

# פרקי חזרה - אינטגרלים

## האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מידי)

שאלות:

חשב את האינטגרלים הבאים (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשב את האינטגרלים הבאים (פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשב את האינטגרלים הבאים (פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשב את האינטגרלים הבאים (פתירה על ידי הכלל:  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ ):

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(29) חשב את האינטגרל הבא (פתירה על ידי הכלל:  $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$ ):

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

(30) חשב את האינטגרל הבא (פתירה על ידי הכלל:  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ ):

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$$

חשב את האינטגרלים הבאים (פתירה על ידי אינטגרלים טריגונומטריים הפוכים):

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36)$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad (35)$$

$$\int \cos 4x dx \quad (34)$$

**תשובות סופיות:**

$$\begin{array}{llll} \frac{x^{1.5}}{1.5} + c & \text{(4)} & -\frac{1}{x} + c & \text{(3)} & \frac{x^5}{5} + c & \text{(2)} & 4x + c & \text{(1)} \\ -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c & \text{(8)} & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c & \text{(7)} & \frac{4x^{11}}{11} + c & \text{(6)} & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c & \text{(5)} \\ -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c & \text{(11)} & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c & \text{(10)} & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c & \text{(9)} \\ \frac{(x-1)^{21}}{21} + c & \text{(14)} & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c & \text{(13)} & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c & \text{(12)} \\ 10\sqrt{2x+4} + c & \text{(17)} & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c & \text{(16)} & -\frac{1}{(x-2)^4} + c & \text{(15)} \\ \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c & \text{(20)} & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c & \text{(19)} & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c & \text{(18)} \\ x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c & \text{(23)} & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c & \text{(22)} & \frac{\ln|x|}{4} + c & \text{(21)} \\ 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c & \text{(26)} & x + \ln|x+2| + c & \text{(25)} & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c & \text{(24)} \\ \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c & \text{(29)} & \frac{e^{2x+2}}{2} + c & \text{(28)} & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c & \text{(27)} \\ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c & \text{(32)} & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c & \text{(31)} & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{4x}{3}}}{4} + c & \text{(30)} \\ -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c & \text{(35)} & \frac{\sin(4x)}{4} + c & \text{(34)} & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c & \text{(33)} \\ & & & & \frac{-\cos(4x)}{2} + \sin x + c & \text{(36)} \end{array}$$

## האינטגרל הלא מסוים (הנגזרת כבר בפנים)

שאלות:

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

**תשובות סופיות:**

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln x^3 + 1  + c$ (3)               | $\ln \sin x  + c$ (2)                        | $\ln x^2 + 1  + c$ (1)                         |
| $e^2 \ln e^x + 1  + c$ (6)                       | $\ln \ln x   + c$ (5)                        | $-\ln \cos x  + c$ (4)                         |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9)                   | $e^{\tan x} + c$ (8)                         | $e^{x^2} + c$ (7)                              |
| $\sin(\ln x) + c$ (12)                           | $\sin(\sin x) + c$ (11)                      | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10)                      |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15)                     | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14)        | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13)        |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18)                | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17)         | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16)               |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21)   | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19)                     |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

**שאלות:**

חשב את האינטגרלים הבאים:

- |   |   |                                    |
|---|---|------------------------------------|
| $\int x \sin x dx$ (3)                  | $\int x^4 \ln x dx$ (2)                       | $\int x e^x dx$ (1)                |
| $\int x^2 e^{-4x} dx$ (6)               | $\int x^2 \sin 4x dx$ (5)                     | $\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx$ (4) |
| $\int \arctan x dx$ (9)                 | $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ (8)       | $\int \ln x dx$ (7)                |
| $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (12)       | $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ (11)      | $\int \arcsin x dx$ (10)           |
| $\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx$ (16)         | $\int x \arctan x dx$ (15)                    | $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ (13)   |
| $\int e^x \cos x dx$ (19)               | $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ (18) | $\int \ln^2 x dx$ (17)             |
| $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$ (22)    | $\int \sqrt{1-x^2} dx$ (21)                   | $\int e^{2x} \sin 4x dx$ (20)      |
| $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$ (24) | $\int x \tan^2 x dx$ (23)                     |                                    |
- (25) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  כאשר  $n$  טבעי.
- (26) חשב את  $\int x^4 e^x dx$ .
- (27) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.
- (28) חשב את  $\int \cos^4 x dx$ .
- (29) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.
- (30) חשב את  $\int \sin^4 x dx$ .
- (31) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.
- (32) חשב את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

