הלמה של שוורץ

הלמה של שוורץ

נניח כי $f(z)$ הולומורפית ב- $\mathrm{D}(0,1)$ (עיגול היחידה הפתוח) וכי לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$ מתקיים $|f(z)|\le 1$ ו - $f(0)=0$. אזי $|f(z)|\le |z|$ לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$.

בנוסף, אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

א) $|f(z_0)|=|z_0|$ עבור $0\ne z_0\in D(0,1)$

ב) $|f'(0)|=1$

אז $f(z)\equiv c\cdot z$ כאשר c קבוע המקיים $|c|=1$

תזכורת – העתקות מוביוס נפוצות

1) ההעתקה $\varphi_\alpha(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}\cdot z}$ כאשר $\alpha\in D(0,1)$ הינה העתקה אנליטית חח״ע ועל בין עיגול היחידה הפתוח לעצמו ומקיימת $\varphi_\alpha(\alpha)=0$. שימו לב כי גם ההופכית אנליטית וההופכית נתונה ע״י $\varphi_\alpha^{-1}(z)=\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}\cdot z}$

2) ההעתקה $f(z)=\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$ כאשר $a\in H_+$ הינה העתקה אנליטית חח״ע ועל בין חצי המישור העליון H_+ ודיסק היחידה הפתוח $D(0,1)$.

הערה: $H_+=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)>0\}$

שאלות

1) נתונות $f,g:D(0,1)\to D(0,1)$ הולומורפית חח"ע ועל וידוע כי $g(0)=z_1$, $f(z_1)=0$
כאשר $z_1\in D(0,1)$. הוכיחו כי $|f(z)|\le|g^{-1}(z)|$ לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$
כאשר $g^{-1}(z)$ זו הפונקציה ההופכית של $g(z)$

2) נתונות $f,g:D(0,1)\to D(0,1)$ הולומורפית חח"ע ועל וידוע כי $g(z_1)=0$, $f(z_1)=0$
כאשר $z_1\in D(0,1)$.
א) הוכיחו כי $|f(z)|\le|g(z)|$ לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$
ב) הסיקו כי $|f(z)|=|g(z)|$ לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$

3) נתונה $f(z):D(0,1)\to D(0,1)$ הולומורפית ו - $a\in D(0,1)$ כך ש - $f(a)=0$
א) הוכיחו כי $|z|\le 1$ אז $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}\right|\le 1$
ב) הוכיחו כי $|f(z)|\le\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}\right|$ לכל $z\in \mathrm{D}(0,1)$

4) נתונה $f(z):H^+\to D(0,1)$ כאשר $H^+=\{\mathrm{Im}(z)>0\}$ ו- $a\in H^+$ כך ש $f(a)=0$
א) הוכיחו כי אם $z\in H^+$ אז $\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|\le 1$
ב) הוכיחו כי לכל $z\in H^+$ מתקיים $|f(z)|\le\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|$

5) הוכיחו את ההכללה הבאה של הלמה של שוורץ ו-.
נניח כי $f(z)$ הולומורפית ב $D(0,1)$ ו - $|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D(0,1)$
נניח כי $f(0)=f^{(1)}(0)=...=f^{(m-1)}(0)=0$ עבור $m\ge 1$ טבעי כולשהו.
הוכיחו כי $|f(z)|\le|z|^m$ לכל $z\in D(0,1)$

6) בתרגיל זה נסמן $H^r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$ ו- $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$.
א. יהי $\alpha\in H^r$ קבוע כלשהוא. הוכיחו כי ההעתקה $\varphi(z)=\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$ מעבירה
את החצי המישור הימני H^r אל עיגול היחידה D , כלומר $\varphi(H^r)=D$.

ב. תהי $f:H^r\to D$ אנליטית ונניח שקיימת $\alpha\in H^r$ כך ש- $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

הוכיחו כי לכל $w\in H^r$ מתקיים $\left|f(\mathrm{w})\right|\le\left|\frac{w-\alpha}{w+\overline{\alpha}}\right|^2$.

ג. תהי $f:H^r\to D$ אנליטית ונניח שקיימות $\alpha,\beta\in H^r$ שונות, כלומר $(\alpha\neq\beta)$

כך שמתקיים $f(\alpha)=f(\beta)=0$ הוכיחו כי לכל $w\in H^r$

מתקיים $\left|f(\mathrm{w})\right|\le\left|\frac{w-\alpha}{w+\overline{\alpha}}\right|\cdot\left|\frac{w-\beta}{w+\overline{\beta}}\right|$.

7) בתרגיל זה נסמן $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$. תהי $f:D\to D$ אנליטית

א. הוכיחו כי לכל $z_1,z_2\in D$ מתקיים $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\le\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}\cdot z_2}\right|$

ב. הוכיחו כי לכל $z\in D$ מתקיים $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}$

8) בתרגיל זה נסמן $H^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$ ו - $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$.

תהי $f:H^+\to H^+$ אנליטית ותהי $z_0\in H^+$ נקודה כולשהי.

הוכיחו כי לכל $z\in H^+$ מתקיים $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right|\le\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|$

9) נניח כי $f:D(0,1)\to D(0,1)$ אנליטית וכי קיימות שתי נקודות **שונות**

$\alpha,\beta\in D(0,1)$ כך ש $f(\alpha)=\alpha$ ו - $f(\beta)=\beta$

הוכיחו כי $f(z)\equiv z$

10) נניח כי $f:D(0,1)\to D(0,1)$ אנליטית.

הוכיחו כי $|f'(z)|\le\frac{1}{1-|z|^2}$ לכל $z\in D(0,1)$