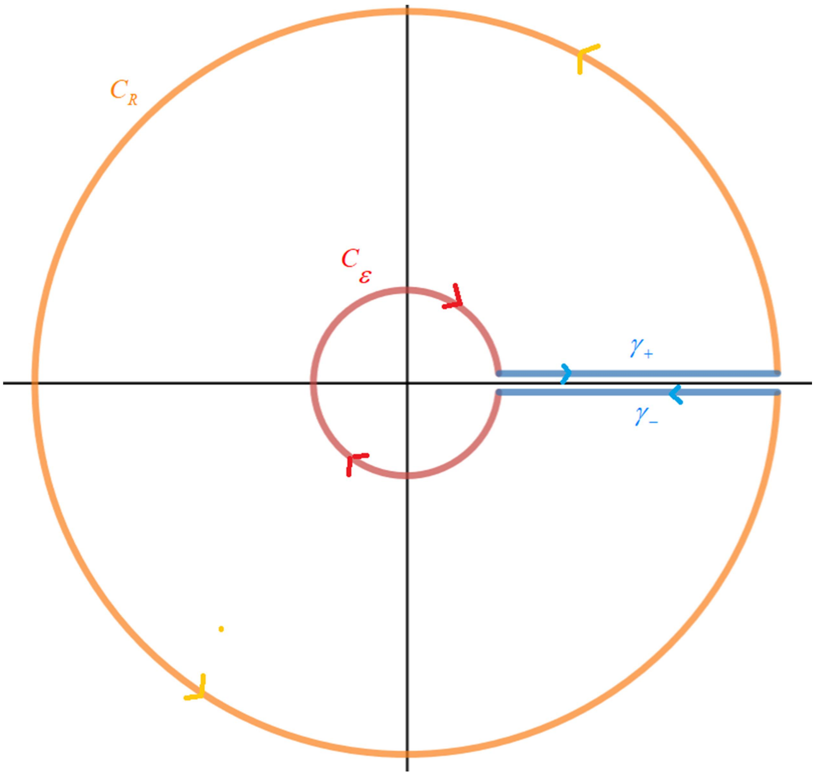
7) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx=\frac{88}{5\cdot 2^5}\pi$$

8) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2 x}dx=\frac{1}{2\pi}-\frac{e^{-\pi}}{\pi}$$

9) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx=\pi$$

10) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)}dx=\frac{\pi}{\beta^2}\left(\alpha-\frac{1-e^{-\alpha\beta}}{\beta}\right)$$

מסילת חור מנעול



שאלות

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \pi$

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר $R>1$ ו-$0<\varepsilon<1$)

$C_R = \{z = \mathrm{R}\, e^{i\theta} \mid 0+ < \theta < 2\pi -\}$ $\quad$ $C_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{i\theta} \mid 0+ < \theta < 2\pi -\}$

$\gamma_+ = \{z = xe^{0\cdot i} \mid x : \varepsilon \to R\}$ $\quad$ $\gamma_- = \{z = xe^{2\pi i} \mid x : R \to \varepsilon\}$

א. הוכיחו כי $\oint\limits_{\gamma_+ + C_R + \gamma_- + C_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz = 2\pi$ כאשר $\sqrt{z}$ מוגדר בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz = 0$

ג. הוכיחו כי $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz = 0$

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \pi$

שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות

שאלות

1) נתונה $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ מנת פולינומים כאשר $\deg(q)\geq\deg(p)+1$
הוכיחו כי

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}e^{st}F(s)ds=\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left[e^{st}F(s),s_k\right]$$

כאשר s_k אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $F(s)$
והקו $\text{Re}(s)=\sigma$ נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

2) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s)=\frac{1}{(s^2+2s+5)^2}$

תשובות סופיות

3) הוכחה

4) $f(t)=\frac{e^{-t}}{16}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$

שארית באינסוף

שאלות

1) נניח כי ∞ הינה נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$. הוכיחו כי

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי

$$\operatorname{Res}\left[f(z),z_1\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),z_2\right]+\dots+\operatorname{Res}\left[f(z),z_n\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$$

3) חשבן $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz$

4) חשבן $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4-1}dz$

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) הוכחה

3) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz=0$

4) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4-1}dz=-\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$