**תשובות סופיות:**

- $$x \cos x + \sin x + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2) \qquad xe^x - e^x + c \quad (1)$$
- $$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5) \qquad \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$
- $$x \ln x - x + c \quad (7) \qquad -\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$
- $$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (10) \qquad x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$
- $$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12) \qquad \frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$
- $$\frac{x^3}{3} \ln(x^2+1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15) \qquad -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$
- $$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (17) \qquad \frac{x^3}{3} \ln(x^2+1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (16)$$
- $$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (18)$$
- $$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (21) \qquad \frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (20)$$
- $$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (23) \qquad \frac{e^x}{x+1} + c \quad (22)$$
- $$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (25) \qquad \frac{2}{9} (x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99} (x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (24)$$
- $$\frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \quad (27) \qquad e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (26)$$
- $$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (29) \qquad \frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3.5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (28)$$
- $$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (31) \qquad \frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3.5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (30)$$
- $$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (32)$$

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

**שאלות:**

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$



**תשובות סופיות:**

$$2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c \quad (3) \quad \frac{2}{3}\left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5}-\frac{4}{3}(\sqrt{x^3+4})^3\right)+c \quad (2) \quad -\frac{1}{x^2+1}+c \quad (1)$$

$$\arcsin(\ln x)+c \quad (6) \quad -\frac{1}{3(\ln x)^3}+c \quad (5) \quad \arctan(e^x)+c \quad (4)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c \quad (8) \quad \frac{1}{2}(x^2e^{x^2}-e^{x^2})+c \quad (7)$$

$$x^2 \sin(x^2+1)+\cos(x^2+1)+c \quad (10) \quad \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c \quad (12) \quad \frac{1}{18}\left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16}+\frac{(3x^2-1)^{15}}{15}\right)+c \quad (11)$$

$$x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)+c \quad (14) \quad \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c \quad (13)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5}+c \quad (16) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c \quad (15)$$

$$\ln|\ln(\ln x)|+c \quad (18) \quad \frac{(\arctan x)^3}{3}+c \quad (17)$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln|1-x^4|\right)+c \quad (20) \quad x \arctan \sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan \sqrt{x}+c \quad (19)$$

$$\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+c \quad (22) \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c \quad (21)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7}-\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4}+c \quad (24) \quad 6(\sqrt[6]{x}-\arctan \sqrt[6]{x})+c \quad (23)$$

## אינטגרלים של פונקציות רציונאליות

**שאלות:**

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (24)$$

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (25)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (27)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (29)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (30)$$

**תשובות סופיות:**

- $$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2) \qquad \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$
- $$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4) \qquad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$
- $$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6) \qquad 3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$
- $$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8) \qquad \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$
- $$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10) \qquad \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$
- $$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12) \qquad 4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$
- $$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16) \qquad \arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$
- $$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18) \qquad \arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$
- $$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (20) \qquad \frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$
- $$x^3 - x^2 + x + c \quad (22) \qquad \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (21)$$
- $$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (24) \qquad \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (23)$$
- $$6 \left( \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1+\sqrt[6]{x})}{2} + 3(1+\sqrt[6]{x}) - \ln|1+\sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (26) \qquad -1.5 \ln|1-\sqrt[3]{x^2}| + c \quad (25)$$
- $$4 \left( \frac{(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1+\sqrt[4]{x-1})}{2} + 3(1+\sqrt[4]{x-1}) - \ln|1+\sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (27)$$
- $$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x}+1| - \frac{1}{2} \ln \left( (\sqrt[3]{x}-0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (28)$$
- $$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + c \quad (30) \qquad -\ln|1+e^x| + x + c \quad (29)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

שאלות:

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד):

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$
$\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכור כי:

חשב את האינטגרלים הבאים:

- |   |  |
|---|--|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ (2)                           | $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$ (1)          |
| $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ (4)                       | $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$ (3)                                 |
| $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ (6)                         | $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$ (5)                                |
| $\int \tan^2 x dx$ (8)                                    | $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$ (7)                                |
| $\int \sin 7x \cos 5x dx$ (10)                            | $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$ (9)                            |
| $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ (12)                      | $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$ (11)                   |
| $\int \sin^2 4x dx$ (14)                                  | $\int \cos^2 x dx$ (13)  |
| $\int \sin^3 4x dx$ (16)                                  | $\int \cos^3 x dx$ (15)  |
| $\int \sin^4 2x dx$ (18)                                  | $\int \cos^4 x dx$ (17)  |
| $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$ (20) | $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ (19)                     |
| $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$ (22)                | $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$ (21) |
| $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ (24)                          | $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$ (23)             |

$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left  \sin x = t \quad (x = \arcsin t) \right  = \int f(t) dt$	זכור כי :
$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left  \cos x = t \quad (x = \arccos t) \right  = \int f(t) (-dt)$	

חשב את האינטגרלים הבאים :

$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$ (26)	$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$ (25)	
$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ (29)	$\int \sin^3 2x dx$ (28)	$\int \cos^3 x dx$ (27)
$\int \tan^5 x dx$ (32)	$\int \cos^5 x dx$ (31)	$\int \sin^5 x \cos^4 x dx$ (30)
$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$ (35)	$\int \frac{dx}{\sin x}$ (34)	$\int \frac{1}{\cos x} dx$ (33)
		$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$ (36)

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית):

$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left  t = \tan \frac{x}{2} \right. \\ \left. (x = 2 \arctan t) \right  = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$	זכור כי :
---	-----------

חשב את האינטגרלים הבאים :

$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx$ (39)	$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ (38)	$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ (37)
--	--	-----------------------------------

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית):

$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left  x = a \sin t \quad (t = \arcsin \frac{x}{a}) \right  = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$
$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left  x = a \tan t \quad (t = \arctan \frac{x}{a}) \right  = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$
$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left  x = \frac{a}{\cos t} \quad (t = \arccos \frac{a}{x}) \right  = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$

חשב את האינטגרלים הבאים :

$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ (42)	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ (41)	$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$ (40)
---	---	---

**תשובות סופיות:**

$$\begin{array}{lll}
 -10\cot 10x+c & \text{(3)} & \frac{1}{4}\tan 4x+c & \text{(2)} & -\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin \frac{x}{3}+c & \text{(1)} \\
 x-\frac{1}{2}\cos 2x+c & \text{(6)} & \frac{1}{2}\sin 2x+c & \text{(5)} & \frac{1}{2}\sin 2x+c & \text{(4)} \\
 \tan x-\cot x+c & \text{(9)} & \tan x-x+c & \text{(8)} & -\frac{1}{16}\cos 4x+c & \text{(7)} \\
 & & \sin x+c & \text{(11)} & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c & \text{(10)} \\
 \frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c & \text{(14)} & \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c & \text{(13)} & \frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c & \text{(12)} \\
 -\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c & \text{(16)} & & & \frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c & \text{(15)} \\
 \frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c & \text{(18)} & & & \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c & \text{(17)} \\
 \ln|\cos x|+c & \text{(21)} & 2\sin x+c & \text{(20)} & -\cot x-x+c & \text{(19)} \\
 & & 3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c & \text{(23)} & -\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c & \text{(22)} \\
 \frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c & \text{(25)} & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c & \text{(24)} & & \\
 \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c & \text{(27)} & & & \frac{-\cos^4 x-\cos^2 x}{4}+2\cos x+c & \text{(26)} \\
 \frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c & \text{(29)} & & & -\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c & \text{(28)} \\
 \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c & \text{(31)} & & & -\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c & \text{(30)} \\
 \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|+c & \text{(33)} & & & \frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{4\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c & \text{(32)} \\
 -2e^{\cos x}(\cos x-1)+c & \text{(35)} & & & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c & \text{(34)} \\
 & & -\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c & \text{(37)} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c & \text{(36)} \\
 -x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c & \text{(39)} & & & \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c & \text{(38)} \\
 \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(\arctan(x/2))}{1-\sin(\arctan(x/2))}\right|+c & \text{(41)} & & & -\frac{1}{4}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c & \text{(40)} \\
 & & & & -\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c & \text{(42)}
 \end{array}$$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$